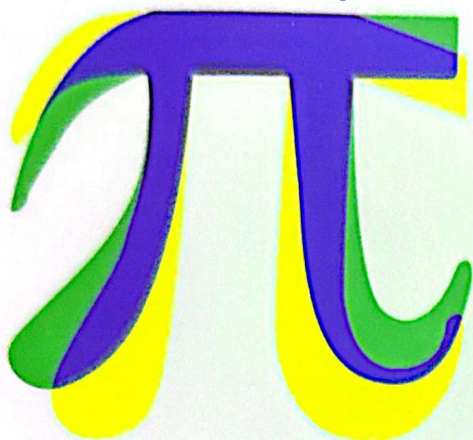


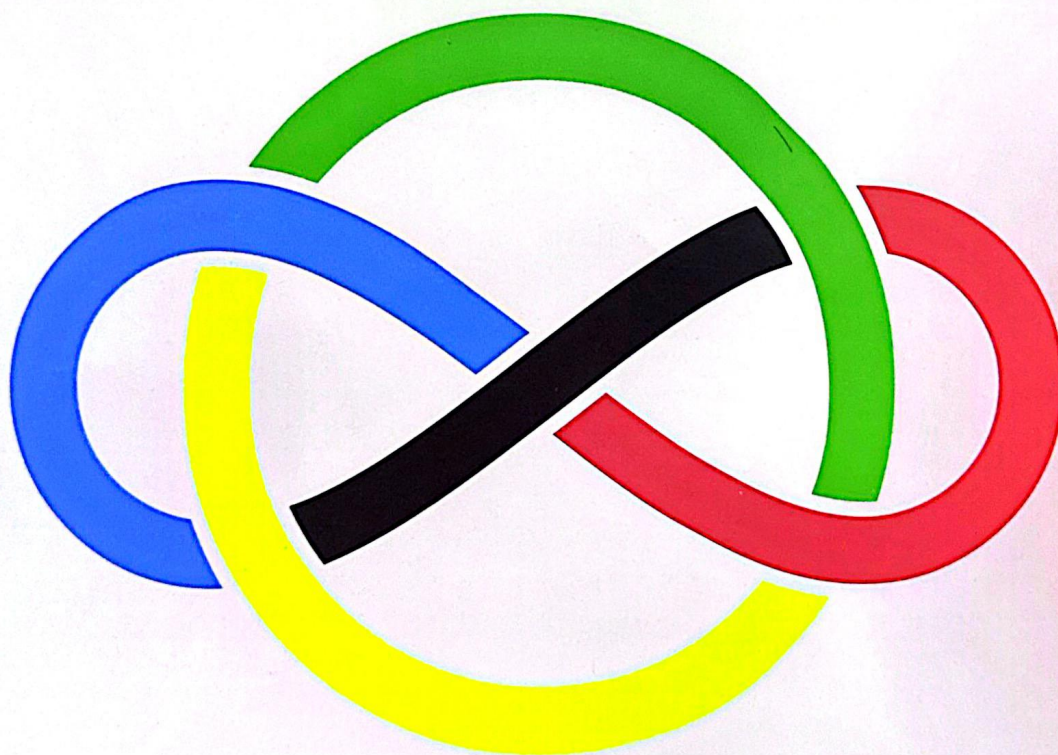


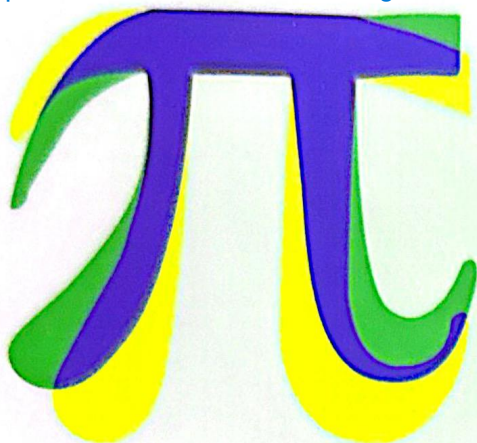
TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 8 - SỐ 10

THÁNG 10. 2024

Những tài năng
không được nhìn thấy:
Liệu biên giới tri thức
có thể mở rộng
nhanh hơn?



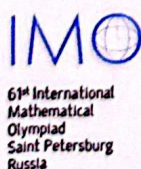
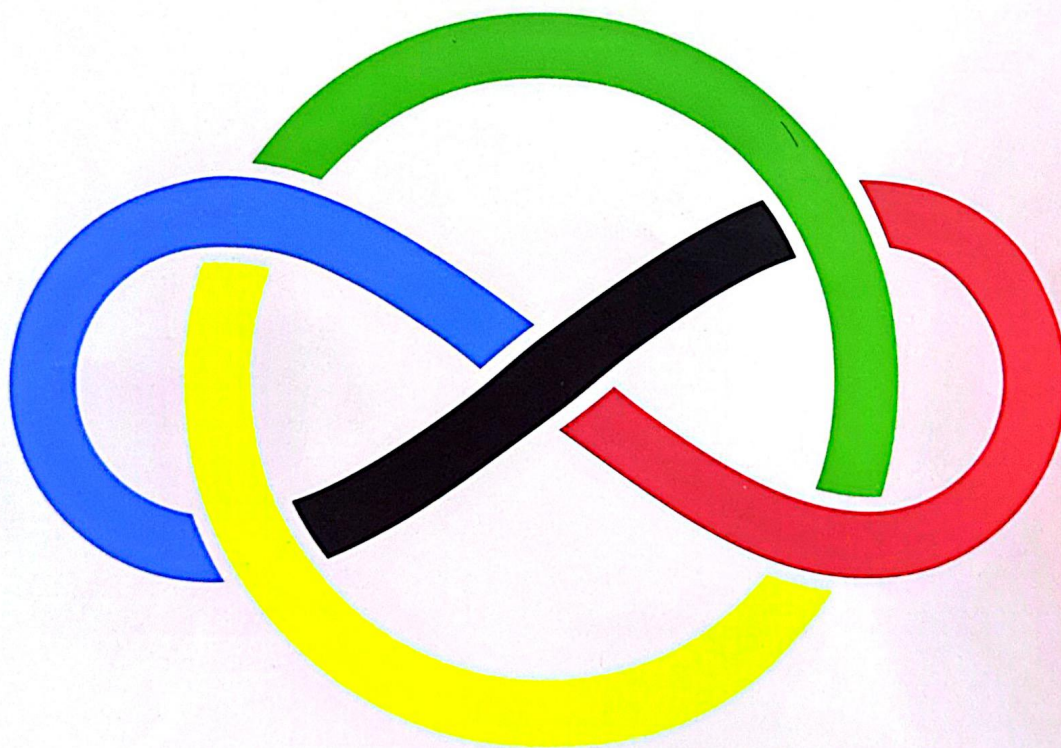


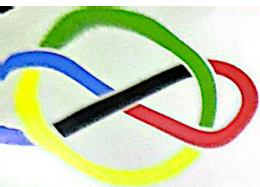
TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 8 - SỐ 10

THÁNG 10, 2024

Những tài năng
không được nhìn thấy:
Liệu biên giới tri thức
có thể mở rộng
nhanh hơn?





MỤC LỤC

TÌM ĐỌC TRONG SỐ NÀY

Mạng Internet ngày nay là một nền tảng không thể thiếu của đa phần dân cư Trái Đất. Chuyên mục **Toán học và Cuộc sống** giới thiệu bài viết thú vị về **Toán học và Địa chỉ IP**, IP là cách viết tắt của Internet Protocol – Giao thức Internet mà thiếu nó thì mạng Internet không thể hoạt động được.

Quán Toán mời các bạn Khám phá thế giới bí ẩn của **Mê cung** từ những câu chuyện thần thoại, văn hóa tới những bài toán đương đại. Các bạn đọc nhỏ tuổi cũng có thể học cách vẽ mê cung trong chuyên mục **Vui cùng Pi**. Ở đó chúng ta còn tìm hiểu thêm **Nghệ thuật tranh Đỉnh Chỉ** và mối liên hệ của nó với Toán học. Tiếp theo, **Toán của Bi** đưa các bạn nhỏ đến với ma phương trong “**Bài toán 36 sĩ quan**” của Euler, cũng như những cuộc truy lùng của thám tử Xuân Phong và nhiều thách thức toán học khác.

Dành cho các bạn học sinh giỏi toán là bài viết về một bài toán thi chọn đội tuyển Olympic Toán Trung Quốc năm 2014.

Cũng về những kỳ thi đỉnh cao, chuyên mục **Các kỳ thi Toán** giới thiệu phần đầu bài nghiên cứu về sự thành công trong khoa học của những người từng dự thi IMO - Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế dành cho học sinh phổ thông. Không ít người trong số họ là **Những tài năng không được nhìn thấy**, liệu **Biên giới tri thức** có mở rộng nhanh hơn nếu những tài năng đó được quan tâm vun xới tốt hơn?

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (Tổng Biên tập)
Phùng Hồ Hải (Phó Tổng Biên tập)
Nguyễn Chu Gia Vương (Phó Tổng Biên tập)
Vũ Thế Khôi (Thư ký Tòa soạn)
Ngô Bảo Châu (Ủy viên)
Trần Nam Dũng (Ủy viên)
Phạm Triều Dương (Ủy viên)
Hà Duy Hưng (Ủy viên)
Nguyễn Khắc Minh (Ủy viên)
Nguyễn Hoàng Thạch (Ủy viên)

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phạm Huy Điển, Ngô Trung Hiếu, Nguyễn Thành Nam,
Ngô Văn Minh, Trần Văn Nhung, Tạ Duy Phương,
Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Duy Thái Sơn, Đỗ Đức Thái,
Phạm Văn Thiệu, Vũ Kim Thủy, Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn,
Lê Anh Vinh

Chế bản: Nguyễn Thái Hiệp
Đồ họa: Nguyễn Trần, Đoàn Xuân Trường
Nguyễn Chu Chloé Huệ Chi
Ảnh bìa 1: Đoàn Xuân Trường

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYỀN

Hà Vũ Anh, Bùi Văn Biên, Võ Quốc Bá Cẩn, Lưu Công Đồng,
Lưu Thị Thanh Hà, Nguyễn Hiệp, Phan Thanh Hồng,
Trần Quang Hùng, Trần Quốc Luật, Kiều Đình Minh,
Nguyễn Thị Nhung, Vũ Hồng Sơn, Lưu Bá Thắng,
Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thắng, Nguyễn Xuân Thọ,
Nguyễn Mạnh Toàn, Nguyễn Hoàng Vũ (phụ trách mục
Tìm hiểu Khoa học).

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty TNHH Đầu tư TM In Hồng Đức
Tập chí ra hàng tháng
Giá: 35.000 đồng

TÒA SOẠN

Phòng 107, Nhà A5, Viện Toán học,
18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội
Email gửi bài: btu@pi.edu.vn
Email giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com
Điện thoại: (024) 3215.1407.
Website: www.pi.edu.vn

TOÁN HỌC VÀ CUỘC SỐNG

- 2 Toán học và địa chỉ IP
Nguyễn Hoàng Vũ

QUÁN TOÁN

- 8 Khám phá thế giới bí ẩn của mê cung
Nguyễn Thụy Việt Anh

TOÁN CỦA BI

- 14 “Bài toán 36 sĩ quan” của Euler
Nguyễn Thanh Giang
17 Đi tìm chiếc vòng quý
Gia Dương
18 Các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi
19 Lời giải các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi (số 6 năm 2024)
22 Eight ways to prove (Part II)
Nguyễn Diệu

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

- 26 Đề ra kỳ này
27 Giải bài kỳ trước

HỌC CÙNG PI

- 38 Về một bài toán thi chọn đội tuyển Olympic Toán Trung Quốc năm 2014
Nguyễn Xuân Thọ

CÁC KỶ THI TOÁN

- 43 Những tài năng không được nhìn thấy:
Liệu biên giới tri thức có thể mở rộng
nhanh hơn?
Ruchir Agarwal và Patrick Gaule
(Người dịch: Đoàn Trung Cường và Quân
Thị Hoài Thu)

GÓC TOÁN OLYMPIC

VUI CÙNG PI

- 55 Giải trí với mê cung
Phần I: Vẽ mê cung
Nguyễn Thụy Việt Anh
58 Nghệ thuật tranh đỉnh chỉ và Toán
Phần I: Tranh đỉnh chỉ với các phép toán
đơn giản
Hoàng Thị Hà My

GÓC CỜ

- 62 Tấn công Vua
Chủ đề: Tiêu diệt quân phòng thủ
Hoàng Minh Hiếu, Bùi Vinh



TOÁN HỌC VÀ ĐỊA CHỈ IP

NGUYỄN HOÀNG VŨ¹

Địa chỉ IP là một khái niệm trong tin học mà chúng ta hay được nghe nhắc đến nhưng không phải ai cũng biết một cách chi tiết về nó. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng Pi tìm hiểu xem toán học có vai trò thế nào trong các tính toán liên quan đến địa chỉ IP.

1. TCP/IP – nền tảng của mạng máy tính

Vào năm 1969, theo đề xuất của một số nhà nghiên cứu, chính phủ Mỹ đã tài trợ cho việc xây dựng một hệ thống mạng có thể kết nối nhiều trung tâm nghiên cứu khoa học trong nước sử dụng các công nghệ mới về cả phần cứng lẫn phần mềm. Mạng tên gọi ARPANET, nó bắt đầu được vận hành vào ngày 29 tháng 10 năm 1969.

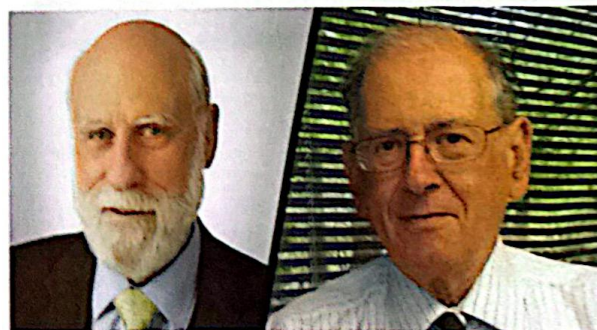


Hình 1. Đội ngũ của công ty BBN đã xây dựng ARPANET, hệ thống mạng tiền thân cho sự ra đời của Internet.

Tin nhắn đầu tiên được gửi qua mạng ARPANET có nội dung chỉ gồm 2 ký tự:

“lo”. Người gửi lúc đó muốn gõ từ “login” nhưng do hệ thống bị sập nên chỉ có 2 ký tự trên được gửi. Phải một tiếng sau, nó mới hoạt động bình thường và chuyển nốt phần còn lại. Tuy khởi đầu có phần trục trặc, ARPANET vẫn phát triển nhanh chóng. Với tốc độ 56 kbit/s, nó đánh dấu một bước tiến lớn trong việc truyền thông tin và dần dần được mở rộng kết nối tới thêm nhiều trung tâm nghiên cứu ở Mỹ cũng như bên ngoài. Thông qua hệ thống mạng mới này, các đơn vị tham gia có thể trao đổi các tài liệu nghiên cứu mới nhất một cách tức thời không cần mất thời gian in văn bản rồi chuyển qua bưu điện.

Với số lượng người dùng tăng lên, NCP, hệ thống giao thức truyền tải của ARPANET, bắt đầu cần được thay thế bằng một giao thức tốt hơn. Robert Kahn và Vinton Cerf, hai trong số các tác giả của NCP, đã tiến hành xây dựng một giao thức mới để truyền thông tin giữa các trạm trong ARPANET.



Vint Cerf (trái) và Robert Kahn (phải).

¹ Hà Nội.

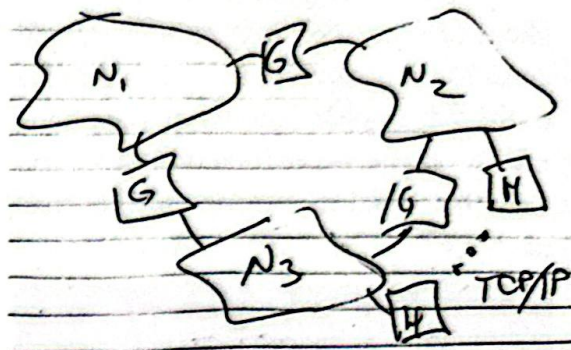
Một ngày tháng 6 năm 1973, Cerf ngồi trong sảnh một khách sạn tại San Francisco khi đang tham dự một hội thảo. Ông và Kahn đã làm việc với nhau hơn ba tháng về việc xây dựng giao thức mới, đặc biệt là vấn đề truyền gói tin giữa các mạng khác nhau. Hệ thống ARPANET sử dụng công nghệ chuyển gói tin thay vì công nghệ chuyển mạch như đường truyền điện thoại. Bằng thông được tận dụng tốt hơn nhưng việc chuyển thông tin đã được chia thành các gói nhỏ qua mạng lại phức tạp hơn nhiều.

Cerf bắt đầu vẽ lên mặt sau một tấm phong bì những ý tưởng mà hai người đã thảo luận. Các đám mây (N_1, N_2, N_3) biểu tượng cho ba mạng phục vụ chuyển gói: ARPANET, radio và vệ tinh. Các hình vuông biểu diễn các máy tính nối vào các mạng đó (ký hiệu H – Host). Bản thân các mạng có sẵn là không thể sửa đổi được và chúng cũng không biết mình nằm trong một mạng Internet. Cerf bắt đầu thêm vào các máy tính khác: các gateway (ký hiệu G). Các máy tính này có thông tin về các mạng trong hệ thống.

Nhìn vào biểu đồ, Cerf nảy sinh ra một ý tưởng để giải quyết vấn đề. Ông miêu tả giải pháp của Kahn và mình giống với một bộ các bưu thiếp và phong bì. Gói tin được gửi đi cũng giống như một bưu thiếp được lồng trong phong bì. Bưu thiếp sẽ chứa tin nhắn và địa chỉ cần đến cuối cùng còn địa chỉ trên phong bì sẽ là địa chỉ của nơi đến trong mạng nội bộ hoặc địa chỉ của một gateway dẫn đến mạng tiếp theo trên đường đi đến địa chỉ cuối.

Khi một tin nhắn đi đến gateway tiếp theo, gateway này sẽ mở phong bì và kiểm tra địa chỉ trên bưu thiếp. Nếu địa chỉ nơi đến thuộc mạng mà gateway chịu trách nhiệm, nó sẽ đưa thông tin đến nơi cần bằng một phong bì phù hợp trong mạng nội bộ, còn nếu không, thông tin sẽ nằm trong một phong bì gửi đến một gateway khác trên đường đi. Quá trình này lặp lại cho đến khi tin nhắn đến địa chỉ

cuối cùng. Đây cũng là ý tưởng cơ bản về cách hoạt động của mạng Internet cho đến ngày nay.



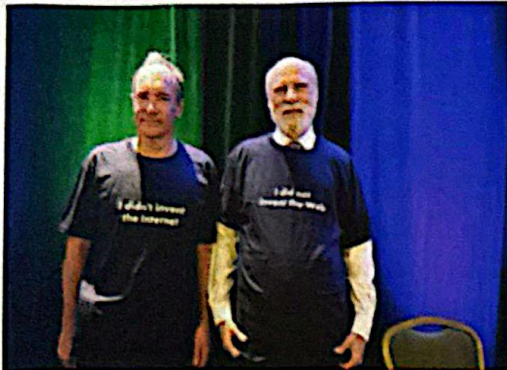
Hình 2. Hình vẽ nháp về TCP/IP ở khách sạn được Vinton Cerf vẽ lại sau này.

Giao thức mới được Cerf và Kahn đặt tên là TCP (Transmission Control Protocol – Giao thức kiểm soát truyền tải). TCP được hoàn thiện trong giai đoạn 1973 – 1974. Sau đó, nó được tách thành hai phần trong phiên bản 4. Phần xử lý truyền gói tin vẫn được giữ nguyên tên gọi TCP, còn phần định tuyến chịu trách nhiệm xác định đường đi của gói tin được đặt tên là IP (Internet Protocol – Giao thức Internet). Giao thức IP phiên bản 4 này còn được viết tắt là IPv4 (v viết tắt từ version). Giao thức TCP/IP nhanh chóng được chuẩn hóa trong ARPANET cũng như các mạng máy tính khác và trở thành cơ sở cho quá trình vận hành của các mạng máy tính cho đến ngày nay. Khi nói đến mạng Internet hiện tại, người ta hay nhắc đến Tim Berners-Lee với ý tưởng về mạng World Wide Web và giao thức HTTP, tuy nhiên những đóng góp của Kahn và Cerf liên quan đến TCP/IP cũng là nền tảng thiết yếu của hệ thống mạng mà chúng ta đang sử dụng.

Internet và Web

Internet và Web là hai thuật ngữ hay được dùng lẫn lộn. Tuy nhiên, về mặt kỹ thuật, Internet được dùng chỉ hệ thống mạng toàn cầu kết nối các mạng khác nhau lại thành một còn Web (tức World Wide Web)

là tập hợp các thông tin được truy cập qua Internet dưới dạng các trang Web và hoạt động ở phía trên Internet. Ngoài Web, mạng Internet còn hỗ trợ các giao thức không liên quan đến Web, phục vụ việc gửi email hay truy cập file. Trong ảnh dưới, ta có thể thấy sự phân biệt này qua áo phông mà Tim Berners-Lee (bên trái) và Vinton Cerf (bên phải) mặc trong một hội thảo năm 2014.



Hình 2. Mặt trước của Tim Berners-Lee: Tôi không phát minh ra Internet. Mặt trước của Cerf: Tôi không phát minh ra Web. Mặt sau của Tim Berners-Lee: Tôi phát minh ra Web. Mặt sau của Cerf: Tôi phát minh ra Internet..

2. Hệ cơ số nhị phân và IPv4

Trong giao thức IP, để phân biệt các thiết bị trong một mạng (mạng Internet hoặc các mạng nhỏ hơn) với nhau, mỗi một thiết bị sẽ được gán một địa chỉ IP. Địa chỉ IP có thể là riêng biệt cho thiết bị (IP tĩnh) hoặc được cấp phát mới từ những địa chỉ IP mà nhà cung cấp Internet còn trống vào thời điểm kết nối (IP động). Về cơ bản, mỗi một địa chỉ IP được

lưu trong máy tính dưới dạng một chuỗi nhị phân 32 bit. Mỗi bit sẽ nhận giá trị 0 hoặc 1. Địa chỉ IP được chia làm 4 phần bằng nhau, mỗi phần ứng với một byte (tức 8 bit). Khi hiển thị địa chỉ IP, máy tính sẽ chuyển giá trị của mỗi byte từ hệ cơ số nhị phân về hệ thập phân và dùng dấu chấm để ngăn cách. Ví dụ, địa chỉ có dạng bit:

11000000 10101000 00000101 10011010

sẽ được hiển thị là 192.168.5.154. Chẳng hạn, với byte đầu tiên ta có: $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 192$. Bạn đọc có thể tự kiểm tra các byte còn lại. Do mỗi byte chỉ có 8 bit nên giá trị trong hệ thập phân của mỗi byte chỉ có thể thuộc khoảng từ 0 đến 255.

Trong thực tế, ta thường truy cập các trang web bằng tên miền có dạng ký tự, ví dụ abc123.com. Tên miền này sẽ được tra cứu qua một hệ thống máy chủ quản lý tên miền (DNS – Domain Name System) để cho ra địa chỉ IP tương ứng giúp tiến hành truyền tải thông tin.

Trong giao thức IP, phần đầu của địa chỉ IP sẽ là địa chỉ mạng. Các thiết bị đầu cuối từ cùng một tổ chức sẽ có phần địa chỉ mạng giống nhau và được phân biệt bằng các bit còn lại. Vào giai đoạn giao thức IP mới ra đời, chỉ có mỗi mình byte đầu tiên được sử dụng để chứa địa chỉ mạng, tức là toàn bộ mạng Internet chỉ có 256 địa chỉ mạng, mỗi mạng kết nối đến 16 triệu thiết bị. Lúc đó người ta coi như vậy là đủ cho nhu cầu của cả thế giới. Tuy nhiên, chỉ một thời gian ngắn sau, do nhu cầu cần phải có nhiều địa chỉ mạng hơn, một giải pháp tạm thời được tiến hành là tạo ra các lớp (class) địa chỉ mạng:

- Lớp A sử dụng byte đầu tiên cho địa chỉ mạng, và bit đầu tiên luôn là 0. Sử dụng 7 bit còn lại ta có 128 địa chỉ mạng khác nhau, mỗi địa chỉ mạng đáp ứng được 16 triệu thiết bị (ứng với 3 byte cuối).

- Lớp B sử dụng 2 byte (tức 16 bit) đầu tiên cho địa chỉ mạng, và 2 bit đầu tiên luôn là 10 (để thuận tiện cho việc phân biệt với A). Sử dụng 14 bit còn lại ta có hơn 16 nghìn địa chỉ mạng, với hơn 65000 thiết bị cho mỗi địa chỉ mạng (ứng với 2 byte cuối).

- Lớp C sử dụng 3 byte (tức 24 bit) đầu tiên cho địa chỉ mạng và 3 bit đầu luôn là 110. Sử dụng 21 bit còn lại ta có hơn 2 triệu địa chỉ mạng, với 256 thiết bị cho mỗi địa chỉ mạng ứng với byte cuối cùng (trong thực tế con số này là 254, ta sẽ giải thích ở phía sau).

Lớp D và lớp E cũng được định nghĩa nhưng không sử dụng đại trà.

Để cho dễ đọc, các địa chỉ IP theo cách này sẽ được thêm số bit cho địa chỉ mạng vào đằng sau dấu “/”, ví dụ 126.10.11.12/8 là một địa chỉ thuộc lớp A.

Giải pháp chia lớp cũng không trì hoãn việc thiếu hụt địa chỉ mạng được lâu. Do số lượng thiết bị của một địa chỉ mạng lớp C quá thấp, các tổ chức cỡ trung thường chọn sử dụng địa chỉ mạng lớp B dù không dùng hết số lượng thiết bị của lớp này. Đến đầu những năm 90, khi mạng Internet được thương mại hóa, số lượng địa chỉ mạng lớp B gần cạn trong khi lớp C lại thừa rất nhiều. Giải pháp triệt để hơn được đưa ra là không cố định số lượng bit của phần địa chỉ mạng nữa. Phương pháp này được đặt tên là CIDR (Classless Internet Domain Routing).

Trong CIDR, số bit sử dụng cho địa chỉ mạng sẽ được viết sau dấu “/”, tương tự như với trường hợp của địa chỉ IP dạng lớp, ví dụ 192.168.5.154/26. Để tìm địa chỉ mạng, ta cần tạo một *subnet mask* dựa trên số bit này. Subnet mask cũng có 32 bit. Những bit ứng với phần địa chỉ mạng có giá trị bằng 1 còn tất cả những bit còn lại phía sau sẽ nhận giá trị bằng 0. Địa chỉ mạng sẽ được tính bằng cách sử dụng toán tử logic AND cho từng cặp bit tương ứng của địa chỉ IP và subnet mask.

Toán tử logic AND là phép toán giữa hai bit nhị phân có công thức như sau:

$$0 \text{ AND } 0 = 0$$

$$0 \text{ AND } 1 = 0$$

$$1 \text{ AND } 0 = 0$$

$$1 \text{ AND } 1 = 1$$

Với địa chỉ IP 192.168.5/154/26 ở trên, ta sẽ tính như sau:

	Dạng nhị phân	Dạng thập phân
Địa chỉ IP	11000000.10101000. 00000101.10011010	192.168.5.154
Subnet mask	11111111.11111111. 11111111.11000000	255.255.255.192
Địa chỉ mạng	11000000.10101000. 00000101.10000000	192.168.5.128

Thông thường khi quản trị mạng, người ta cũng có thể nhập subnet mask dưới dạng thập phân như ở trên. Những byte nào được sử dụng cả 8 bit sẽ có giá trị thập phân là 255. Với byte chỉ sử dụng một phần, cần chuyển đổi từ dạng nhị phân về dạng thập phân, ví dụ: $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 = 192$.

Một bài toán khá thú vị là tìm khoảng các địa chỉ IP có cùng một địa chỉ mạng. Như ta đã thấy, tất cả các bit phía sau của địa chỉ mạng sẽ bằng 0. Lật tất cả các bit này ngược lại thành 1, ta được một địa chỉ đặc biệt, gọi là địa chỉ *broadcast*. Địa chỉ này được dùng để gửi gói tin đến tất cả các thiết bị thuộc cùng địa chỉ mạng này. Địa chỉ IP của một thiết bị sử dụng địa chỉ mạng trên sẽ có giá trị (nhị phân hoặc thập phân) lớn hơn của địa chỉ mạng nhưng nhỏ hơn địa chỉ broadcast.

Ví dụ, với địa chỉ mạng 192.168.5.128/26 ở trên, ta tính địa chỉ broadcast như sau:

	Dạng nhị phân	Dạng thập phân
Subnet mask	11111111.11111111. 11111111.11000000	255.255.255.192
Địa chỉ mạng	11000000.10101000. 00000101.10000000	192.168.5.128
Địa chỉ broadcast	11000000.10101000. 00000101.10111111	192.168.5.191

Các thiết bị sử dụng địa chỉ mạng này sẽ có thể được gán địa chỉ IP trong khoảng từ 192.168.5.129 đến 192.168.5.190. Một điều đáng chú ý là dạng thập phân của byte cuối của một địa chỉ IP có thể bằng 0, ví dụ 192.168.5.0/22. Đồng thời, byte cuối của địa chỉ broadcast cũng không nhất thiết phải là 255, ví dụ 192.168.5.191/26. Những ngộ nhận trên thường xảy ra do mọi người quen với trường hợp các byte được sử dụng trọn vẹn cho địa chỉ mạng như trong dạng phân lớp.

Với 2 địa chỉ IP được cho, để tìm một địa chỉ mạng chung cho chúng, ta cần đi từ bên trái và chỉ dừng khi các bit của hai địa chỉ bắt đầu khác nhau. Khi biết vị trí này, ta có thể xây dựng một subnet mask tương ứng và tìm được địa chỉ mạng (cho tất cả các bit bên phải bằng 0) và địa chỉ broadcast (cho tất cả các bit bên phải bằng 1). Ví dụ như trường hợp dưới:

	Dạng nhị phân	Dạng thập phân
Địa chỉ IP A	11000000.10101000. 11001001.11110101	192.168.201.245
Địa chỉ IP B	11000000.10101000. 11010001.10011001	192.168.209.153
Subnet mask	11111111.11111111. 11100000.00000000	255.255.224.0
Địa chỉ mạng	11000000.10101000. 11000000.00000000	192.168.192.0
Địa chỉ broadcast	11000000.10101000. 11011111.11111111	192.168.223.255

Ở đây 19 bit đầu tiên của hai địa chỉ là giống nhau và ta tìm được địa chỉ mạng là 192.168.192.0/19.

Đồng thời khi quản trị các thiết bị trong cùng một mạng, người ta cũng có thể thay đổi số bit có giá trị 1 trong subnet mask để chia mạng này thành nhiều mạng con khác nhau. Chúng ta sẽ không đi sâu về mặt chi tiết của kỹ thuật này.

3. Hệ cơ số 16 và IPv6

Tổng số địa chỉ IP mà IPv4 hỗ trợ là 4,3 tỷ. Số lượng này là phù hợp với giai đoạn Internet

bắt đầu được thương mại hóa vào đầu những năm 1990. Tuy nhiên, nhu cầu sử dụng của thế kỷ 21 bắt đầu tăng vọt với sự phổ biến của các thiết bị cá nhân kết nối mạng như điện thoại thông minh, đồng hồ thông minh, ... Việc giá thành chip điện tử rẻ đi và băng thông Internet tăng lên cũng tạo cơ hội cho nhiều dạng thiết bị khác nhau tham gia kết nối Internet từ các đồ điện gia dụng như tủ lạnh hay máy pha cà phê đến những cảm biến và máy móc trong sản xuất công nghiệp, giao thông vận tải và y tế. Để tăng số lượng địa chỉ, người ta bắt đầu chuyển sang sử dụng địa chỉ dạng IPv6.

Một địa chỉ IPv6 được viết sử dụng hệ cơ số 16. Nó gồm 32 chữ số thuộc hệ cơ số này. Các chữ số được chia làm 8 nhóm, mỗi nhóm 4 chữ số cách nhau bằng dấu ":". Ví dụ: 2001 : 0db8 : 0000 : 0000 : 0000 : 7a6e : 0680 : 9668. Để cho gọn, người ta qui ước có thể thay 0000 : 0000 bằng :: (việc này chỉ được phép thực hiện tại nhiều nhất một vị trí trong địa chỉ) và các số 0 đầu tiên của một nhóm có thể bỏ đi. Chẳng hạn địa chỉ vừa nêu có thể viết gọn thành 2001 : db8 :: 7a6e : 680 : 9668. Trong thực tế, mỗi chữ số hệ cơ số 16 sẽ được lưu bằng 4 bit trong hệ nhị phân nên khi lưu trong bộ nhớ máy tính, một địa chỉ IPv6 sẽ chiếm 128 bit trong bộ nhớ. 64 bit đầu của địa chỉ IPv6 được dùng để định tuyến mạng còn 64 bit còn lại giúp nhận diện giao diện của thiết bị.

Trong khi hệ thập phân sử dụng các chữ số từ 0 đến 9 thì hệ cơ số 16 sử dụng các chữ số 0, 1, 2, ..., 9, a, b, c, d, e, f. Trong đó các chữ số từ a đến f nhận giá trị từ 10 đến 15 trong hệ thập phân. Để tính toán với hệ cơ số này, thay vì lấy thừa của 10, ta sử dụng lấy thừa của 16. Ví dụ a1b5 trong hệ cơ số 16 ứng với $10 \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 41397$ trong hệ thập phân.

Một địa chỉ khác cũng sử dụng hệ cơ số 16 là địa chỉ MAC (Media Access Control). Địa

chỉ này có 12 bit và được gán một cách duy nhất lúc sản xuất cho mỗi phần cứng có kết nối mạng, ví dụ $00 - 00 - 5E - 00 - 53 - FF$. Một thiết bị điện tử mà ta sử dụng có thể có nhiều địa chỉ MAC. Ví dụ một laptop có thể có hai địa chỉ MAC, một qua kết nối mạng cổng Ethernet và một qua kết nối Wifi, bởi hai cách kết nối này sử dụng hai thiết bị phần cứng bên trong khác nhau. Địa chỉ MAC có thể được dùng để phân biệt các thiết bị trong cùng một mạng địa phương. Trong một số phiên bản của IPv6, địa chỉ MAC cũng được sử dụng để thiết lập 64 bit phía sau của địa chỉ IP.

IPv6 bắt đầu được phát triển từ năm 1998 và đến năm 2017 mới được chuẩn hóa. IPv6 giúp giải quyết vấn đề thiếu hụt địa chỉ IP trên mạng Internet đồng thời có một số lợi ích khác, tuy nhiên do IPv6 không tương thích với IPv4 nên thông thường cả hai loại địa chỉ IP này sẽ được dùng song song. Các phức tạp về kỹ thuật khi chuyển đổi cũng như chi phí thiết bị cao hơn làm quá trình phổ cập IPv6 diễn ra chậm chạp. Thống kê cuối năm 2023 cho thấy mới có khoảng hơn 1/3 lưu lượng Internet trên thế giới sử dụng IPv6 và sẽ còn phải mất rất nhiều năm cho đến khi IPv4 hoàn toàn bị thay thế trên mạng Internet.

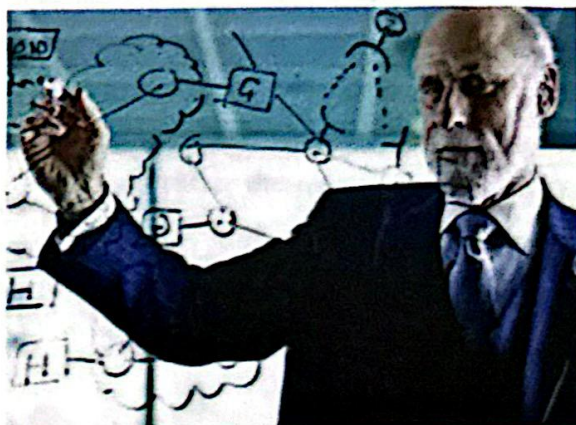
Tại sao không có IPv5?

Một phiên bản IP thử nghiệm từng được một số công ty như Apple, neXT và Sun phát triển sử dụng mã phiên bản là 5 một cách không chính thức. Giao thức này chủ yếu giải quyết vấn đề liên quan đến truyền tải âm thanh và hình ảnh. Để tránh gây nhầm lẫn,

phiên bản chính thức sau IPv4 được đặt tên là IPv6.

4. Lời kết

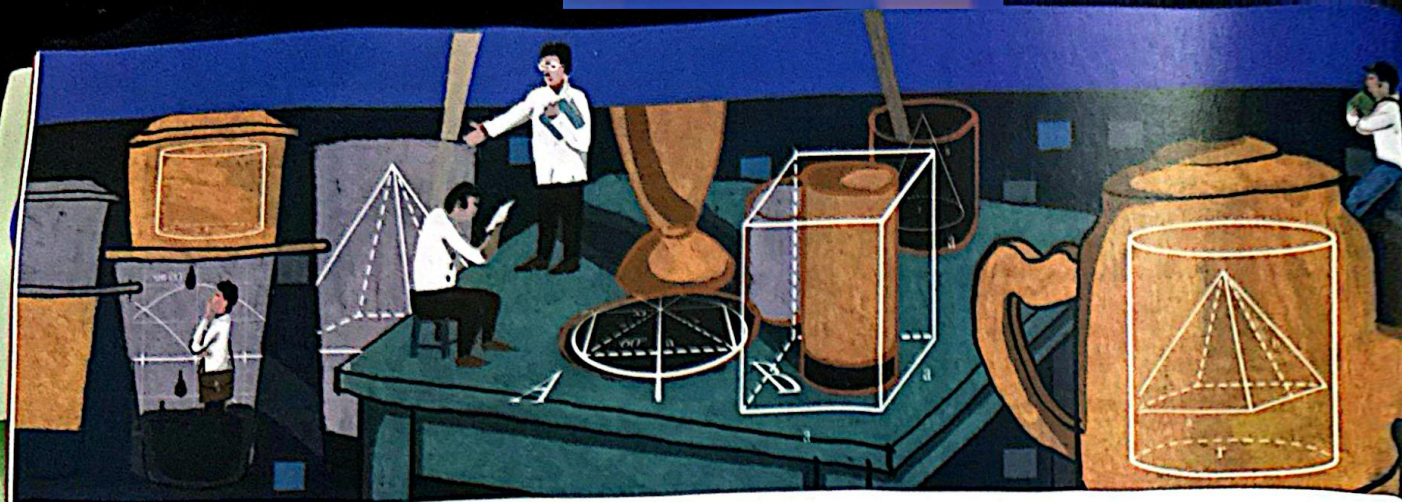
Phương diện toán học của địa chỉ IP là một chủ đề khá thú vị có thể được sử dụng khi dạy và học về các hệ cơ số. Tác giả hy vọng rằng bài viết có thể giúp làm phong phú hơn cho việc giảng dạy về chủ đề này. Pi cũng sẽ tiếp tục giới thiệu đến bạn đọc nhiều ứng dụng thú vị khác của toán học liên quan đến công nghệ thông tin trong các số tiếp theo.



Dù đã tuổi cao, Vint Cerf (sinh năm 1943) vẫn tiếp tục các nghiên cứu liên quan đến Internet. Hiện ông đang làm cho Google.

Tài liệu tham khảo

- [1] Blank, Andrew G. *TCP/IP Foundations*. Sybex, 2004.
- [2] Fall, Kevin R, and W. Richard Stevens. *TCP/IP Illustrated, Volume 1*. Addison-Wesley, 8 Nov. 2011. Hafner, Katie, and Matthew Lyon. *Where Wizards Stay up Late the Origins of the Internet*. New York Simon & Schuster Paperbacks, 2006.



KHÁM PHÁ THẾ GIỚI BÍ ẨN CỦA MÊ CUNG*

NGUYỄN THỤY VIỆT ANH¹

Ghi chú của người dịch: “Labyrinth” và “maze” khi dịch sang tiếng Việt đều có nghĩa là “mê cung”. Mặc dù cả hai từ “maze” và “labyrinth” đều mô tả các con đường phức tạp và khó hiểu, nhưng thực ra chúng lại khác nhau. “Maze” là từ dùng để chỉ mê cung có nhiều sự phân nhánh (đa hướng), phức tạp, gây lúng túng trong việc chọn đường đi và hướng đi. Trong khi “labyrinth” dùng để chỉ những mê cung chỉ có một đường đi và hướng đi, tức là chỉ có một con đường duy nhất, không phân nhánh và dẫn đến trung tâm. (Theo https://www.diffen.com/difference/Labyrinth_vs_Maze).

1. Các nghiên cứu về mê cung và khảo cổ học

Theo thần thoại Hy Lạp, người thợ thủ công lành nghề Daedalus đã tạo ra mê cung. Mục đích của công trình kiến trúc đặc biệt này là để giam cầm Minotaur, con trai của Pasiphaë – vợ của Vua Minos (đảo Crete). Huyền thoại về mê cung Crete đã là chủ đề của những suy đoán và nghiên cứu khảo cổ học, lịch sử và nhân chủng học trong một thời gian dài – giống như các hình ảnh trực quan về các công trình kiến trúc mê cung không chỉ liên quan đến các nhà sử học nghệ thuật mà còn liên quan đến cả các nhà toán học.

Karl Kerényi (1897 – 1973), học giả tôn giáo nổi tiếng thế giới đã nhiều lần quay lại nghiên cứu thần thoại về mê cung và diễn giải chúng như là biểu tượng văn hóa và là cấu trúc hình học cụ thể. Ngay từ khi bắt đầu nghiên cứu

mê cung, Kerényi đã giới thiệu mê cung từ ba khía cạnh chính có liên quan chặt chẽ với nhau:

- 1) Mê cung như một công trình thần thoại;
- 2) Mê cung như là một con đường xoắn ốc mà các vũ công của một nghi lễ cụ thể đi theo; và
- 3) Mê cung như một cấu trúc được biểu thị bằng một đường xoắn ốc.

Trong loạt bài tiểu luận năm 1941 của mình [1], ông đã tóm tắt các khái niệm quan trọng nhất của các nghiên cứu trước đó và đưa ra một số quan sát và so sánh độc đáo, những điều này vẫn được trích dẫn rộng rãi và tham khảo trong các nghiên cứu về mê cung.

Với sự so sánh về thần thoại và phân tích hình thái truyền thống mê cung Babylon, Indonesia, Polynesia, Úc, Normand, La Mã,

¹ Trích dịch từ một số tài liệu.

² Quảng Trị.

Scandinavia, Phần Lan, Anh, Đức, thời Trung cổ và Hy Lạp, ông đã chứng minh sự hiện diện chung của các cấu trúc mê cung và tiết lộ sự thúc đẩy nghệ thuật và kiến trúc đằng sau việc tạo ra chúng đối với các nghi lễ và điệu nhảy tôn giáo khi những người tham gia di chuyển theo các đường xoắn ốc và thực hiện các cử chỉ và các động tác khiêu vũ theo hình uốn khúc. Năm 1963, Kerényi đã dành một bài luận dài về điệu nhảy dân gian Hy Lạp [2] và chỉ ra cách các chuyển động của điệu nhảy mê cung cổ đại được chuyển đổi thành các thành phần chính của *syrtos*, một điệu nhảy vẫn được biểu diễn ở Hy Lạp cho đến ngày nay. Và trong cuốn sách cuối cùng của mình được viết vào năm 1969 [3], nơi ông khám phá nguồn gốc Crete của giáo phái Dionysos, ông đã thảo luận sâu sắc về các mô hình giống như mê cung và quanh co của Knossos trong điệu nhảy, nghệ thuật và kiến trúc ([3], 89 – 128).

Kerényi trích dẫn Socrates từ tác phẩm *Euthydemus* của Plato. Ở đó Socrates nhắc tới mê cung và mô tả nó như một hình mà đặc điểm dễ nhận biết nhất là một đường quanh co hoặc đường xoắn ốc lặp đi lặp lại vô tận: “Sau đó, có vẻ như đang rơi vào một mê cung; chúng tôi nghĩ rằng chúng tôi đã đến đích, nhưng con đường của chúng tôi lại cong và chúng tôi thấy mình như thể quay trở lại điểm xuất phát, và cũng xa nơi mà chúng tôi đang tìm kiếm lúc đầu” ([3], 92 – 93). Theo lời kể của Socrates, “mê cung là một con đường khó hiểu, khó đi theo mà không có sợi chỉ, nhưng miễn là người ta không bị nuốt chửng ở điểm giữa, thì chắc chắn nó sẽ dẫn trở lại điểm xuất phát, bắt chước những khúc quanh co”. Để giải thích sự phát triển và các biến thể của cấu trúc, Kerényi đã thu hút sự chú ý đến một bức bích họa ở tầng trệt của cung điện Knossos ([3], 94), nó có họa tiết quanh co phức tạp không chỉ chạy theo một hướng mà còn không có lối vào hoặc lối ra cho toàn bộ hệ

thống. Dựa trên bức bích họa này, Kerényi mô tả cấu trúc mê cung “là một sáng tác khéo léo của các vòng xoắn ốc hoặc quanh co vô tận (tùy thuộc vào việc bản vẽ tròn hay góc cạnh) trên một bề mặt được phân định. Kết quả là một bức tranh cổ điển về đám rước này, ban đầu dẫn theo các vòng tròn đồng tâm và các khúc cua bất ngờ đến khúc cua quyết định ở trung tâm, nơi người ta buộc phải xoay quanh trục của chính mình để tiếp tục vòng tròn” ([3], 96). “Các khúc cua bất ngờ” và “vòng cua quyết định ở trung tâm” của mê cung cũng chịu trách nhiệm cho ý nghĩa tượng trưng của chúng. Kerényi coi mê cung là hình ảnh mô tả về Hades, về địa ngục, và diễn giải các cấu trúc này như những ký hiệu tường thuật thể hiện mối liên hệ hiện sinh giữa sự sống và cái chết, giữa sự lãng quên người chết và sự trở lại của cuộc sống vĩnh hằng.

1.1 Tấm bia mê cung từ thời Lưỡng Hà

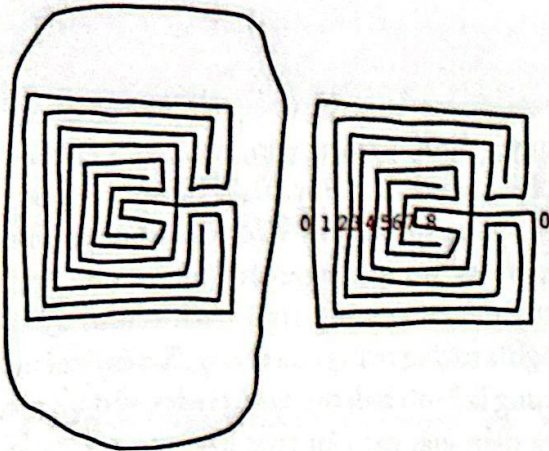


*Tấm bia mê cung từ thời Lưỡng Hà MS 3194.
Hình ảnh do Jöran Friberg cung cấp.*

Jöran Friberg, nhà toán học người Thụy Điển, gần đây đã công bố tấm bia MS 3194 từ bộ sưu tập Schøyen. Người ta không biết chính xác tấm bia này được viết ở đâu và khi nào, nhưng theo Friberg, nó có thể có niên đại từ thời kỳ Babylon cổ đại, khoảng

năm 1800 trước Công nguyên. Tấm bia bị hư hỏng gần một đầu, có kích thước khoảng 10×11 cm.

1.2 “Mê cung Crete” trên một tấm bia từ Pylos



Mê cung trên một tấm bia ở cung điện của Vua Nestor ở Pylos.

Thiết kế của mê cung có niên đại lâu đời nhất được tìm thấy ở mặt sau của một tấm bảng tính toán trong đồng đồ nát của cung điện Vua Nestor ở Pylos, trên bờ biển phía tây của Hy Lạp. Tấm bia ($7 \times 5,7$ cm) được nung khi cung điện bị cháy vào năm 1200 trước Công nguyên. Thiết kế trên tấm bia này thường được gọi là Mê cung Crete. Nó xuất hiện trên các đồng tiền đúc ở Knossos trên đảo Crete vào thế kỷ thứ 5 trước Công nguyên và sau đó, và đại diện cho mê cung huyền thoại nơi Vua Minos giam giữ Minotaur.

1.3 Mê cung khảm La Mã ở Coimbra



Mê cung khảm, $1,50 \times 1,40$ m, nửa đầu thế kỷ thứ ba, tại Coimbra, Bồ Đào Nha. Ảnh của Jeff Seward, nguồn: <https://www.labyrinthos.net/>

1.4 Mê cung ở nhà thờ Gothic



Trẻ em và khách du lịch trải nghiệm mê cung ở nhà thờ Chartres. Nguồn:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Labyrinth_at_Chartres_Cathedral.JPG

Mặc dù có mối liên hệ ngoại đạo với Minotaur (chúng ta biết rằng ở Chartres có một tấm bảng đồng thau ở giữa đề cập rõ ràng đến mối liên hệ này), các mê cung trên sàn đá được lắp đặt trong một số nhà thờ Gothic ở Chartres, Reims và Amiens (Pháp). Những mê cung này đủ lớn, thường rộng 10m, để người ta có thể đi dọc theo con đường từ lối vào đến trung tâm. Trong mê cung thờ này, chỉ có mê cung của nhà thờ ở Chartres vẫn còn tồn tại; những mê cung của các nhà thờ khác đã bị phá bỏ vào thế kỷ 18, vì trẻ em và khách du lịch đến đây làm phiền đến việc thờ cúng.

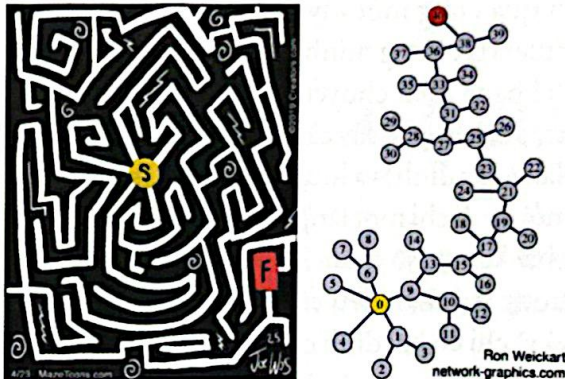
2. Toán học của mê cung

Người đầu tiên nghiên cứu nghiêm túc về mê cung trên mặt phẳng theo quan điểm toán học là Euler. Những nghiên cứu này đã dẫn ông đến việc thực hiện một số đóng góp đầu tiên cho các ngành hiện nay được gọi là lý thuyết đồ thị và tô pô.

Mê cung thường trông rất lộn xộn, vì vậy điều đầu tiên mà một nhà toán học có thể muốn làm đó là sắp xếp lại mê cung và trừu tượng hóa nó thành một tập hợp các nút (hoặc đỉnh) được nối với nhau bằng các đường (hoặc cạnh). Đối tượng này được gọi là đồ thị trong toán học thuần túy.

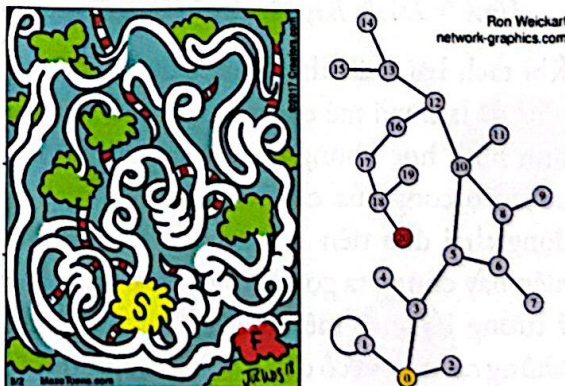
2.1 Lý thuyết đồ thị

Nếu một mê cung có thể được biểu diễn bằng một đồ thị không có vòng lặp (tức là không có chu trình), thì nó được gọi là mê cung hoàn hảo. Nếu như thêm yêu cầu không có cạnh nào nối một đỉnh với chính nó (tức cạnh khuyên) thì đồ thị được gọi là cây. Một ví dụ phổ biến của đồ thị như vậy là cây phả hệ.



Hình 1: Một mê cung hoàn hảo (bên trái) và đồ thị vô hướng phi chu trình liên thông với 41 đỉnh (bên phải).

Hình 1 cho thấy một ví dụ về một mê cung hoàn hảo cùng với kết quả khi bỏ qua tất cả các chi tiết nghệ thuật và chỉ vẽ các cạnh và đỉnh. Đỉnh đầu tiên 0 là điểm bắt đầu và đỉnh cuối cùng 40 là điểm kết thúc. Có thể thấy rằng mê cung này là một cây vì không có vòng lặp và không có cạnh khuyên.



Hình 2: Một mê cung không hoàn hảo (trái) và đồ thị của nó (phải). Đây không phải là một cây vì nó chứa các chu trình.

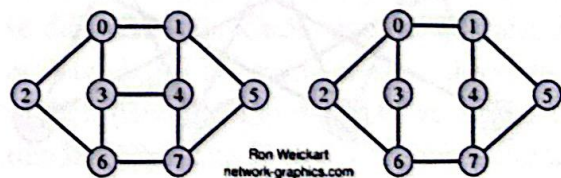
Hình 2 cho thấy một ví dụ về mê cung không

hoàn hảo được biểu diễn bằng đồ thị chứa chu trình.

2.2 Mê cung Hamilton.

Một loại mê cung đặc biệt hấp dẫn đối với các nhà lý thuyết đồ thị được gọi là mê cung Hamilton [1]. Trong mê cung Hamilton, tồn tại một đường đi qua mỗi đỉnh một lần ngoại trừ đỉnh bắt đầu và đỉnh kết thúc, tức là một đường đi qua mỗi đỉnh đúng một lần rồi quay trở lại đỉnh bắt đầu. Một đường đi như vậy được gọi là chu trình Hamilton. Còn đường đi Hamilton là một đường đi đi qua mỗi đỉnh một lần mà không cần phải quay lại điểm bắt đầu. Hamilton ban đầu đã xem xét vấn đề tìm chu trình Hamilton trong đồ thị khối mười hai mặt (được gọi là câu đố Hamilton hoặc trò chơi icosian).

Bài toán Hamilton tổng quát là tìm xem một đồ thị cho trước có đường đi Hamilton hay chu trình Hamilton không. Với một số loại đồ thị, có thể sử dụng thuật toán máy tính để giải bài toán này trong một khoảng thời gian hợp lý. Ví dụ, có thể chứng minh rằng đồ thị phẳng 4 kết nối (đồ thị có nhiều hơn 4 đỉnh vẫn liên thông khi loại bỏ không quá 4 đỉnh) luôn chấp nhận chu trình Hamilton và tồn tại thuật toán để tìm chu trình Hamilton trong thời gian tuyến tính với không gian lưu trữ tuyến tính [2].



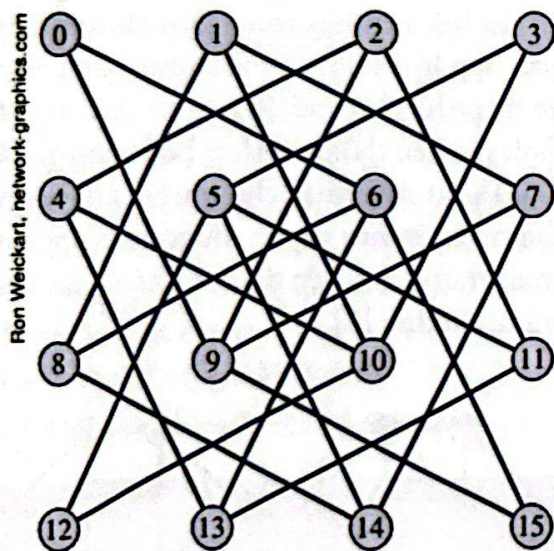
Hình 3: Mê cung Hamilton (bên trái) và không phải mê cung Hamilton (bên phải).

Hình 3 (bên trái), trình bày một ví dụ về mê cung Hamilton. Đây là mê cung Hamilton vì nếu chúng ta bắt đầu ở đỉnh 2, sẽ có một đường đi qua mỗi đỉnh một lần và quay trở lại đỉnh 2. Trong Hình 3 (bên phải) là một mê cung không phải mê cung Hamilton. Người

ta có thể kiểm tra rằng đối với đồ thị này, không thể bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh trong khi chỉ đi qua mọi đỉnh khác một lần.

2.3 Hành trình của quân mã (hay còn gọi là bài toán “mã đi tuần”)

Những người chơi cờ vua có thể thấy sự tương đồng giữa mê cung Hamilton và bài toán di chuyển quân mã, trong đó người chơi thực hiện một chuỗi các nước đi với quân mã sao cho mỗi ô trên bàn cờ được đi qua một lần. Một hành trình của quân mã khép kín là một đường đi kết thúc tại ô vuông bắt đầu và một hành trình của quân mã mở là một đường đi kết thúc tại một ô vuông khác. Đây rõ ràng là những trường hợp đặc biệt của chu trình Hamilton và đường đi Hamilton, trong đó đồ thị của tất cả các nước đi có thể có của quân mã trên bàn cờ được gọi là đồ thị của quân mã.



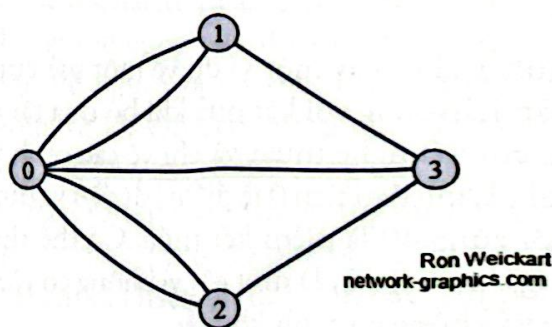
Hình 4: Đồ thị của quân mã không cho quân mã đi tuần.

Trong Hình 4 là đồ thị của quân mã cho một bàn cờ vua 4×4 . Đồ thị này không phải là một đồ thị Hamilton, vì vậy người ta không thể đi qua mỗi ô vuông một lần bằng quân mã và kết thúc ở điểm bắt đầu. Một sự thật thú vị là hành trình của quân mã không tồn tại trên một bàn cờ vua 4×4 hoặc nhỏ hơn,

nhưng nó tồn tại trên một bàn cờ vua 8×8 thông thường [3].

2.4 Bảy cây cầu của Königsberg

Euler ban đầu đã cân nhắc một viễn cảnh tương tự khi ông giải quyết bài toán Bảy cây cầu ở Königsberg theo chiều hướng không được khả quan. Vấn đề trong trường hợp này là liệu ai đó có thể đi bộ qua thành phố và đi qua cả bảy cây cầu mà không bao giờ phải đi qua cùng một cây cầu hai lần hay không. Euler đã chứng minh rằng điều này là không thể bằng cách chuyển đổi bảy cây cầu thành một đồ thị (các cây cầu là các cạnh và các khối đất là các đỉnh) và lưu ý rằng để di chuyển qua mỗi cạnh chỉ một lần, số cạnh kề với mỗi đỉnh phải là một số chẵn. Tuy nhiên, cả bốn đỉnh trong bài toán đều có số lượng cạnh kề là lẻ và vì chỉ có hai đỉnh có thể là điểm bắt đầu và điểm kết thúc, nên không có giải pháp nào. Đồ thị tương ứng được hiển thị trong Hình 5.



Hình 5: Đồ thị Bảy cây cầu ở Königsberg.

Khi tách bài toán thành một đồ thị (giống như đã làm với mê cung) và loại bỏ các đặc tính hình học không liên quan như độ dài hoặc độ cong của cầu, Euler đã có những động thái đầu tiên hướng đến chủ đề mà hiện nay chúng ta gọi là tô pô. Phải nhớ rằng ý tưởng lấy một mê cung hoặc một chuỗi những cây cầu và cô đọng nó lại thành thông tin cần thiết là một sự đột phá vào thời điểm đó, vì chủ đề tô pô như chúng ta biết khi đó chưa tồn tại.

Bài viết này được trích dịch từ các công trình dưới đây.

Sách:

- [1] Hollis Williams. (2023). *The Mathematics of Mazes*.
- [2] Tony Phillips. (2015). *Hidden Symmetries of Labyrinths from Antiquity and the Middle Ages*.
- [3] Kristof Fenyvesi, Slavik Jablan, Ljiljana Radović. (2013). *Following the Footsteps of Daedalus: Labyrinth Studies Meets Visual Mathematics*.

Internet:

- [1] https://www.researchgate.net/profile/Hollis-Williams/publication/357575151_The_Mathematics_of_Mazes/links/640741b45749505945722b5f/The-Mathematics-of-Mazes.pdf
- [2] <https://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fc-2015-10>
- [3] <https://archive.bridgesmathart.org/2013/bridges2013-361.pdf>

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

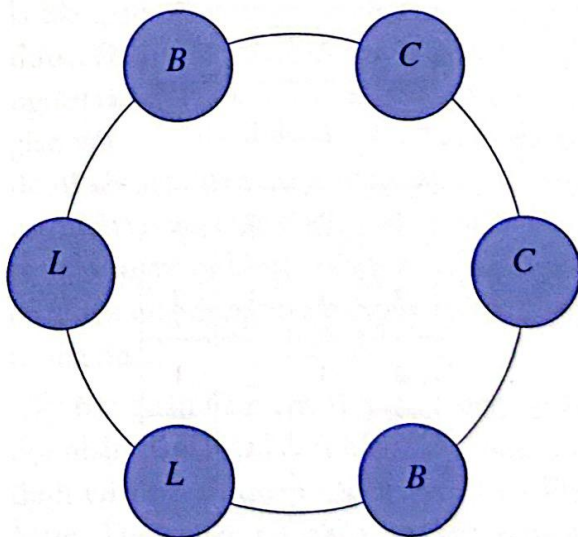
Đi tìm chiếc vòng quý

Ta có hai đối tượng luôn nói thật. Ta gọi đó là các đối tượng Chân thật (trên hình vẽ được ký hiệu bởi chữ cái C).

Có hai đối tượng luôn nói dối. Ta gọi đó là các đối tượng Lừa dối (trên hình vẽ được ký hiệu bởi chữ cái L).

Ngoài ra có hai đối tượng lúc nói dối, lúc nói thật. Ta gọi đó là các đối tượng Bình thường (trên hình vẽ được ký hiệu bởi chữ cái B).

Từ điều kiện đề bài, suy ra ta có cách sắp xếp các đối tượng ngồi quanh bàn tròn như sau:



Do hai đối tượng Chân thật ngồi cạnh nhau, ta cũng phải có hai câu trả lời liên tiếp giống

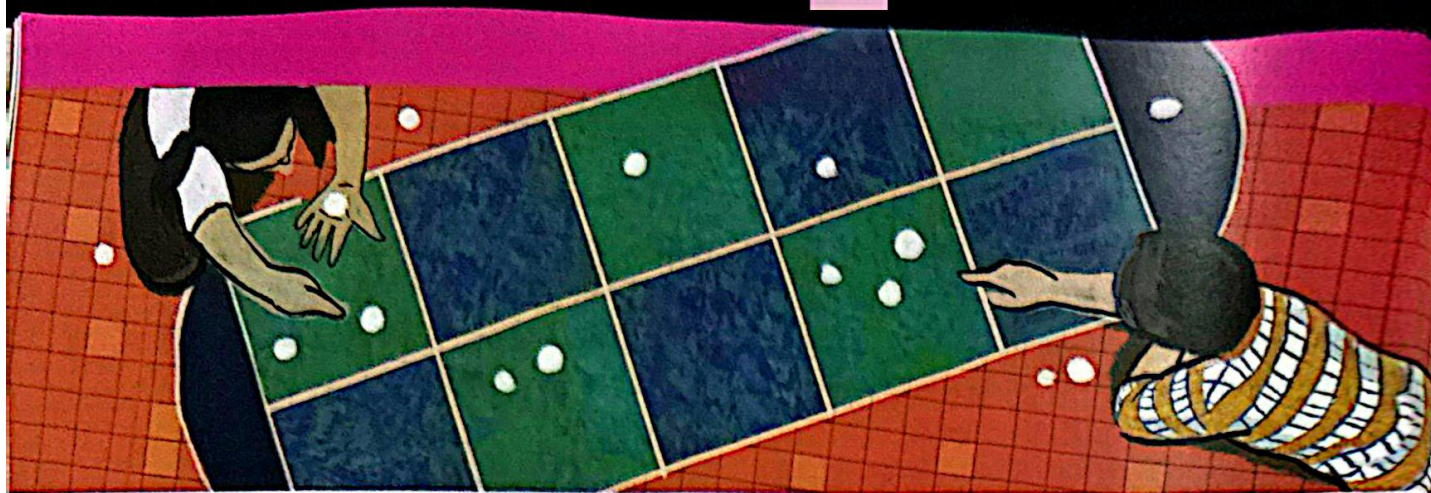
nhau. Tuy nhiên trong ghi chép của Lê Kính không thấy hai câu trả lời như vậy. Vì vậy, các đối tượng Chân thật hoặc là đối tượng thứ nhất và thứ sáu, hoặc là đối tượng thứ năm và thứ sáu.

Nhưng do luôn có một đối tượng Lừa dối ngồi đối diện với mỗi đối tượng Chân thật, nên đối tượng thứ năm không thể là Chân thật (do đối tượng thứ hai trả lời giống hệt anh ta). Như vậy đối tượng thứ nhất và thứ sáu là Chân thật. Điều đó có nghĩa là chiếc vòng vàng đã được giấu trong hang động.

Đố vui

Từ giả thiết 1 suy ra vận động viên (VĐV) mang áo số 1 không về đích đầu tiên. Giả thiết 2 nói rằng VĐV mang áo số 4 không về đích đầu tiên. Cuối cùng, từ giả thiết 3 ta thấy rằng VĐV mang áo số 3 không thể về đích đầu tiên. Do đó VĐV về đích đầu tiên là VĐV mang áo số 2. Giả thiết 3 cho ta biết VĐV mang áo số 3 về đích thứ hai. VĐV mang áo số 1 không thể về đích thứ 3 vì khi đó VĐV mang áo số 4 về đích thứ 4 (trái giả thiết 1). Do đó VĐV mang áo số 1 về đích thứ 4, VĐV mang áo số 4 về đích thứ 3.

Vậy thứ tự về đích của bốn VĐV lọt vào vòng chung kết: VĐV số 2 – VĐV số 3 – VĐV số 4 – VĐV số 1.



“BÀI TOÁN 36 SĨ QUAN” CỦA EULER

NGUYỄN THANH GIANG

Khi học toán ở bậc học Tiểu học các bạn đã được làm quen với bài tập về điền số vào các ô của hình vuông sao cho tổng các số trong các ô ở mọi dòng, mọi cột và trên hai đường chéo là một số S không đổi. Chẳng hạn hình vuông bậc 3 (với 3×3 ô vuông), trong đó $S = 15$ (Hình 1).

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Hình 1.

Người ta đã biết về hình vuông này từ lâu và đặt cho nó cái tên là *ma phương bậc 3*. Ở thế kỷ XV, có nơi người ta vẽ một ma phương treo trong nhà hoặc đeo ở ngực vì nghĩ rằng ma quỷ, bệnh tật đều sợ ma phương! Trong Viện bảo tàng lịch sử Việt Nam có chiếc chóc gốm men do những người thợ gốm Bát Tràng chế ra trên đó có bảng vuông thể hiện các số bằng các chấm tròn. Điều kỳ diệu của bảng số này là: các số $1, 2, 3, \dots, 8, 9$ được sắp xếp thành ma phương bậc ba.

Có một loại hình vuông khác gần gũi với ma phương là *hình vuông latin*. Hình vuông latin bậc n có $n \times n$ (n dòng, n cột), mỗi ô viết một số từ 1 đến n , sao cho ở mỗi dòng, mỗi cột đều có đủ cả n số, mỗi số xuất hiện

đúng một lần. Hình 2 và hình 3 là hai hình vuông latin bậc 4 (Mỗi dòng, mỗi cột có đủ bốn số từ 1 đến 4). Hình 3 cũng là một ma phương. Hai hình vuông latin này có tính chất đặc biệt đó là: Nếu chồng hình vuông này lên hình vuông kia thì ở mỗi ô ta có một cặp số (sắp thứ tự) và tất cả các cặp số đó đều khác nhau (Hình 4). Hai hình vuông latin như vậy gọi là *hai hình vuông latin trực giao*.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

Hình 2.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Hình 3.

Bài toán tìm các hình vuông latin trực giao được nhà toán học Euler đặt ra đầu tiên, dưới

¹ Phó Hiệu trưởng Trường THPT Chuyên Hưng Yên.

dạng bài toán: “Có 36 sĩ quan với 6 cấp bậc khác nhau và thuộc 6 binh chủng khác nhau (mỗi binh chủng có 6 sĩ quan với đúng 6 cấp bậc khác nhau). Hãy xếp các sĩ quan đó thành 6 hàng, sao cho ở bất kỳ hàng ngang hay hàng dọc nào cũng có các sĩ quan thuộc đủ các cấp bậc và đủ các binh chủng.”

(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)	(4, 4)
(2, 3)	(1, 4)	(4, 1)	(3, 2)
(3, 4)	(4, 3)	(1, 2)	(2, 1)
(4, 2)	(3, 1)	(2, 4)	(1, 3)

Hình 4.

Đây chính là bài toán tìm các hình vuông latin trực giao. Euler không giải được bài toán này. Ông không tìm được cặp hình vuông latin trực giao bậc 6. Nhưng ông đã chứng minh được rằng bài toán có lời giải với mọi n lẻ và với n chẵn là bội của 4. Lúc bấy giờ ông dự đoán bài toán không có lời giải với n có dạng $4k + 2$. Năm 1901 người ta chứng minh được bài toán không có lời giải với $n = 6$, tương ứng với $k = 1$, nghĩa là bài toán 36 sĩ quan của Euler không giải được. Đến năm 1959, nhờ máy tính điện tử, người ta tìm được các hình vuông latin trực giao với $n = 10$, rồi $n = 14, 18, 22$, và sau đó đã chứng minh được rằng tồn tại những cặp hình vuông latin trực giao với mọi n khác 6. Lý thuyết về hình vuông latin trực giao có nhiều ứng dụng trong thống kê, lý thuyết thông tin, ...

Cấp bậc quân hàm của sĩ quan trong Quân đội nhân dân Việt Nam hiện nay được quy định tại Luật Sĩ quan Quân đội nhân dân Việt Nam. Theo Điều 10, Điều 11 Luật Sĩ quan Quân đội nhân dân Việt Nam, cấp bậc quân hàm của sĩ quan gồm 3 cấp, 12 bậc:

Cấp tướng có bốn bậc: Đại tướng; Thượng tướng, Đô đốc Hải quân; Trung tướng, Phó

đô đốc Hải quân; Thiếu tướng, Chuẩn Đô đốc Hải quân.

Cấp tá có bốn bậc: Đại tá; Thượng tá; Trung tá; Thiếu tá.

Cấp úy có bốn bậc: Đại úy; Thượng úy; Trung úy; Thiếu úy.

Hình 4 cho ta lời giải của bài toán Euler trong trường hợp có 16 sĩ quan với 4 cấp bậc khác nhau thuộc 4 binh chủng khác nhau. Chẳng hạn các sĩ quan có 4 cấp bậc: Trung tá; Thiếu tá; Đại úy; Thượng úy; Các sĩ quan thuộc 4 binh chủng: Pháo binh, Thông tin, Công binh, Đặc công. Ta gán cho mỗi bậc sĩ quan một số từ 1 đến 4, mỗi binh chủng một số cũng từ 1 đến 4: Trung tá-1, Thiếu tá-2, Đại úy-3, Thượng úy-4 và Pháo binh-1, Thông tin-2, Công binh-3, Đặc công-4. Hình 4 cho một lời giải của bài toán Euler, với (1, 1) là Trung tá pháo binh, (2, 3) là Thiếu tá công binh, (4, 2) là Thượng úy thông tin, ... Hình 5 và Hình 6 là hai cách xếp khác.

(2, 1)	(3, 2)	(4, 3)	(1, 4)
(3, 4)	(2, 3)	(1, 2)	(4, 1)
(1, 3)	(4, 4)	(2, 1)	(3, 2)
(4, 2)	(1, 1)	(3, 4)	(2, 3)

Hình 5.

(1, 1)	(2, 4)	(3, 2)	(4, 3)
(4, 2)	(3, 3)	(2, 1)	(1, 4)
(3, 4)	(4, 1)	(1, 3)	(2, 2)
(2, 3)	(1, 2)	(4, 4)	(3, 1)

Hình 6.

Cuối cùng mời bạn đọc hãy tìm những hình vuông latin trực giao để giải quyết bài toán sau nhé:

Trong đợt dịch COVID có 25 sĩ quan quân đội được điều động từ 5 binh chủng Pháo binh, Tăng thiết giáp, Công binh, Thông tin, Hóa học; mỗi binh chủng 5 sĩ quan với 5 cấp bậc khác nhau Đại tá, Thượng tá, Đại úy, Trung úy, Thiếu úy để thành 5 tổ công tác đến 5 vùng có dịch chỉ huy các chiến sỹ tham gia công tác phòng chống dịch. Mỗi tổ công tác phải có đủ người của 5 binh chủng khác nhau với 5 cấp bậc khác nhau. Trong mỗi tổ công tác người có cấp bậc cao nhất có vai trò chỉ huy trưởng. Hãy lập 5 tổ công tác phòng chống dịch?

Đáp án:

Hình 7 và Hình 8 là hai hình vuông latin trực giao bậc 5

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

Hình 7.

5	1	2	3	4
1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Hình 8.

Ta gán cho mỗi bậc sĩ quan một số từ 1 đến 5, mỗi binh chủng một số cũng từ 1 đến 5: Đại tá—1, Thượng tá—2, Đại úy—3, Trung úy—4, Thiếu úy—5 và Pháo binh—1, Tăng thiết giáp—2, Công binh—3, Thông tin—4, Hoá học—5. Ta có cách lập các Tổ công tác là các thành viên của 5 cột hoặc 5 hàng trong Hình 9 sau đây:

(1,5)	(2,1)	(3,2)	(4,3)	(5,4)
(3,1)	(4,2)	(5,3)	(1,4)	(2,5)
(5,4)	(1,5)	(2,1)	(3,2)	(4,3)
(2,3)	(3,4)	(4,5)	(5,1)	(1,2)
(4,2)	(5,3)	(1,4)	(2,5)	(3,1)

Hình 9.

ĐI TÌM CHIẾC VÒNG QUÝ

GIA DƯƠNG

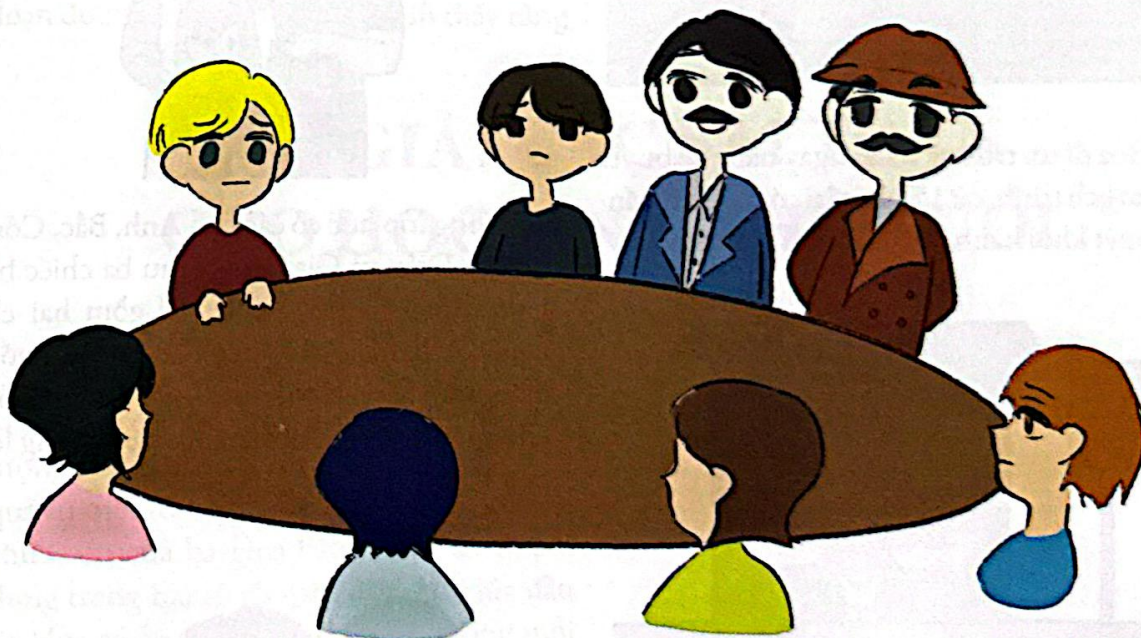
Sở Cảnh sát báo cáo lại với Xuân Phong đã bắt được 6 đối tượng tham gia vụ trộm chiếc vòng vàng quý giá của một nữ diễn viên điện ảnh nổi tiếng. Cùng với thanh tra Lê Kính luôn tận tụy với công việc nghiên cứu tài liệu vụ án, thám tử Xuân Phong nhanh chóng tới ngay phòng tạm giam gặp thẩm vấn các đối tượng. Tại phòng thẩm vấn, 6 đối tượng lo sợ ngồi run rẩy xung quanh một chiếc bàn tròn. Lê Kính rỉ tai Xuân Phong như mọi lần: “Anh biết không, trong số các đối tượng này, chỉ có đúng hai đối tượng luôn nói thật, và họ đang ngồi cạnh nhau ở đây. Ngoài ra có hai đối tượng luôn nói dối, và họ cũng đang ngồi cạnh nhau. Hai đối tượng còn lại thì lúc nói thật, lúc nói dối, và họ không ngồi cạnh nhau”.

Xuân Phong đi vòng quanh bàn và lần lượt

hỏi các đối tượng nơi chúng cất giấu chiếc vòng vàng. Lê Kính khẩn trương ghi chép lại các câu trả lời sau đây của các đối tượng

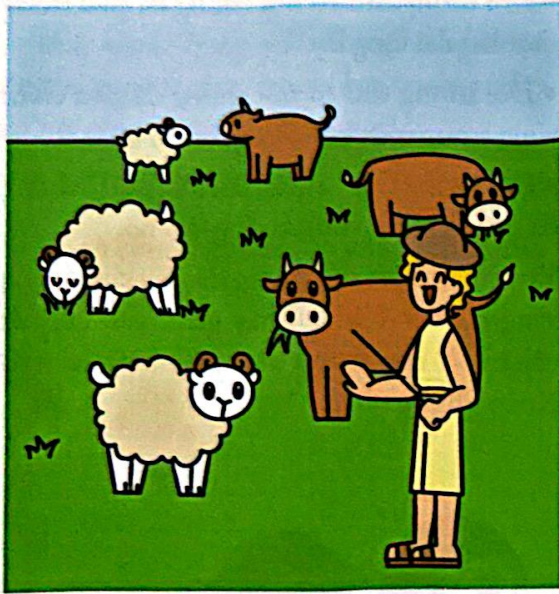
- Đối tượng thứ nhất nói rằng chúng giấu chiếc vòng trong một hang động.
- Đối tượng thứ hai nói rằng chúng đã quẳng chiếc vòng xuống đáy hồ.
- Đối tượng thứ ba nói chúng đã giấu trong một lâu đài lộng lẫy.
- Đối tượng thứ tư nói chúng đã giấu chiếc vòng trong một khu rừng huyền bí.
- Đối tượng thứ năm lại lần nữa nói là chúng đã quẳng chiếc vòng xuống đáy hồ.

Vậy thực sự các đối tượng đã giấu chiếc vòng vàng ở đâu? Các em hãy giải thích chi tiết câu trả lời cho thanh tra Lê Kính và thám tử Xuân Phong nhé.

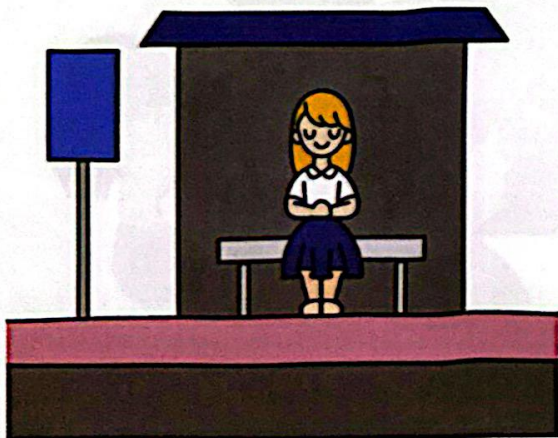


CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Trên cánh đồng xanh có 12 chú bò đang chậm rãi gặm cỏ, bên cạnh là những mục đồng chăn bầy cừu ngoan ngoãn. Số các chú cừu nhiều hơn tổng số tai của các chú bò, nhưng lại ít hơn tổng số chân của chúng. Hỏi có bao nhiêu chú cừu, biết rằng chúng nhiều gấp 12 lần số mục đồng?



2. Hoa đi tới trường hàng ngày bằng xe buýt. Theo lịch trình, cứ 15 phút lại có một chuyến xe buýt khởi hành từ bến xe tới trường.



Hoa luôn đi từ nhà tới bến xe với số phút bỏ ra là không thay đổi. Nếu Hoa ra khỏi nhà

lúc 6h20 thì sẽ tới trường lúc 6h57, còn nếu ra khỏi nhà lúc 6h21 thì sẽ bị muộn học. Giờ học luôn bắt đầu vào lúc 7h00. Hỏi bạn Hoa sẽ đi muộn bao nhiêu phút, nếu như ra khỏi nhà vào lúc 6h23?

3. Nếu viết thêm vào bên phải tuổi của bố một chữ số bằng tuổi của con trai, ta sẽ nhận được một số có ba chữ số. Còn nếu viết thêm vào bên trái tuổi của mẹ một chữ số bằng tuổi của con gái, ta lại nhận được đúng số có ba chữ số đó. Tổng số tuổi của bố và con trai là 39, còn tổng số tuổi của tuổi mẹ và con gái là 30. Em hãy xác định tuổi của mỗi người trong gia đình.



4. Trong lớp học có các bạn Anh, Bắc, Công, Dũng, Diệp và Giang ngồi sau ba chiếc bàn học, mỗi bàn được thiết kế gồm hai chỗ ngồi, kê thành 3 hàng liên tiếp từ trên xuống dưới, mỗi hàng một bàn. Ngoài các bạn đó ra không có bạn học sinh nào khác ở trong lớp. Biết rằng:



• Điệp thường xuyên làm mất tập trung bạn học sinh ngồi trước cậu ta;

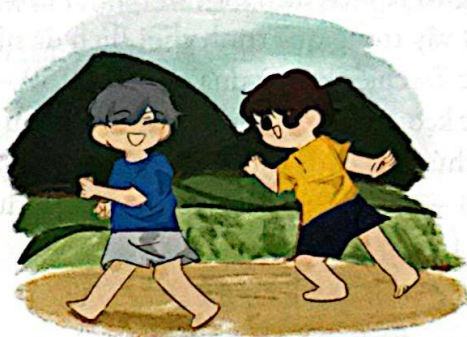
• Bắc nhìn vào gáy của Giang;

• Anh và Dũng là bạn thân của nhau và luôn ngồi cùng một bàn;

Thầy giáo không cho phép Công và Giang ngồi cùng một bàn.

Hỏi có những bạn nào ngồi ở bàn thứ hai?

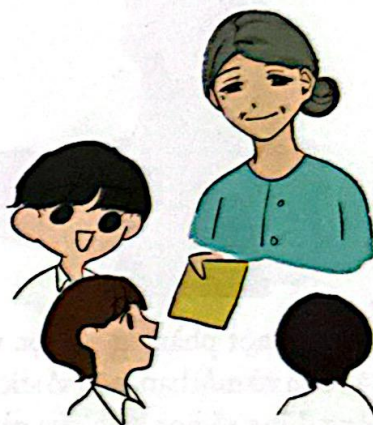
5. Vinh và Việt sống ở trên hai đỉnh núi liền kề nhau và thường đi tới nhà nhau chơi.



Hai bạn đi lên núi với vận tốc 3 km/h, còn khi đi xuống núi với vận tốc 6 km/h, và không có đoạn đường nào nằm ngang. Vinh thấy rằng

mình đi tới nhà Việt mất 2 giờ 30 phút còn lúc đi về mất 3 giờ 30 phút. Hỏi quãng đường nối nhà hai bạn dài bao nhiêu km?

6. Bà nội có ba người cháu trai. Nếu cháu nào học hết lớp 1 thì bà tặng cháu đó 1 cuốn sách, nếu học hết lớp 2 thì tặng 2 cuốn sách, nếu học hết lớp 3 thì tặng 3 cuốn sách v.v... Ba cháu trai cùng xếp ngay ngắn những cuốn sách được tặng trong suốt các năm qua trên giá sách. Hiện giờ trên giá đáng có 23 cuốn sách. Biết rằng có một cháu trai lớn tuổi hơn hai cháu còn lại ít nhất 2 tuổi. Hỏi cháu trai đó giờ đã học hết lớp mấy?



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 6 năm 2024)

1. Bà Hoa có 5 rổ đựng chanh, mỗi rổ có số lượng chanh bằng nhau. Bà đã bán được 36 quả từ mỗi rổ, vì thế tất cả số chanh còn lại chưa bán của bà Hoa bằng đúng số chanh đựng trong hai rổ lúc ban đầu. Hỏi lúc đầu bà Hoa có bao nhiêu quả chanh trong mỗi rổ?

Lời giải. Bà Hoa đã bán được tổng cộng $36 \times 5 = 180$ quả chanh. Đây cũng là số chanh đựng được trong 2 rổ vào lúc ban đầu. Vì vậy, lúc đầu bà Hoa có $180 : 2 = 90$ quả chanh

trong mỗi rổ.

Đáp số: 90.



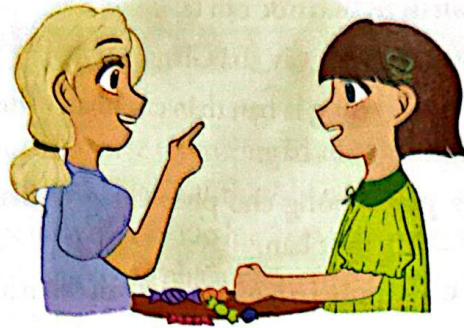
2. Cô giáo phát một số sách giáo khoa cho học sinh trong lớp. Một nửa số học sinh được cô phát cho mỗi bạn một cuốn sách giáo khoa. Một phần tư số học sinh được cô phát 2 cuốn cho mỗi bạn, còn một phần tư số học sinh còn lại mỗi bạn được nhận 4 cuốn. Cô giáo lại muốn dán lên mỗi cuốn sách giáo khoa mà các em học sinh được nhận 1 chiếc sticker hình logo của nhà trường. Hỏi trong lớp có tất cả bao nhiêu học sinh nếu cô giáo cần phải dán đúng 24 chiếc sticker?



Lời giải. Vì một phần tư số học sinh được nhận 4 cuốn vở mỗi bạn, nên số sticker cần để dán bằng đúng số học sinh của cả lớp. Hơn nữa, do một nửa số học sinh được nhận 1 cuốn vở mỗi bạn, nên số sticker cần để dán bằng một nửa số học sinh của cả lớp. Cuối cùng, một phần tư số học sinh còn lại được nhận 2 cuốn vở mỗi bạn, nên cũng cần số sticker bằng đúng một nửa số học sinh của cả lớp. Vậy số sticker cần dùng gấp hai lần số học sinh trong lớp, tức là có tất cả 12 bạn học sinh.

Đáp số: 12.

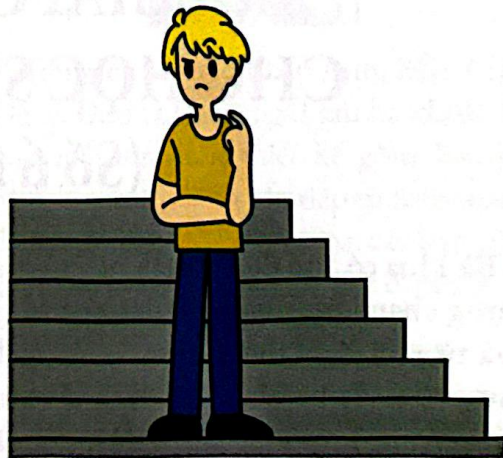
3. Hai bạn An và Bích cùng tham gia một trò chơi. An sẽ đưa ra một số câu hỏi dành cho Bích. Nếu Bích trả lời đúng một câu hỏi nào đó thì An lại đưa cho Bích 7 chiếc kẹo. Còn nếu Bích trả lời sai một câu hỏi nào đó, thì Bích phải đưa An 3 chiếc kẹo. Sau khi An đưa ra 50 câu hỏi, thì số kẹo của mỗi bạn bằng đúng số kẹo mà mỗi bạn đã có lúc bắt đầu trò chơi. Hỏi Bích đã trả lời sai bao nhiêu câu hỏi?



Lời giải. Giả sử Bích trả lời đúng a câu hỏi, có nghĩa là Bích đã trả lời sai $50 - a$ câu hỏi. Như vậy trong quá trình chơi Bích đã nhận được $7a$ chiếc kẹo và đưa cho An $3(50 - a)$ chiếc kẹo. Do tổng số kẹo của mỗi bạn sau khi kết thúc trò chơi không thay đổi nên $7a = 3(50 - a)$. Giải phương trình ta nhận được $a = 15$.

Trả lời: Bích đã trả lời sai 35 câu hỏi.

4. Đức đang đứng trên một bậc của cầu thang và chợt nhận thấy rằng số bậc thang ở phía trên cậu ta bằng đúng số bậc thang ở phía dưới cậu ta. Đức lại tiếp tục đi 7 bậc lên trên và đi 15 bậc xuống dưới. Kết quả là Đức đứng ở bậc thang thứ 8 (tính từ dưới lên). Hỏi cầu thang đó có bao nhiêu bậc?



Lời giải. Do cuối cùng Đức đứng ở bậc thang thứ 8, nên trước đó Đức đã đứng ở bậc thứ $8 + 15 = 23$. Để đến được bậc thứ 23, Đức đã phải đi lên 7 bậc, có nghĩa là lúc đầu Đức đứng ở bậc thứ $23 - 7 = 16$. Như vậy bậc thang thứ 16 nằm ở chính giữa cầu thang.

Suy ra bậc thang có tổng cộng $(16 - 1) \times 2 + 1 = 31$ bậc.

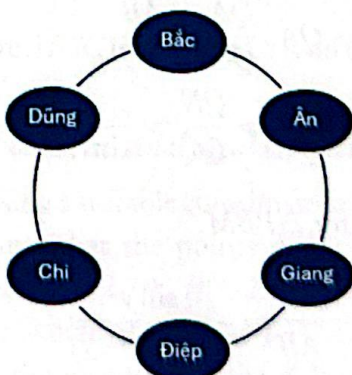
Đáp số: 31.

5. Sáu bạn học sinh Ân, Bắc, Chi, Dũng, Điệp, Giang xếp thành vòng tròn trong một buổi tập văn nghệ. Biết rằng

- Điệp đứng cạnh Chi và về phía tay phải của Chi;
 - Dũng đứng về phía đối diện với Giang;
 - Giang đứng cạnh Điệp;
 - Ân và Dũng không muốn đứng cạnh nhau.
- Hỏi bạn nào đứng cạnh Bắc?



Lời giải. Từ khẳng định thứ nhất và thứ ba suy ra Chi, Điệp và Giang đứng liền nhau theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ. Do trong vòng tròn có đúng 6 người, nên Dũng đứng đối diện với Giang, tức là bên tay trái của Chi. Ta chỉ còn có Ân và Bắc. Do Ân và Dũng không đứng cạnh nhau, nên Bắc phải đứng cạnh Dũng về phía tay trái, còn ở bên trái của Bắc phải là Ân. Ta nhận được cách xếp sau:



Trả lời: Bên cạnh Bắc là Ân và Dũng.

6. Có 3 chiếc hộp rỗng xếp thành hàng ngang và được dán nhãn là A, B, C (theo thứ tự từ trái qua phải). Bé Tít bỏ lần lượt từng chiếc kẹo vào các hộp theo thứ tự: $A, B, C, B, A, B, C, B, A, \dots$ Tít sẽ dừng lại nếu hộp B có đúng 13 chiếc kẹo. Hỏi trong hai hộp A và C , hộp nào sẽ có nhiều kẹo hơn? Em hãy giải thích lập luận của mình.



Lời giải. Ta chia nhỏ việc đặt kẹo của Tít thành từng cặp như sau:

- Tít đặt kẹo vào hộp A, B , mỗi hộp một chiếc;
- Tít đặt kẹo vào hộp C, B , mỗi hộp một chiếc;
- Tít đặt kẹo vào hộp A, B , mỗi hộp một chiếc;
- Tít đặt kẹo vào hộp C, B , mỗi hộp một chiếc;

...

Cứ mỗi một cặp hành động như vậy đều có kết thúc là Tít sẽ đặt 1 chiếc kẹo vào hộp B . Suy ra có đúng 13 cặp hành động sẽ được thực hiện. Điều này có nghĩa trong hộp A có 7 chiếc kẹo, còn trong hộp C có 6 chiếc kẹo (do 13 là số lẻ).

Trả lời: Hộp A có nhiều hơn.



EIGHT WAYS TO PROVE - Part II

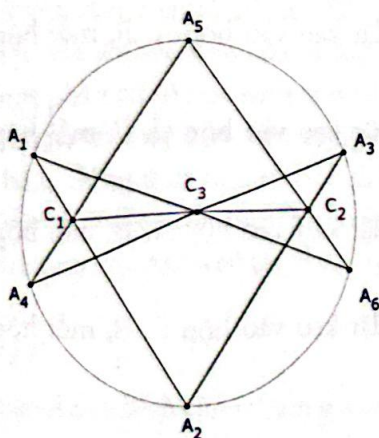
NGHIA DOAN¹

This article is the second part of the series on explore different ways to prove the same geometric problem.

Example (IMO 2014). Let P and Q be on segment BC of an acute triangle ABC such that $\angle PAB = \angle BCA$, $\angle CAQ = \angle ABC$. Let M and N be points on lines AP and AQ , respectively, such that P and Q are midpoints of AM and AN , respectively. Prove that the intersection S of BM and CN is on the circumcircle of $\triangle ABC$.

A converse of Pascal's Theorem.

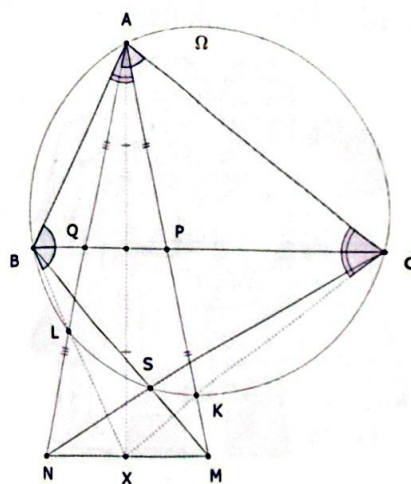
Let $P = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ be a hexagon, $C_1 = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $C_2 = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $C_3 = A_3A_4 \cap A_6A_1$. If C_1, C_2, C_3 are colinear and A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 lie on a circle then A_6 also lies on the same circle.



5th proof based on Pascal's Theorem.

Let Ω denote the circumcircle of ABC . Let points $L = \Omega \cap AN$, $K = \Omega \cap AM$. Since $\angle LBC = \angle LAC = \angle CBA$ and $\angle KCB = \angle KAB = \angle BCA$, thus $X = BL \cap CK$ is the image of A by the reflection over the line BC .

Since Q and P are midpoints of AN and AM , so X must be on NM . Now apply Converse of Pascal's theorem to $P = ALBSCK$, then since $N = AL \cap SC$, $X = LB \cap CK$, and $M = BS \cap KA$ are collinear we imply that $ALBSCK$ is cyclic. Therefore S is on the circle (ABC) .



6th proof based on the Law of Sines.

First $\angle PAB = \angle BCA = \angle C$, $\angle CAQ = \angle ABC = \angle B$. Thus $\triangle PBA \sim \triangle QAC \sim \triangle ABC$.

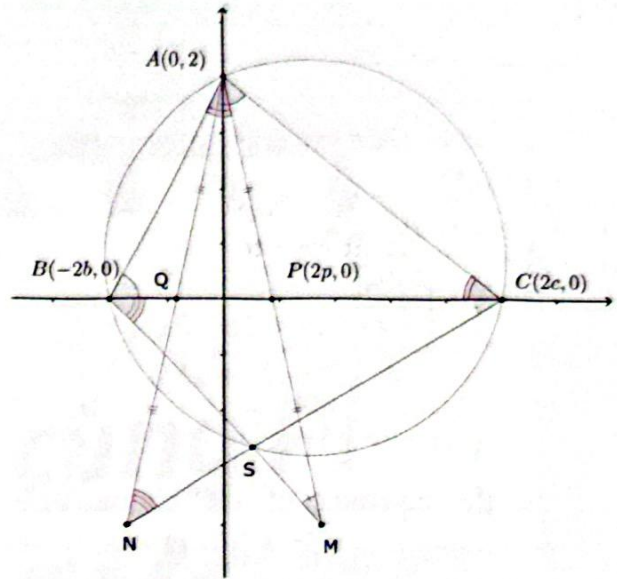
By the Law of Sines for $\triangle QCN$, and note that $\angle QNC = \angle AQC - x = \angle A - x$,

$$\begin{aligned} \frac{QN}{QC} &= \frac{\sin \angle QCN}{\sin \angle QNC} = \frac{\sin x}{\sin(\angle A - x)}, \\ QN &= QA, \frac{QA}{QC} = \frac{AB}{AC} \\ \Rightarrow \frac{AB}{AC} &= \frac{QA}{QC} = \frac{QN}{QC} = \frac{\sin x}{\sin(\angle A - x)} \quad (1) \end{aligned}$$

Similarly for $\triangle PBM$,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin y}{\sin(\angle A - y)} \quad (2)$$

¹Ottawa, Canada.


$$\begin{aligned}\cot B &= \frac{OB}{OA} = b, \cot C = c, \\ \cot A &= \cot(180^\circ - B - C) = -\cot(B + C) \\ &= \frac{1 - bc}{b + c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{PO}{AO} &= \cot A \Rightarrow p = \cot \angle APB = \frac{1-bc}{b+c}, \\ \Rightarrow P\left(\frac{2(1-bc)}{b+c}, 0\right), Q\left(\frac{-2(1-bc)}{b+c}, 0\right), \\ P, Q &\text{ are midpoints of } AM, AN \\ \Rightarrow M\left(\frac{4(1-bc)}{b+c}, -2\right), N\left(\frac{-4(1-bc)}{b+c}, -2\right). \end{aligned}$$

The slope of line BM is $\frac{-2-0}{\frac{4(1-bc)}{b+c} - (-2b)} = -\frac{b+c}{b^2-bc+2}$. The equation of line BM is

$$\Rightarrow y = -\frac{b+c}{b^2-bc+2}x + \frac{2b(b^2-bc+2)}{b^2-bc+2}.$$

Let D be the circumcentre of (ABC) . $D_x = \frac{1}{2}(B_x + C_x) = \frac{2c + (-2b)}{2} = c - b$. Line AC is $y = -\frac{1}{c}x + 2$. The perpendicular

TẬP 8 – SỐ 10 THÁNG 10/2024

bisector of AC has the slope c and is through $(c, 1)$. Thus, its equation of is $y = cx + (1 - c^2)$. Therefore $D_y = c(c - b) + (1 - c^2) = 1 - bc$. Furthermore, the circumradius of (ABC) is:

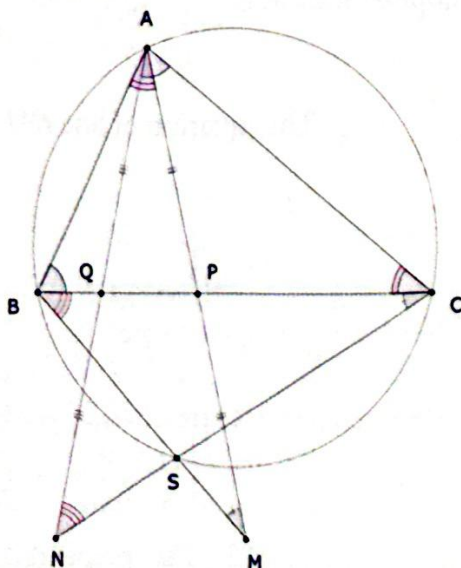
$$\begin{aligned} R &= \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4[ABC]} \\ &= \frac{2\sqrt{1+b^2} \cdot (2c+2b) \cdot 2\sqrt{1+c^2}}{4 \cdot \frac{1}{2}(2)((2c+2b))} \\ &= \sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}. \end{aligned}$$

Thus, the equation of the circumcircle (ABC) is $[x - (c - b)]^2 + [y - (1 - bc)]^2 = (1 + b^2)(1 + c^2)$. It is easy to verify that the intersection of BM with (ABC) is the same as the intersection of CN with (ABC) , which is point S with coordinates symmetric in regards to b and c ,

$$\begin{aligned} S &\left(2 \frac{(c-b)(2-bc)}{(c-b)^2 + 4}, -2 \frac{(c+b)^2}{(c-b)^2 + 4} \right) \\ \Rightarrow S &= BM \cap CN \in (ABC) \end{aligned}$$

8th proof based on Complex Numbers.

Let $X(a, b)$, a point on the complex plane, represent the complex number (still denoted by X) $X = a + ib$. In short, we write X , and interpret it as both complex number and a point on the complex plane (of course depending on what context).



Now, $\triangle ABC \sim \triangle PBA$, ABC is anti-clockwise, while PBA is clockwise, thus they have different orientations, therefore

$$\frac{A-P}{B-P} = \overline{\left(\frac{C-A}{B-A} \right)} \quad (1)$$

Similarly

$$\frac{C-Q}{A-Q} = \overline{\left(\frac{C-A}{B-A} \right)} \quad (2)$$

But P and Q are midpoints of AM and AN , respectively, thus

$$\begin{cases} M-P = -(A-P) \\ N-Q = -(A-Q) \end{cases} \quad (3)$$

From (1), (2), and (3)

$$\frac{M-P}{B-P} = \frac{C-Q}{N-Q}, \text{ thus } \triangle MPB \sim \triangle CQN.$$

From here it is easy to see that $\angle BSC + \angle A = 180^\circ$, thus $BM \cap CN \in (ABC)$.

Vocabulary

Hexagon (dt): lục giác

Cyclic hexagon (dt): lục giác nội tiếp

Intersection point (dt): giao điểm

Circumcircle (dt): đường tròn ngoại tiếp

Circumradius (dt): bán kính đường tròn ngoại tiếp

Circumcentre (dt): tâm đường tròn ngoại tiếp

Similarity (tt): đồng dạng

Collinear points: cộng tuyến

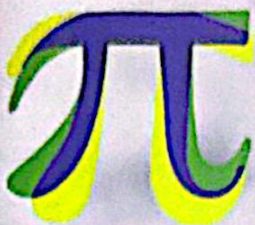
Homothety (dt): phép vị tự

perpendicular (tt): vuông góc

perpendicular bisector: đường trung trực

Slope of a line: hệ số góc hoặc độ dốc

Orientation (dt): định hướng



TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

CHƯƠNG TRÌNH

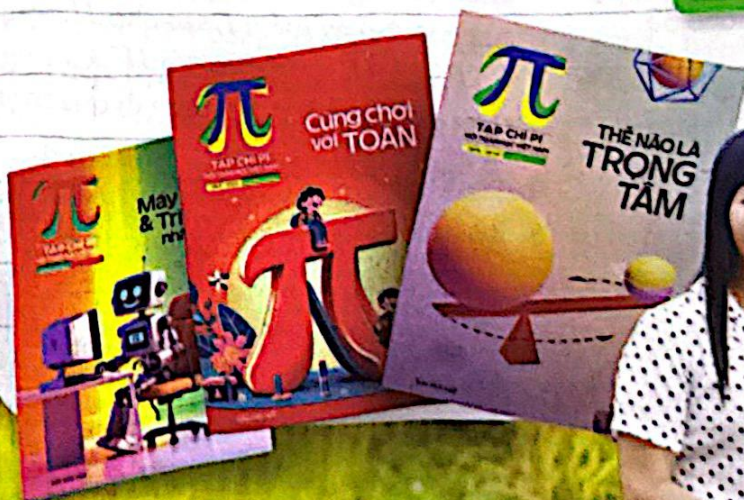
Đồng hành cùng Pi tới **biên cương** và **hải đảo**

Mỗi cuốn Pi bạn đọc đặt mua sẽ góp phần giúp đỡ một bạn học sinh ở vùng sâu vùng xa có điều kiện được đọc Pi.

Danh sách các độc giả tham gia
“Đồng hành cùng Pi”
sẽ được công bố định kỳ trên Pi

QUÉT QR

để tham gia chương trình



Pi của bạn



0243.215.1407



info@pi.edu.vn



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục “Thách thức kỳ này” cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ *B*, *A*, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ *B* không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ *A* không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm LaTeX, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P841–P850: trước ngày 15/11/2024.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P841. (Mức *B*) Hỏi, có bao nhiêu số N có dạng $1a2b3c4d5$, trong đó

$$1 \leq a < b < c < d$$

là các chữ số, sao cho N chia hết cho 33.

Trần Bình, Hà Nội

P842. (Mức *B*) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, n sao cho

$$\frac{a+n}{a!} = \frac{b+n+2}{b!}.$$

Duy Minh, Hà Nội

P843. (Mức *B*) Tìm tất cả các số thực m có tính chất: với x, y là hai số thực bất kỳ thoả mãn $x^2 - xy - y^2 = 1$, thì $4x^2 + xy + y^2 \geq m$.

Nguyễn Đình Vũ, Bắc Ninh

P844. (Mức *B*) Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC . Xét một điểm K di động trên cạnh BC , sao cho K không trùng với chân đường phân giác trong của góc A . Lấy điểm L sao cho JL song song với BC và AL song song với JK . Chứng minh rằng đường thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định.

Nguyễn Đăng Khoa, Hà Nội

P845. (Mức *B*) Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thực. Chứng minh rằng ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là bất đẳng thức đúng:

$$5a \geq 4(b+c), \quad 5b \geq 4(c+a), \quad 5c \geq 4(a+b).$$

Nguyễn Văn Bản, Điện Biên

P846. (Mức B) Cho số nguyên dương n . Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách điền số vào các ô của một bảng ô vuông kích thước $3 \times k$ (bảng gồm 3 hàng và k cột), thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:
 – Mỗi ô được điền một số nguyên không âm;
 – Tổng tất cả các số được điền trong cùng một cột bằng n ;
 – Ở mỗi hàng, mỗi số $0, 1, \dots, n$ được điền ít nhất một lần.

Lưu Tiến Đức, Hà Nội

P847. (Mức A) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & (y+z) \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} \\ & + (z+x) \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}} \\ & + (x+y) \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}} \geq x+y+z. \end{aligned}$$

Nguyễn Việt Hùng, Hà Nội (st)

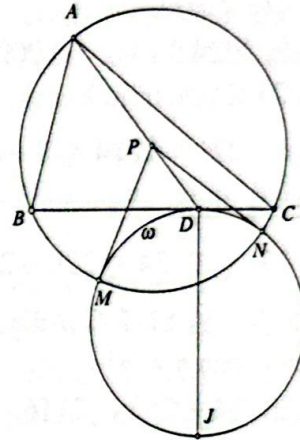
P848. (Mức A) Tìm tất cả cặp hàm số (f, g) với $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn:

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + g(x)$$

với mọi $x, y > 0$.

Trần Nhật Quang, Tp. Hồ Chí Minh

P849. (Mức A) Cho tam giác ABC , (J) là đường tròn bàng tiếp trong góc A . Gọi D là tiếp điểm của (J) và BC . Gọi ω là đường tròn đường kính JD . ω cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm M, N . Giả sử tiếp tuyến tại M và tiếp tuyến tại N của ω cắt nhau tại P . Chứng minh rằng ba điểm A, P, D thẳng hàng.



Đề thi chọn đội tuyển Toán
ĐHSP Hà Nội 2024

P850. (Mức A) Cho các số nguyên dương n, x, y . Chứng minh rằng

$$\sum_{\substack{a, b \in \mathbb{N}^* \\ \gcd(a, b) = 1}} \left\lfloor \frac{n+x+y}{xa+yb} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor} \left(1 + \left\lfloor \frac{n-xi}{y} \right\rfloor \right).$$

Nguyễn Tuấn Anh, Đồng Tháp

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P811. (Mức B) Trên bảng có 23 số nguyên dương liên tiếp. Bạn Pi xóa đi một số, và nhận thấy, tổng các số còn lại bằng 2024. Hỏi bạn Pi đã xóa đi số nào?

Lời giải. Giả sử 23 số nguyên dương liên tiếp có trên bảng là $n, n+1, \dots, n+22$, với n là một số nguyên dương.

Gọi S là tổng của 23 số nêu trên; ta có

$$\begin{aligned} S &= 23n + (1 + 2 + \dots + 22) \\ &= 23n + 253. \end{aligned} \quad (1)$$

Tiếp theo, có thể giải bài toán theo hai cách sau:

• **Cách 1** (của bạn Vũ Hoàng Sơn, lớp 8A, trường THCS Văn Lang, Tp. Việt Trì, tỉnh Phú Thọ).

Giả sử $n+a$, với a là một số tự nhiên thuộc tập hợp $\{0; 1; \dots; 22\}$, là số Pi đã xóa.

Khi đó, theo (1) và giả thiết của bài ra, ta có:

$$2024 = S - (n+a) = 22n + 253 - a.$$

$$\text{Suy ra, } a + 1771 = 22n. \quad (2)$$

Từ đó, vì $22n$ là một số chẵn, chia hết cho 11, nên $a + 1771$ là một số chẵn, chia hết cho 11. Mà 1771 là số lẻ, chia hết cho 11,

nên a là số lẻ, chia hết cho 11. Từ đây, do $a \in \{0; 1; \dots; 22\}$, suy ra $a = 11$. Thế giá trị này của a vào (2), ta tìm được $n = 81$. Do đó

$$n + a = 81 + 11 = 92.$$

Vậy, số Pi đã xóa là 92.

• **Cách 2** (của bạn Đỗ Hoàng Yến Phương, lớp 11T2, trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp).

Theo giả thiết, 2024 là tổng của 2022 số nào đó, trong 2023 số nêu trên. Vì thế

$$S - (n + 22) \leq 2024 \leq S - n. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được:

$$22n + 231 \leq 2024 \leq 22n + 253;$$

suy ra, $80,5 \leq n \leq 81,5$. Từ đây, do là số nguyên dương, nên $n = 81$.

Vì thế, $S = 23 \cdot 81 + 253 = 2116$.

Do đó, số Pi đã xóa là: $2116 - 2024 = 92$.

Bình luận và Nhận xét

1. Hai cách giải trên đây thể hiện hai cách tiếp cận tự nhiên, khi tìm lời giải cho bài đã ra. Một câu hỏi dành cho bạn đọc: Ý tưởng của hai cách tiếp cận đó là gì?

2. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có hai lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

- Mới giải được bài toán trong một trường hợp riêng, do người giải bài đưa ra;
- Thực hiện sai một số tính toán.

Cùng với hai lời giải sai nêu trên, còn có một lời giải không hoàn chỉnh, do người giải bài chưa chứng minh một khẳng định quan trọng trong lời giải.

Nguyễn Khắc Minh

P812. (Mức B) Tìm các số nguyên m , để

$$m^3 + 3m^2 + 2m$$

là một số chính phương.

Lời giải (dựa theo cách giải của một bạn học sinh cấp THCS).

Đặt $A = m^3 + 3m^2 + 2m$.

Theo bài ra, ta cần tìm tất cả các số nguyên m , sao cho A là một số chính phương.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= m(m^2 + 3m + 2) \\ &= m(m + 1)(m + 2). \end{aligned} \quad (*)$$

Từ đó suy ra, nếu $m \in \{-2; -1; 0\}$, thì $A = 0$, là một số chính phương.

Xét $m \notin \{-2; -1; 0\}$.

Khi đó, $m, m + 1, m + 2$ là ba số nguyên khác 0 liên tiếp. Vì thế, ba số đó là ba số nguyên cùng dấu (do với a, b là hai số nguyên trái dấu tùy ý, $|a - b| \geq 2$).

Do đó, nếu m là số nguyên âm thì $m + 1, m + 2$ cũng là các số nguyên âm. Kết hợp điều này với (*), suy ra, A là một số nguyên âm. Vì thế, A không là số chính phương.

Với m là số nguyên dương, do $m + 1, m + 2$ cũng là các số nguyên dương, và do

$$\begin{aligned} (m + 1, m(m + 2)) &= (m + 1, (m + 1)^2 - 1) \\ &= (m + 1, 1) = 1, \end{aligned}$$

nên từ (*) suy ra, A là số chính phương chỉ khi $m(m + 2)$ là số chính phương. Tuy nhiên, điều này không thể có, do

$$m^2 < m(m + 2) < (m + 1)^2,$$

với mọi $m \in \mathbb{N}^*$.

Vì vậy, với mọi $m \in \mathbb{N}^*$, A không là số chính phương.

Vậy, tất cả các số nguyên m thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $m = -2, m = -1$ và $m = 0$.

Bình luận và Nhận xét

1. Ở Lời giải trên, ta đã sử dụng kết quả rất cơ bản dưới đây, liên quan đến số chính phương (kết quả này đã từng được đề cập ở Mục Giải bài kì trước của Tạp chí Pi, các số trước đây):

Kết quả 1. Với a, b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, tích ab là số chính phương khi và chỉ khi cả a và b đều là số chính phương.

Có thể dễ dàng chứng minh kết quả trên, bằng cách sử dụng phân tích chuẩn của một

số nguyên dương. Vì vậy, với các bạn đọc chưa biết kết quả trên, các bạn hãy tự chứng minh kết quả đó.

Kết quả 1* dưới đây là một khái quát hiển nhiên của Kết quả 1:

Kết quả 1*. Cho n là số nguyên tùy ý lớn hơn 1; và cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số nguyên dương tùy ý, đôi một nguyên tố cùng nhau. Khi đó, tích $a_1 a_2 \dots a_n$ là số chính phương khi và chỉ khi a_i là số chính phương, với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Một hệ quả đơn giản của Kết quả 1 là kết quả sau:

Kết quả 2. Tích của ba số nguyên khác 0 liên tiếp tùy ý là một số không chính phương.

Kết quả 2 là một kết quả quen thuộc đối với các học sinh khá, giỏi Toán, được học phần Số học một cách căn cơ, bài bản, ở cấp THCS.

2. Lời giải trên đây cho thấy, có thể coi bài đã ra là một dạng phát biểu khác của Kết quả 2 nêu trên.

3. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, có bốn lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

- Các lập luận trong lời giải vừa thừa, vừa thiếu, không có tính kết nối logic để dẫn đến các khẳng định mang tính then chốt trong lời giải;

- Quan niệm sai rằng, 0 không phải là số chính phương;

- Ngộ nhận rằng, nếu tích ab là số nguyên và a là số nguyên, thì b cũng là số nguyên;

- Ngộ nhận rằng, nếu a, b, c là các số nguyên phân biệt, có ước chung lớn nhất bằng 1, thì tích abc là số chính phương khi và chỉ khi tích đó bằng 0.

($a = 1, b = 3$ và $c = 27$ là một phản ví dụ cho khẳng định vừa nêu trên.)

Lưu Thị Thanh Hà

P813. (Mức B) Có 9 bạn học sinh đứng thành một vòng tròn. Cô giáo muốn phát

cho mỗi bạn một lá cờ, màu xanh hoặc màu đỏ, sao cho không có hai bạn liên tiếp nào cùng cầm cờ đỏ, và không có ba bạn liên tiếp nào cùng cầm cờ xanh. Hỏi cô giáo có bao nhiêu cách phát cờ cho các bạn?

(Hai cách phát cờ được coi là khác nhau, nếu tồn tại một bạn học sinh cầm cờ màu khác nhau ở hai cách đó.)

Lời giải (phỏng theo ý giải của bạn Võ Hải Yến, lớp 12H, trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp).

Bắt đầu từ một bạn học sinh tùy ý, lần lượt theo chiều kim đồng hồ, ký hiệu 9 bạn học sinh bởi $A_1, A_2, \dots, A_9$.

Ký hiệu mỗi bạn học sinh cầm cờ xanh bởi X, và mỗi bạn học sinh cầm cờ đỏ bởi Đ.

Ta gọi một nhóm các bạn đứng liên tiếp nhau theo vòng tròn là một "cụm"; thứ tự của các bạn trong một cụm được tính theo chiều quay của kim đồng hồ.

Để mô tả một cụm, ta sẽ liệt kê liên tiếp các bạn thuộc cụm, lần lượt từ bạn đầu tiên đến bạn cuối cùng. Chẳng hạn, để mô tả cụm gồm các bạn A_2, A_3 ta viết $A_2 A_3$, hay để mô tả cụm gồm ba bạn, bạn đầu tiên cầm cờ đỏ, bạn thứ hai cầm cờ xanh, và bạn cuối cùng cầm cờ đỏ, ta viết ĐXĐ, ...

Hai cụm được gọi là rời nhau, nếu không có học sinh nào thuộc đồng thời hai cụm đó.

Dưới đây, để tránh phải diễn đạt dài dòng, ta gọi mỗi cách phát cờ của cô giáo cho 9 bạn học sinh, đảm bảo thỏa mãn các yêu cầu của đề bài, là một lượt phát cờ.

Nhận thấy, sau một lượt phát cờ tùy ý của cô giáo, trên vòng tròn sẽ hình thành các cụm ĐXX, hoặc ĐX, đôi một rời nhau.

Do 9 và 3 không chia hết cho 2, nên sau một lượt phát cờ tùy ý của cô giáo, chỉ có thể xảy ra một trong hai bố cục sau:

- Bố cục 1: Trên vòng tròn có ba cụm ĐXX đôi một rời nhau;

- Bố cục 2: Trên vòng tròn có một cụm ĐXX và ba cụm ĐX, đôi một rời nhau.

Như vậy, ứng với một cách phát cờ của cô giáo, ta sẽ có một cách phân chia 9 bạn thành ba cụm đôi một rời nhau, mỗi cụm có ba bạn, hoặc thành bốn cụm đôi một rời nhau, gồm một cụm ba bạn và ba cụm hai bạn. Ngược lại, ứng với mỗi cách phân chia vừa nêu, ta sẽ có một cách phát cờ của cô giáo.

Do đó, số cách phát cờ của cô giáo chính bằng số cách phân chia nói trên. (1)

Nhận thấy, có ba cách phân chia 9 bạn thành ba cụm đôi một rời nhau, mỗi cụm có ba bạn; đó là:

- Cách 1: $A_1A_2A_3, A_4A_5A_6, A_7A_8A_9$;
- Cách 2: $A_2A_3A_4, A_5A_6A_7, A_8A_9A_1$;
- Cách 3: $A_3A_4A_5, A_6A_7A_8, A_9A_1A_2$.

Tiếp theo, để phân chia 9 bạn thành bốn cụm đôi một rời nhau, gồm một cụm ba bạn và ba cụm hai bạn, ta thực hiện liên tiếp hai bước sau:

- Bước 1: Tạo ra một cụm ba bạn;
- Bước 2: Bắt đầu từ bạn đứng ngay bên trái bạn cuối cùng của cụm ba bạn nêu trên, lần lượt, theo chiều quay của kim đồng hồ, tạo ra các cụm hai bạn, đôi một rời nhau. (Ta quy ước tất cả các bạn đều đứng quay mặt vào tâm của vòng tròn.)

Rõ ràng, ứng với một cách thực hiện bước 1, ta có đúng một cách thực hiện bước 2. Do vậy, số cách thực hiện liên tiếp hai bước nêu trên chính bằng số cách thực hiện bước 1. (2)

Hiển nhiên, số cách thực hiện bước 1 chính bằng số cách chọn bạn đầu tiên của cụm ba bạn. Vì thế, do có 9 bạn, và bạn nào cũng có thể được chọn làm bạn đầu tiên của cụm ba bạn, nên có 9 cách thực hiện bước 1. (3)

Từ (2) và (3) suy ra, có tất cả 9 cách phân chia 9 bạn thành bốn cụm đôi một rời nhau, gồm một cụm ba bạn và ba cụm hai bạn.

Như vậy, có tất cả $3 + 9 = 12$ cách phân chia 9 bạn thành ba cụm đôi một rời nhau, mỗi cụm có ba bạn, hoặc thành bốn cụm đôi một

rời nhau, gồm một cụm ba bạn và ba cụm hai bạn.

Vì vậy, theo (1), cô giáo có tất cả 12 cách phát cờ cho 9 bạn.

Bình luận và Nhận xét

1. Để tạo điều kiện thuận lợi cho việc theo dõi lời giải của đồng đảo đối tượng bạn đọc, đồng thời nhằm giúp các bạn học sinh THCS hình thành, củng cố tư duy “đếm” và phương pháp suy luận trong việc “đếm”, Lời giải trên đây đã được trình bày tỉ mỉ, chi tiết hơn mức cần thiết.

2. Trong số các bạn đã gửi lời giải cho bài toán tới Tạp chí, có một bạn đã giải bài ra bằng cách liệt kê tất cả các cách phát cờ của cô giáo. Do trong lời giải vừa nêu, các cách phát cờ được mô tả một cách rất thiếu rõ ràng, nên lời giải đó không được coi là lời giải đúng.

Nguyễn Khắc Minh

P814. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực dương, thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + 1) \\ & \geq \frac{1}{(a + \sqrt{a^2 + 1})^2} + \frac{1}{(b + \sqrt{b^2 + 1})^2} \\ & + \frac{1}{(c + \sqrt{c^2 + 1})^2} \geq 1. \end{aligned}$$

Lời giải (dựa theo ý giải của hầu hết các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc).

Để thấy, $\sqrt{a^2 + 1} \neq a$ do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + \sqrt{a^2 + 1}} &= \frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{(\sqrt{a^2 + 1} + a)(\sqrt{a^2 + 1} - a)} \\ &= \sqrt{a^2 + 1} - a; \end{aligned}$$

suy ra

$$\frac{1}{(a + \sqrt{a^2 + 1})^2} = (\sqrt{a^2 + 1} - a)^2. \quad (1)$$

Do $ab + bc + ca = 1$, nên

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + 1} &= \sqrt{a^2 + ab + bc + ca} \\ &= \sqrt{(a+b)(a+c)}.\end{aligned}$$

Vì thế, với lưu ý $a, b, c > 0$, theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz và bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân, ta có:

$$\begin{aligned}a + \sqrt{bc} &\leq \sqrt{a^2 + 1} \leq \frac{(a+b) + (a+c)}{2} \\ &= a + \frac{b+c}{2};\end{aligned}$$

suy ra

$$0 < \sqrt{bc} \leq \sqrt{a^2 + 1} - a \leq \frac{b+c}{2}.$$

Do đó

$$bc \leq (\sqrt{a^2 + 1} - a)^2 \leq \frac{(b+c)^2}{4}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$bc \leq \frac{1}{(a + \sqrt{a^2 + 1})^2} \leq \frac{(b+c)^2}{4}. \quad (3)$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$ca \leq \frac{1}{(b + \sqrt{b^2 + 1})^2} \leq \frac{(c+a)^2}{4}, \quad (4)$$

$$ab \leq \frac{1}{(c + \sqrt{c^2 + 1})^2} \leq \frac{(a+b)^2}{4}, \quad (5)$$

Cộng các bất đẳng thức kép (3), (4), (5), về theo vế, và sử dụng giả thiết $ab + bc + ca = 1$, ta thu được bất đẳng thức kép cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

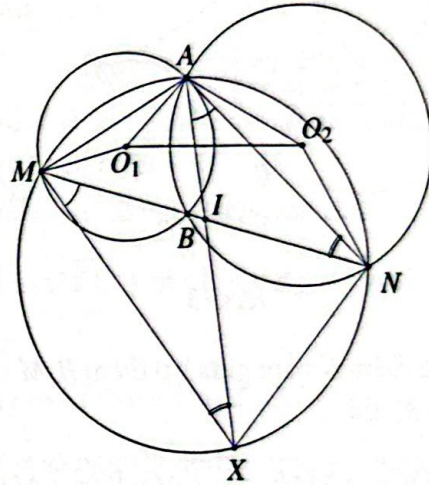
1. Bài đã ra là một bài toán rất cơ bản của phần Bất đẳng thức.
2. Tất cả các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Võ Quốc Bá Cẩn

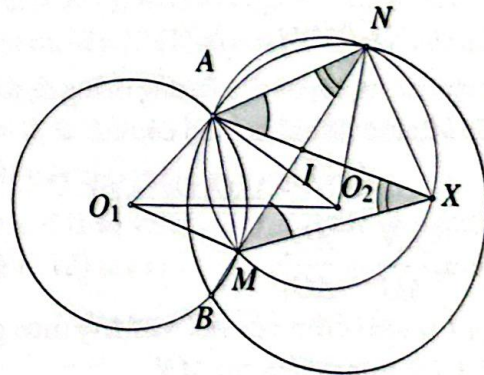
P815. (Mức B) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B . Qua B , kẻ một đường

thẳng d bất kỳ, cắt (O_1) và (O_2) , tương ứng, tại các điểm M và N (d không trùng với AB , và M, N khác B). Đường thẳng, đi qua A và trung điểm của MN , cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm thứ hai X , khác A . Chứng minh rằng, khi d thay đổi, nhưng luôn đi qua B và không trùng với AB , thì $\frac{XM}{XN}$ không đổi.

Lời giải (dựa theo Đáp án do BBT Tạp chí cung cấp).



Hình 1.



Hình 2.

Do (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B , nên O_1O_2 là trung trực của AB . Do đó:

– Nếu điểm B nằm giữa hai điểm M, N (xem Hình 1), thì

$$\begin{aligned}\angle AMN &= \angle AMB = \frac{1}{2} \angle AO_1B = \angle AO_1O_2; \\ \angle ANM &= \angle ANB = \frac{1}{2} \angle AO_2B = \angle AO_2O_1.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Ở Lời giải trên, ta đã sử dụng (không chứng minh) tính chất rất cơ bản và rất đơn giản dưới đây của ước chung lớn nhất:

“Cho n là một số nguyên tùy ý, lớn hơn 2, và cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số nguyên tùy ý. Khi đó

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) \\ = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, (a_{n-1}, a_n)).”$$

Với các bạn đọc chưa biết tính chất nêu trên, các bạn hãy tự chứng minh tính chất đó, xem như một bài tập về nhà.

(Gợi ý: Sử dụng định nghĩa ước chung lớn nhất của các số nguyên.)

2. Tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Nguyễn Khắc Minh

Lời Tòa soạn. Do sơ suất kỹ thuật, trong đề bài của bài P817, đã in ở Mục Thách thức kỳ này của Tạp chí Pi, số 6.2024 (trang 27), đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ đã bị in nhầm thành

$$P(x) = x^3 + ax + bx - 1.$$

Tạp chí chân thành cáo lỗi cùng tất cả bạn đọc!

Bài P817, như đã in nhầm, là một bài toán giải được, và không tầm thường.

Tạp chí đã nhận được các lời giải của bạn đọc cho bài P817 đã in.

Cùng với đó, Tạp chí cũng đã nhận được các lời giải của bạn đọc cho phương án nguyên bản của bài P817.

Vì những điều nêu trên, Ban biên tập Tạp chí quyết định:

– Công bố lời giải của cả hai bài toán, bài P817 như đã in và bài P817 sau sửa lỗi in ấn (P817*).

– Công nhận các lời giải của bạn đọc cho bài P817* là lời giải hợp lệ.

P817. (Mức A) Tìm tất cả các số nguyên dương d , sao cho tồn tại các số nguyên a, b , để $1 + \sqrt{d}$ là nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^3 + ax + bx - 1.$$

Lời giải (của người chấm bài).

Vì mỗi số nguyên đều có thể viết dưới dạng tổng của hai số nguyên, nên bài đã ra có thể được phát biểu dưới dạng tương đương sau:

“Tìm tất cả các số nguyên dương d , sao cho tồn tại số nguyên m , để $1 + \sqrt{d}$ là nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^3 + mx - 1.”$$

Giả sử d là số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu vừa nêu trên.

Khi đó, sẽ có số nguyên m , sao cho

$$(1 + \sqrt{d})^3 + m(1 + \sqrt{d}) - 1 = 0. \quad (1)$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (d+m+3)\sqrt{d} + 3d+m = 0. \quad (2)$$

Do d là số nguyên dương, nên $\sqrt{d}$ hoặc là số nguyên dương, hoặc là số vô tỷ.

Nếu $\sqrt{d}$ là số nguyên dương, thì $1 + \sqrt{d}$ cũng là số nguyên dương. Vì thế, do m là số nguyên, nên từ (1) suy ra $1 + \sqrt{d}$ là một ước dương của 1. Do đó, $1 + \sqrt{d} = 1$; suy ra, $d = 0$, là điều vô lý (vì d là số dương). Điều vô lý này cho thấy, $\sqrt{d}$ là số vô tỷ.

Do $\sqrt{d}$ là số vô tỷ, và m, d là các số nguyên, nên từ (2) suy ra

$$d + m + 3 = 3d + m = 0.$$

Dẫn tới, $d = \frac{3}{2}$ là điều vô lý (do d là số nguyên). Điều vô lý này cho thấy, không có số nguyên dương d thỏa mãn yêu cầu đề bài.

P817*. (Mức A) Tìm tất cả các số nguyên dương d , sao cho tồn tại các số nguyên a, b , để $1 + \sqrt{d}$ là nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1.$$

Lời giải (của người chấm bài).

• Giả sử d là số nguyên dương thỏa mãn yêu

cầu đề bài.

Khi đó, sẽ có các số nguyên a, b , sao cho

$$\begin{aligned} & (1 + \sqrt{d})^3 + a(1 + \sqrt{d})^2 \\ & + b(1 + \sqrt{d}) - 1 = 0. \end{aligned} \quad (1^*)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (1^*) \Leftrightarrow & (d + 2a + b + 3)\sqrt{d} + (a + 3)d \\ & + a + b = 0. \end{aligned} \quad (2^*)$$

Do d là số nguyên dương, nên $\sqrt{d}$ hoặc là số nguyên dương, hoặc là số vô tỷ.

Nếu $\sqrt{d}$ là số nguyên dương, thì $1 + \sqrt{d}$ cũng là số nguyên dương. Vì thế, do a, b là số nguyên, nên từ (1^*) suy ra $1 + \sqrt{d}$ là một ước dương của 1. Do đó, $1 + \sqrt{d} = 1$ suy ra, $d = 0$, là điều vô lý (vì d là số dương). Điều vô lý này cho thấy, $\sqrt{d}$ là số vô tỷ.

Do $\sqrt{d}$ là số vô tỷ, và a, b, d là các số nguyên, nên từ (2^*) suy ra

$$d + 2a + b + 3 = (a + 3)d + a + b = 0.$$

Dẫn tới

$$\begin{aligned} & (a + 2)d - a - 3 = 0, \text{ hay} \\ & (a + 2)d = a + 3. \end{aligned} \quad (3^*)$$

Từ (3^*) , hiển nhiên suy ra, $a \neq -2$ (vì nếu $a = -2$ thì sẽ có $0 = 1$, là điều vô lý). Vì vậy, từ (3^*) ta có:

$$d = \frac{a + 3}{a + 2} = 1 + \frac{1}{a + 2}.$$

Từ đó, do d là số nguyên dương và a là số nguyên, suy ra, $a + 2$ là ước của 1 và $\frac{1}{a + 2} \neq -1$. Do đó, $a + 2 = 1$; suy ra, $d = 2$.

• Ngược lại, với $d = 2$, dễ thấy, bộ ba số $d = 2, a = -1, b = -3$ thỏa mãn (2^*) ; và do đó, bộ ba số này thỏa mãn (1^*) . Vì vậy, $1 + \sqrt{2}$ là nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1.$$

• Vậy, $d = 2$ là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Trong các lời giải trên, ta đã sử dụng

(không chứng minh) kết quả rất cơ bản và quen biết sau:

“Với n là số nguyên dương, $\sqrt{n}$ hoặc là số nguyên dương, hoặc là số vô tỷ.”

Với các bạn đọc chưa biết kết quả nêu trên, các bạn hãy tự chứng minh kết quả đó, xem như một bài tập về nhà.

(Gợi ý: Sử dụng phương pháp phản chứng.)

2. Các lời giải trên đây cho thấy, cả hai bài toán, P817 và P817*, đều là các bài tập ở mức cơ bản, rất phù hợp cho việc bồi dưỡng học sinh khá, giỏi Toán các lớp cuối cấp THCS.

3. Tất cả các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc (cho bài P817, cũng như cho bài P817*) đều là lời giải đúng. Tuy nhiên, hầu hết các lời giải trong số này đều dài dòng, cồng kềnh, khá phức tạp.

Nguyễn Khắc Minh

P818. (Mức A) Cho các số thực không âm a, b, c , thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq 2\sqrt{a+b+c}.$$

Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Vũ Hoàng Sơn, lớp 8A, trường THCS Văn Lang, Tp. Việt Trì, tỉnh Phú Thọ, và bạn Đỗ Viết Hoàng Long, lớp 11A, trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước).

Vì $a, b, c \geq 0$, nên

$$a + b + c \geq 0, \quad (1)$$

$$(a + b)(b + c) \geq 0, \quad (2)$$

$$ab + bc + ca \geq 0. \quad (3)$$

Từ (3), suy ra

$$\begin{aligned} & (a + b)(b + c) \\ & = b^2 + ab + bc + ca \geq b^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (2) và (4), với lưu ý $b \geq 0$, suy ra

$$\sqrt{(a + b)(b + c)} \geq b.$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\sqrt{(b + c)(c + a)} \geq c \text{ và } \sqrt{(c + a)(a + b)} \geq a.$$

Do đó

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})^2 \\ &= 2(a+b+c + \sqrt{(a+b)(b+c)} \\ & \quad + \sqrt{(b+c)(c+a)} + \sqrt{(c+a)(a+b)}) \\ & \geq 2(a+b+c+b+c+a) \\ &= 4(a+b+c). \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (1) và (5), suy ra

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq 2\sqrt{a+b+c}.$$

Vì bất đẳng thức vừa nêu trên đúng với mọi $a, b, c \geq 0$, nên nó cũng đúng với mọi $a, b, c \geq 0$, thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí mới chỉ nhận được bốn lời giải, từ bạn đọc; mặc dù bài đã ra là một bài toán rất cơ bản, rất đơn giản, và thuộc loại “khoái khẩu” của tuyệt đại đa số các bạn học sinh phổ thông ham học Toán. Phải chăng, sự hiện diện của giả thiết thừa “tổng bình phương của a, b, c bằng 3” đã làm các bạn “bối rối”, trong quá trình giải bài?

2. Nếu bỏ qua lỗi “chính tả” ở dòng cuối của một số lời giải, thì tất cả bốn lời giải nêu trên đều là lời giải đúng.

Nguyễn Khắc Minh

P819. (Mức A) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$\phi(m) + f(n) \vdots f(\phi(m)) + n,$$

với mọi số nguyên dương m, n .

($\phi(m)$ là số các số nguyên dương không vượt quá m , và nguyên tố cùng nhau với m .)

Lời giải (dựa theo ý giải của hầu hết các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc).

• Giả sử $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ là một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài; nghĩa là, ta có:

$$\phi(m) + f(n) \vdots f(\phi(m)) + n, \quad (1)$$

với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Xét số nguyên tố p tùy ý.

Do $\phi(p) = p - 1$, nên thế $m = p$ và $n = 1$ vào (1), ta được:

$$p - 1 + f(1) \vdots f(p - 1) + 1. \quad (2)$$

Do $\phi(1) = 1$, nên thế $m = 1$ và $n = p - 1$ vào (1), ta được:

$$f(p - 1) + 1 \vdots p - 1 + f(1). \quad (3)$$

Từ (2) và (3), suy ra

$$f(p - 1) + 1 = p - 1 + f(1). \quad (4)$$

Đặt $c = f(1) - 1$; do $f(1) \in \mathbb{N}^*$ nên c là một hằng số tự nhiên.

Khi đó, từ (4) ta có:

$$f(p - 1) = p - 1 + c. \quad (5)$$

Thế $m = p$ vào (1), do (5) và do tính tùy ý của p , ta được:

$$f(n) + p - 1 \vdots n + p - 1 + c,$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và với mọi p nguyên tố.

Từ đó, do

$$\begin{aligned} & (f(n) + p - 1) - (n + p - 1 + c) \\ &= f(n) - n - c, \end{aligned}$$

suy ra

$$f(n) - n - c \vdots n + p - 1 + c, \quad (6)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và với mọi p nguyên tố.

Do có vô hạn số nguyên tố, nên với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ đều tồn tại số nguyên tố p_n , sao cho

$$n + p_n - 1 + c > |f(n) - n - c|$$

Vì thế, ta có (6) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và với mọi p nguyên tố, chỉ khi

$$f(n) - n - c = 0, \text{ hay } f(n) = n + c,$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• Ngược lại, bằng cách thử trực tiếp, dễ thấy, hàm số f vừa nêu trên thỏa mãn tất cả các yêu cầu của đề bài.

• Vậy, tất cả các hàm số f cần tìm theo yêu

câu đề bài là:

$$f(n) = n + c, n \in \mathbb{N}^*;$$

trong đó, c là một hằng số tự nhiên tùy ý.

Bình luận và Nhận xét

1. Nghĩ tới phép thế $m = p$, với p là một số nguyên tố, là một hướng nghĩ tự nhiên, hợp lý. Vì thế, có thể nói, tuy có hình thức “khủng bố”, nhưng bài đã ra là một bài toán

ở mức cơ bản, trong Chủ đề “Phương trình hàm số học”.

2. Rất tiếc, trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, có một lời giải không thể coi là đúng, do người giải bài đã mắc lỗi trong việc suy ra “ $f(n) = n + c$ ” từ (6) (theo ký hiệu trong Lời giải trên).

Lưu Thị Thanh Hà

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI ĐÚNG

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải đúng.

KHỐI THCS

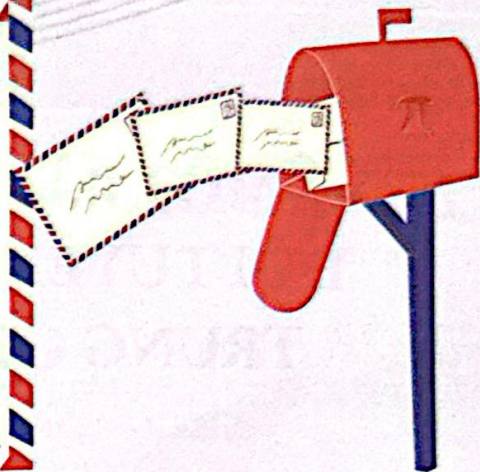
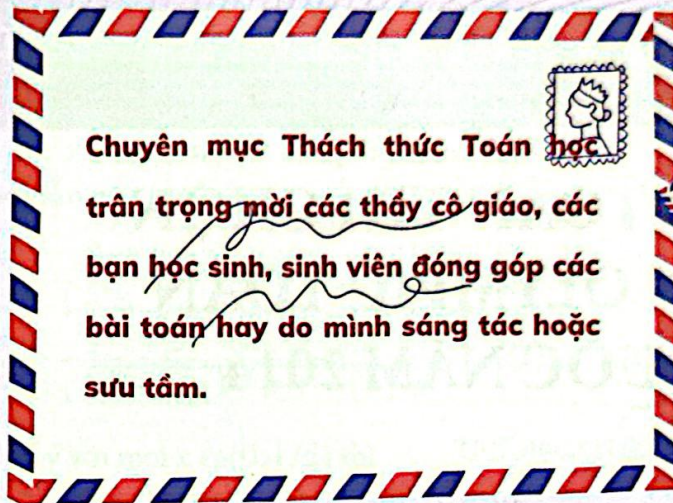
- Trường THCS Nguyễn Thái Bình, Tp. Cà Mau, tỉnh Cà Mau: Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình (lớp 9C; P811, P812, P814, P816, P817, P818).
- Trường THCS Thanh Xuân, Quận Thanh Xuân, Tp. Hà Nội: Nguyễn Đức Huy (lớp 6A2; P816).
- Trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, Tp. Hà Nội: Đặng Ngọc Anh Thơ (lớp 7C; P812).
- Trường THCS Ngô Quyền, Quận Lê Chân, Tp. Hải Phòng: Bùi Hoàng Nam (lớp 9A10; P814).
- Trường THCS Quỳnh Trang, thị xã Hoàng Mai, tỉnh Nghệ An: Nguyễn Văn Đức Thắng (lớp 9A; P812, P814).
- Trường THCS Văn Lang, Tp. Việt Trì, tỉnh Phú Thọ: Vũ Hoàng Sơn (lớp 8A; P811, P812, P814, P815, P817, P818).
- Trường Quốc tế song ngữ cấp 2,3 GIBS, Tp. Graz, Cộng hòa Áo: Lê Bạch Hải Đăng (lớp 1B (tương đương lớp 6 của Việt Nam); P811, P816).

KHỐI THPT

- Trường THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Bình Dương: Trần Khánh Hưng (lớp 10T1; P811).

- Trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước: Đỗ Viết Hoàng Long (lớp 11A; P811, P812, P813, P814, P815, P816, P817, P818).
- Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Điện Biên: Nguyễn Ngọc Diệp (lớp 10A1; P811).
- Trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp: Nguyễn Đức Phát (lớp 10T1; P811, P812), Đỗ Hoàng Yến Phương (lớp 11T2; P811), Trần Thị Phương Thảo (lớp 10T1; P811), Võ Hải Yến (lớp 12H; P811, P813).
- Trường THCS – THPT Newton Grammar School, Tp. Hà Nội: Nguyễn Phúc Nguyên (lớp 10G0; P819).
- Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định: Lê Đức Phát (lớp 12 Toán 2; P819).
- Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên: Nguyễn Tấn Nguyên Chương (lớp 11T1; P817, P819), Huỳnh Trần Gia Huy (lớp 10 Toán 1; P812, P814, P815, P816, P817, P819).
- Trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, tỉnh Quảng Nam: Nguyễn Văn Nhân Hậu (lớp TK23; P811), Nguyễn Thanh Tuấn (lớp 10; P811, P812, P815, P816, P818).
- Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc: Trương Anh Dũng (lớp 10A1; P811, P814).

MỜI BẠN ĐỌC RA ĐỂ CHO PI



YÊU CẦU ĐỐI VỚI BÀI TOÁN GỬI ĐĂNG

▼ Dành cho đối tượng là học sinh THCS hoặc THPT

Có ý tưởng hay độc đáo trong lời giải. ▼

► Để bài sáng tác hoặc sưu tầm, được gửi kèm cùng lời giải. Để bài chưa được công bố hay gửi công bố trên các tạp chí, báo toán bằng tiếng Việt. ▼

▼ Với những bài toán khó, khuyến khích tác giả gửi thêm các bài phân tích về ý tưởng, phương pháp tư duy, mối liên hệ với các bài toán khác để đăng trong chuyên mục Học cùng Pi.

▼ Đối với đề sưu tầm cần ghi rõ nguồn gốc (trên các sách báo, tạp chí hay trong các kỳ thi). Đối với các bài toán được phát triển từ một bài toán khác, cũng khuyến khích tác giả giới thiệu bài toán gốc.

Các bạn học sinh, sinh viên có đề bài trên chuyên mục Thách thức Toán học sẽ nhận được giấy khen từ Tạp chí Pi.

Thông tin Tòa soạn

✉ Gửi bài: bbt@pi.edu.vn

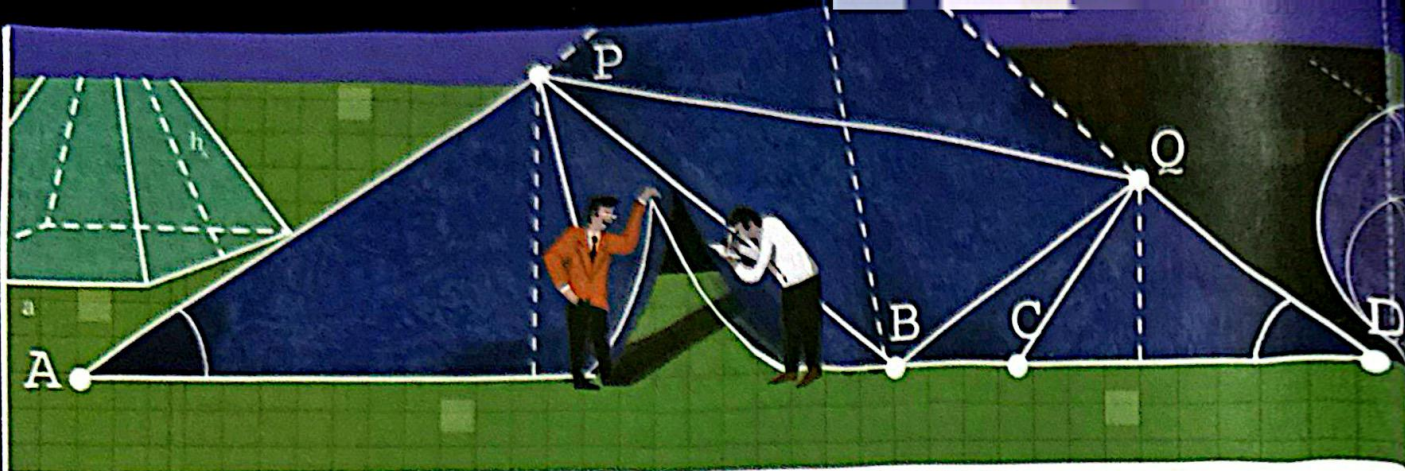
✉ Giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com



Hotline: 024.3215.1407



Website: www.pi.edu.vn



VỀ MỘT BÀI TOÁN THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC TOÁN TRUNG QUỐC NĂM 2014

NGUYỄN XUÂN THỌ¹

Bài toán sau đây xuất hiện trong kỳ thi chọn đội tuyển Olympic Toán Trung Quốc tham dự kỳ thi Toán quốc tế năm 2014:

Bài toán 1 (TST 3–Ngày 1–Bài 3). *Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn*

$$(x+1)(x+2)\cdots(x+2014) \\ = (y+1)(y+2)\cdots(y+4028).$$

Bài toán 1 là trường hợp đặc biệt của một kết quả được Saradha và Shorey chứng minh vào năm 1990:

Định lý 1 (Saradha–Shorey [3]). *Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, không tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn*

$$(x+1)(x+2)\cdots(x+n) \\ = (y+1)(y+2)\cdots(y+2n). \quad (1)$$

Tuy nhiên, chứng minh được đưa ra bởi Saradha và Shorey khá phức tạp, bài báo này trình bày một chứng minh đơn giản hơn cho Định lý 1 trong trường hợp $n \geq 6$. Bài báo có tham khảo các tài liệu [1] và [2].

1 Một số kết quả cơ bản

Với mỗi số nguyên tố p và số nguyên dương n , ta ký hiệu $v_p(n)$ số mũ của p trong phân tích ra thừa số nguyên tố của số nguyên dương n .

Bổ đề 1. *Với mọi số nguyên dương n thì*

$$v_2((n+1)\cdots(2n)) = n.$$

Chứng minh. Đặt $A_n = (n+1)(n+2)\cdots(2n)$. Khi đó $v_2(A_1) = 1, v_2(A_2) = 2, v_2(A_3) = 3$ nên kết luận đúng với $n = 1, 2, 3$. Giả sử $v_2(A_n) = n$ với n là một số nguyên dương. Do

$$A_{n+1} = (n+2)(n+3)\cdots(n+1+n+1) \\ = 2(n+1)(n+2)\cdots(2n)(2n+1) \\ = 2(2n+1)A_n,$$

nên $v_2(A_{n+1}) = 1 + v_2(A_n) = n + 1$. Theo nguyên lý quy nạp thì kết luận đúng với mọi số nguyên dương n .

Bổ đề 2 ([2]). *Cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(0, 1/2)$. Đặt $x = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ và $y = \max\{x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2\}$. Khi đó*

$$1 - x \geq \sqrt[n]{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)} \\ > 1 - x - 2y. \quad (2)$$

Dấu “=” xảy ra ở bất đẳng thức bên trái của (2) khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

¹Đại học Bách Khoa Hà Nội.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt[n]{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)} \leq \frac{1-x_1+1-x_2+\cdots+1-x_n}{n} = 1-x;$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM một lần nữa ta có

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)}}. \quad (3)$$

Chú ý với mọi $x \in (0, 1/2)$ thì

$$\frac{1}{1-x} = 1+x + \frac{x^2}{1-x} < 1+x+2x^2.$$

Từ (3) và (4) ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)} \\ & \geq \frac{1}{\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_n}} \\ & > \frac{1}{(1+x_1+2x_1^2) + (1+x_2+2x_2^2) + \cdots + (1+x_n+2x_n^2)} \\ & = \frac{1}{1+x + \frac{2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}{n}} \\ & \geq \frac{1}{1+x+2y} \\ & > 1-x-2y. \end{aligned}$$

Bổ đề 3. Cho số nguyên dương lẻ m và các số nguyên dương đôi một phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_m$ sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = mz$, trong đó z là một số nguyên dương. Khi đó

$$a_1 a_2 \cdots a_m \leq z \prod_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} (z^2 - i^2).$$

Hơn nữa, dấu "=" đạt được với duy nhất bộ m số nguyên liên tiếp $m - \frac{m-1}{2}, \dots, m + \frac{m-1}{2}$ (và các hoán vị của nó).

Chứng minh. Nhận xét rằng, với z và m cố định, chỉ tồn tại hữu hạn các bộ số nguyên dương $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ với $a_1, a_2, \dots, a_m$ đôi một phân biệt và thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = mz.$$

Hơn nữa, theo giả thiết thì tập như vậy khác rỗng. Suy ra tồn tại một bộ $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ sao cho $x_1 x_2 \cdots x_m$ đạt giá trị lớn nhất. Không giảm tổng quát, giả sử $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$.

Nhận xét: $x_{i+1} - x_i = 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Nếu $x_{i+1} - x_i \geq 2$, xét bộ $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ với $y_j = x_j$ nếu $j \notin \{i, i+1\}$, $y_i = x_i + 1$ và $y_{i+1} = x_{i+1} - 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} y_i y_{i+1} &= x_i x_{i+1} + x_{i+1} - x_i - 1 \\ &\geq x_i x_{i+1} + 1 > x_i x_{i+1}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$y_1 y_2 \cdots y_m > x_1 x_2 \cdots x_m,$$

Mà hiển nhiên $y_1 < y_2 < \cdots < y_m$ nên ta có điều mâu thuẫn. Nhận xét được chứng minh.

Từ nhận xét trên, ta suy ra $x_1, x_2, \dots, x_m$ là các số nguyên dương liên tiếp. Từ đó, do $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = mz$ và m là số lẻ nên chúng phải có dạng

$$x_i = z - \frac{m-1}{2} + i - 1$$

với $i = 1, 2, \dots, m$. Suy ra

$$x_1 x_2 \cdots x_m = z \prod_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} (z^2 - i^2).$$

Vậy, bổ đề được chứng minh.

2 Chứng minh cho Định lý 1 trong trường hợp $n \geq 6$

Giả sử tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn (1). Gọi k là một số nguyên dương trong tập $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho

$$v_2(x+k) = \max_{1 \leq j \leq n} \{v_2(x+j)\}.$$

Để ý rằng khi đó k là duy nhất. Thật vậy, nếu tồn tại $k' \neq k$ sao cho $v_2(x+k) = v_2(x+k')$ thì bằng cách đặt $x+k = 2^u(2a+1)$, $x+k' = 2^u(2a'+1)$, trong đó a, a' là các số tự nhiên thì bằng cách chọn $2a''$ là một số chẵn bất kỳ nằm giữa $2a+1$ và $2a'+1$ ta nhận thấy rằng $2^u \cdot 2a''$ là một số nằm giữa $x+k$ và $x+k'$ có số mũ của 2 trong phân tích ra thừa số lớn hơn u , mâu thuẫn.

Khi đó, với mọi $i \neq k$, $1 \leq i \leq n$ thì $v_2(x+i) < v_2(x+k)$, dẫn đến

$$v_2(i-k) = x_2((x+i) - (x+k)) = v_2(x+i).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & v_2((x+1)(x+2) \cdots (x+n)) \\ &= v_2(x+k) + \sum_{1 \leq i \leq n, i \neq k} v_2(i-k) \\ &= v_2(x+k) + v_2\left(\prod_{1 \leq i \leq n, i \neq k} (i-k)\right) \\ &\leq v_2(x+k) + v_2((n-1)!) \end{aligned} \quad (5)$$

Trong đó, ta đã sử dụng quan sát đơn giản $\prod_{1 \leq i \leq n, i \neq k} (i-k) = (-1)^{k-1} (k-1)! (n-k)! | (n-1)! |$. Bất đẳng thức trên dẫn đến

$$\begin{aligned} & v_2(x+k) \\ &\geq v_2((x+1)(x+2) \cdots (x+n)) - v_2((n-1)!) \\ &= v_2((y+1)(y+2) \cdots (y+2n)) - v_2((n-1)!) \\ &\geq v_2((2n)!) - v_2((n-1)!). \end{aligned} \quad (6)$$

Trong đó, ta đã sử dụng nhận xét $(2n)! | (y+1)(y+2) \cdots (y+2n)$. Mặt khác từ Bổ đề (1), ta có

$$\begin{aligned} & v_2((2n)!) - v_2((n-1)!) \\ &= v_2((2n)!) - v_2(n!) + v_2(n) \\ &= v_2(n) + v_2((n+1)(n+2) \cdots (2n)) \\ &= v_2(n) + n. \end{aligned} \quad (7)$$

Kết hợp (5), (6), và (7) ta được

$$x+k \geq 2^{v_2(x+k)} \geq 2^{n+v_2(n)} \geq 2^n.$$

Do $k \leq n$ nên điều đó chứng tỏ

$$x > 2^n - n.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} & (y+2n)^{2n} \\ &> (y+1)(y+2) \cdots (y+2n) \\ &= (x+1)(x+2) \cdots (x+n) \\ &> ((2^n-n)+1)((2^n-n)+2) \cdots ((2^n-n)+n) \\ &> (2^n-n)^n. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này dẫn đến

$$y > \sqrt{2^n-n} - 2n.$$

Đặt $x+n = a$ và $y+n+1/2 = b$.

Lấy căn bậc n hai vế của (1) ta được

$$\begin{aligned} & a^n \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right) \cdots \left(1-\frac{n}{a}\right)} \\ &= b^2 \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{4b^2}\right)\left(1-\frac{3^2}{4b^2}\right) \cdots \left(1-\frac{(2n-1)^2}{4b^2}\right)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Gọi A là giá trị dương chung của hai vế của (8). Áp dụng Bổ đề (2) cho vế trái của (8) ta được

$$\begin{aligned} & a \left(1 - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \cdots + \frac{n}{a}\right)\right) \\ &> A > a \left(1 - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \cdots + \frac{n}{a}\right) - \frac{2}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Suy ra

$$a - \frac{n+1}{2} > A > a - \frac{n+1}{2} - \frac{2}{a}. \quad (9)$$

Áp dụng Bổ đề (2) cho vế phải của (8) và sử dụng đẳng thức

$$1 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

ta được

$$\begin{aligned} & b^2 \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{n(2n-1)(2n+1)}{12b^2}\right) \\ &> A > b^2 \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{n(2n-1)(2n+1)}{12b^2} - \frac{2}{4b^4}\right). \end{aligned}$$

Suy ra

$$b^2 - \frac{4n^2 - 1}{12} > A > b^2 - \frac{4n^2 - 1}{12} - \frac{1}{2b^2}. \quad (10)$$

Do $n \geq 6$ nên

$$b^2 = (y + n + 1/2)^2 > (\sqrt{2^n - n} - n + 1/2)^2 > 4. \quad (11)$$

Chú ý là

$$\begin{aligned} b^2 - \frac{4n^2 - 1}{12} &= \left(y + n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4n^2 - 1}{12} \\ &= (y + n)^2 + (y + n) + \frac{1 - n^2}{3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Để kết thúc, ta sẽ dựa vào các bất đẳng thức thu được để ước lượng $\{A\}$, phần lẻ của A theo hai cách khác nhau, từ đó suy ra điều mâu thuẫn.

Trường hợp 1: n chẵn. Do $a = x + n > n \cdot 2^n > 16$ và $(n + 1)/2 \notin \mathbb{Z}^+$, nên từ (9) ta có

$$\{A\} \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right), \quad (13)$$

Trường hợp 1.1: $3 \nmid n$. Khi đó $3 \mid 1 - n^2$. Từ (10), (11), và (12) ta được

$$\{A\} \in \left(1 - \frac{1}{8}, 1\right). \quad (14)$$

Trường hợp 1.2: $3 \mid n$. Từ (10), (11), và (12) ta được

$$\{A\} \in \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right). \quad (15)$$

Cả (14) và (15) đều mâu thuẫn với (13).

Trường hợp 2: n lẻ. Do $a = x + n > n \cdot 2^n > 16$ và $(n + 1)/2 \in \mathbb{Z}^+$, nên từ (9) ta suy ra

$$\{A\} \in \left(1 - \frac{1}{8}, 1\right). \quad (16)$$

Trường hợp 2.1: $3 \mid n$. Khi này, do $3 \mid n$ nên từ (10), (11), và (12) ta suy ra

$$\{A\} \in \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right), \quad (17)$$

mâu thuẫn với (16).

Trường hợp 2.2: $3 \nmid n$. Do n lẻ nên từ (9) ta suy ra phần nguyên của A bằng

$$[A] = a - \frac{n + 1}{2} - 1.$$

Do n lẻ và n không chia hết cho 3 nên từ (10), (11) và (12) ta lại suy ra phần nguyên của A bằng

$$[A] = b^2 - \frac{4n^2 - 1}{12} - 1.$$

Do đó

$$a - \frac{n + 1}{2} - 1 = b^2 - \frac{4n^2 - 1}{12} - 1.$$

Suy ra

$$x + \frac{n - 1}{2} = y^2 + (2n + 1)y + \frac{(n + 1)(2n + 1)}{3}.$$

Đặt $z = x + \frac{n - 1}{2}$. Khi đó, $y^2 + (2n + 1)y = z - \frac{(n + 1)(2n + 1)}{3}$ và với mọi $i = 1, 2, \dots, n$, ta có

$$\begin{aligned} &(y + i)(y + 2n + 1 - i) \\ &= (y^2 + (2n + 1)y + i(2n + 1 - i)) \\ &= z - \frac{(n + 1)(2n + 1)}{3} + i(2n + 1 - i). \end{aligned}$$

Từ đó, ta có thể viết lại (1) dưới dạng

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^n \left(z - \frac{n - 1}{2} + i\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(z - \frac{(n + 1)(2n + 1)}{3} + i(2n + 1 - i)\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Do

$$\sum_{i=1}^n \left(z - \frac{n(2n + 1)}{3} + i(2n + 1 - i)\right) = nz,$$

và các số $z - \frac{n(2n+1)}{3} + i(2n+1-i)$, với $i = 1, 2, \dots, n$, đôi một phân biệt, nên nên từ Bổ đề (3) ta có

$$\begin{aligned} & \text{VP(18)} \\ & \leq z \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (z^2 - i^2) \\ & < z \left(z + \frac{n-1}{2} \right) \left(z + \frac{n+1}{2} \right) \prod_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} (z^2 - i^2) \\ & = \text{VT(18)}, \end{aligned}$$

mâu thuẫn. Do vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên dương với $n \geq 6$.

3 Bài tập

Để kết thúc bài báo, tác giả xin dành hai bài tập dưới đây cho bạn đọc.

Bài 1: Chứng minh phương trình (1) không có nghiệm nguyên dương nếu $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Bài 2: Chứng minh phương trình

$$(y(y+2))^{253} = (x+1)(x+2) \cdots (x+2024)$$

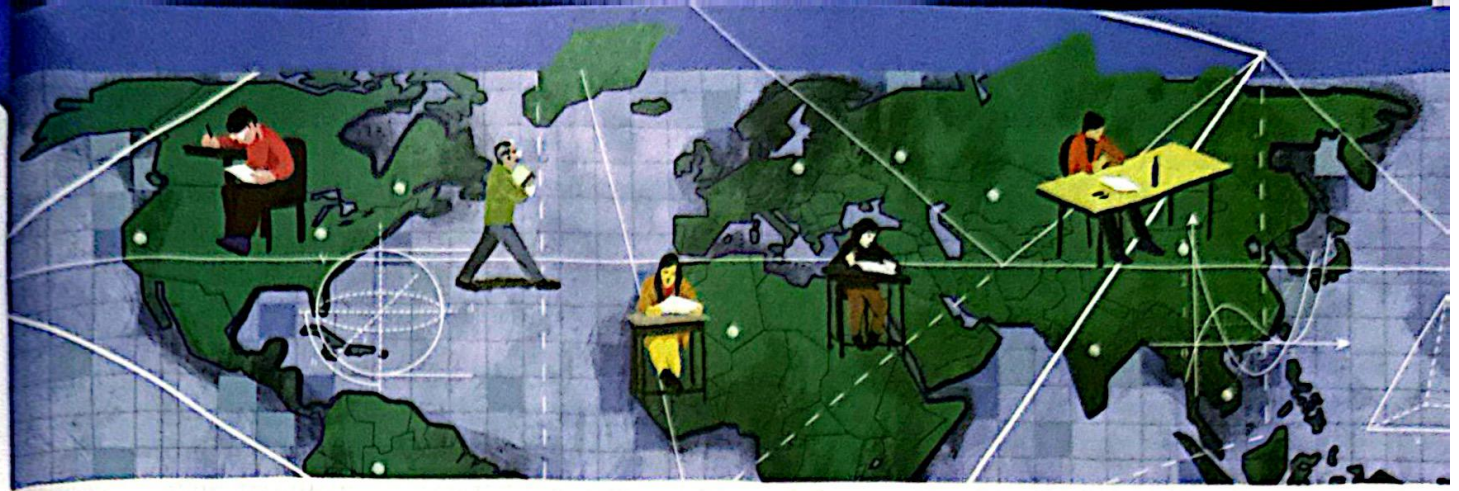
không có nghiệm nguyên dương.

Tài liệu

[1] AOPS, *China Team Selection Test 2014 TST 3 Day 1 Q3*. <https://artofproblemsolving.com/community/c6h582007p3439358>

[2] P. Y. Lee and B. Xiong, *Mathematical Olympiad In China (2011 – 2014): Problems And Solutions*, Mathematical Olympiad Series Book 15, World Scientific / East China Normal Univ Press, China (March 22, 2018).

[3] N. Saradha and T. N. Shorey, On the ratio of two blocks of consecutive integers, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 100 (1990), 107132.



NHỮNG TÀI NĂNG KHÔNG ĐƯỢC NHÌN THẤY: Liệu biên giới tri thức có thể mở rộng nhanh hơn?*

RUCHIR AGARWAL VÀ PATRICK GAULE¹

(Người dịch: Đoàn Trung Cường² và Quãn Thị Hoài Thu³)

Hiểu hơn về các yếu tố quyết định việc tạo ra ý tưởng tri thức luôn là cốt yếu đối với sự phát triển dài hạn. Hướng theo mục đích này, bài báo đưa ra hai kết quả dựa trên dữ liệu từ Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO). Thứ nhất, những cá nhân xuất sắc ở tuổi thiếu niên có năng lực đặc biệt trong việc mở rộng biên giới tri thức. Thứ hai, những cá nhân có tài năng như vậy sinh ra trong các quốc gia nghèo hơn có ít cơ hội tham gia việc tạo ra tri thức một cách hệ thống. Thí sinh dự thi IMO đến từ các quốc gia có thu nhập thấp công bố ít hơn 34% số ấn phẩm và có ít hơn 56% số lượng trích dẫn, khi so với những thí sinh có cùng tài năng đến từ các nước phát triển. Những chính sách khuyến khích các tài năng trẻ theo đuổi sự nghiệp khoa học – đặc biệt ở các nước nghèo

hơn – có thể thúc đẩy phát triển biên giới tri thức nhanh hơn.

Trong nhiều mô hình tăng trưởng, phát triển kinh tế sinh ra từ việc con người tạo ra tri thức, và tốc độ tăng trưởng dài hạn là sản phẩm của hai yếu tố: số lượng các nhà nghiên cứu và năng suất nghiên cứu của họ. Bloom và cộng sự (2017) đã đưa ra nhiều bằng chứng đa dạng từ các ngành công nghiệp khác nhau, cho thấy năng suất làm việc của các nhà khoa học đang giảm sút nghiêm trọng – do đó tạo ra tri thức mới hay các ý tưởng đột phá ngày càng khó khăn hơn. Vì vậy, hiểu hơn về các yếu tố quyết định của việc tạo ra ý tưởng/tri thức mới vẫn là cốt yếu. Trong bối cảnh như vậy, bài báo này đề cập đến hai câu hỏi: (i) Việc khuyến khích

* Ruchir Agarwal and Patrick Gaule, "Invisible Geniuses: Could the Knowledge Frontier Advance Faster?" *American Economic Review: Insights* 2(4) (2020), 409 – 424.

Dịch từ bản gốc với sự cho phép của *American Economic Review: Insights*.

¹ Ruchir Agarwal: Quỹ Tiền tệ Quốc tế – IMF (email: ragarwal@imf.org); Patrick Gaule: Đại học Bath (email: p.gaule@bath.ac.uk).

² Viện Toán học – Viện HLKHCN Việt Nam.

³ Đại học Binghamton, Mỹ.

các tài năng trẻ theo đuổi sự nghiệp nghiên cứu có đóng góp vai trò cốt yếu trong việc tạo ra tri thức mới hay không? (ii) Nếu có, đất nước nơi một thanh niên tài năng sinh ra ảnh hưởng thế nào đến lượng tri thức người đó tạo ra trong suốt cuộc đời?

Chúng tôi tập trung vào các câu hỏi này bởi vì chúng là mấu chốt để tìm hiểu không những về quá trình tạo ra tri thức mà còn về việc thế giới có đang sử dụng nhóm thanh niên tài năng để mở rộng biên giới tri thức một cách tối ưu nhất hay không⁴. Ba thách thức chính về thực nghiệm khi trả lời các câu hỏi này: (i) Tài năng được đo lường như thế nào? (ii) Làm sao để cách đo lường tài năng này tương thích với nhiều quốc gia và trong thời gian dài? và (iii) Làm thế nào để xây dựng một mẫu thử tốt, đa dạng bao gồm các tài năng trẻ mà không phải chọn sự thành công dài hạn của người đó trong việc tạo ra tri thức? Để giải quyết các thử thách này, chúng tôi tập trung vào sự sáng tạo tri thức trong ngành toán học và sử dụng một điểm độc đáo của lĩnh vực này: Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) – một kỳ thi nổi bật trên toàn thế giới dành cho học sinh khối trung học phổ thông. Phương pháp này cho phép chúng tôi đo lường tài năng từ những năm thiếu niên (được đại diện bằng điểm thi IMO) cũng như tiến hành so sánh các thiếu niên tài năng giữa các quốc gia khác nhau. Bằng cách kết hợp nhiều nguồn khác nhau, chúng tôi có thể xây dựng một cơ sở dữ liệu gốc bao gồm quá trình học tập và các ấn phẩm của nhóm thí sinh tham dự IMO trong vòng 20 năm (1981 – 2000; $N = 4,710$). Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng từ “tài năng” để chỉ khả năng giải toán (problem-solving) của các cá nhân từ những năm niên thiếu của họ.

Đây có thể là kết quả của năng lực bẩm sinh, nhờ tập luyện hoặc cả hai. Đối với mục đích của bài báo này, chúng tôi không xét đến vai trò tương đối giữa năng lực bẩm sinh và môi trường trong việc quyết định tài năng tuổi niên thiếu.

Đầu tiên chúng tôi khảo chứng một mối tương quan nổi bật giữa số điểm đạt được tại IMO – và nói riêng số điểm đạt được trong các câu hỏi khó nhất của cuộc thi – và thành tựu về sau trong việc tạo ra tri thức toán học. Những người đạt thành tích IMO cao có nhiều khả năng tạo ra những nghiên cứu tiên phong trong toán học hơn những người đạt thành tích IMO thấp hơn hoặc những nhà toán học không tham gia IMO. Xác suất có điều kiện để một người đã đạt huy chương vàng IMO trở thành chủ nhân huy chương Fields cao gấp 50 lần xác suất tương tự của một tiến sỹ tốt nghiệp trong nhóm mười trường đại học có chương trình toán tốt nhất.

Tiếp theo, chúng tôi khảo sát vai trò của đất nước xuất thân đối với thành tựu nghề nghiệp và sáng tạo tri thức của các thí sinh IMO ở cùng mức điểm thi IMO. Chúng tôi nhận thấy rằng có một sự bất lợi của các nước đang phát triển trong toàn bộ việc phân phối tài năng trong mẫu của chúng tôi. Cụ thể, khi so sánh với thí sinh IMO có điểm thi tương đương từ các quốc gia có thu nhập cao, những người có gốc gác từ nước có thu nhập thấp hoặc trung bình tạo ra lượng kiến thức ít hơn đáng kể trong suốt cuộc đời của họ. Một thí sinh bất kỳ đến từ quốc gia có thu nhập thấp xuất bản ít hơn 34% lượng ấn phẩm toán học và nhận được ít hơn 56% lượng trích dẫn so với một thí sinh có tài năng tương đương đến từ quốc gia có thu

⁴ Có rất ít các nghiên cứu có hệ thống về những câu hỏi này nhưng vẫn có một số ngoại lệ đáng chú ý. Aghion và các cộng sự (2017) tìm ra một mối tương quan đáng kể nhưng tương đối yếu giữa chỉ số IQ không gian trực quan (từ kỳ kiểm tra nhập ngũ) và xu hướng trở thành nhà phát minh ở Phần Lan. Bell và cộng sự (2019) cũng báo cáo rằng có một mối tương quan giữa điểm môn toán ở lớp ba và xu hướng trở thành một nhà phát minh ở Hoa Kỳ. Ngoài ra còn có các tài liệu tâm lý học nghiên cứu mối liên hệ giữa sự thông minh, tính sáng tạo, và thành tựu khoa học. Ví dụ, Cox (1926) ước tính chỉ số IQ cho 300 “thiên tài” có đóng góp xuất sắc cho khoa học.

nhập cao. Tính toán sơ bộ cho thấy việc tạo ra tri thức (của các thí sinh IMO) có thể cao hơn 10% về ấn phẩm và cao hơn 17% về trích dẫn⁵.

Thật thú vị khi xem xét liệu những khác biệt về nền tảng kinh tế xã hội ở trong nước Mỹ có quan trọng hơn hay ít quan trọng hơn những khác biệt quốc tế giữa các quốc gia trong việc sinh ra những khác biệt về kết quả đổi mới. Mức độ bất lợi (hay quy mô phạt – penalty) đối với những quốc gia có thu nhập thấp mà chúng tôi báo cáo thấp hơn một bậc so với báo cáo của Bell và cộng sự (2019), trong đó họ đã chỉ ra rằng trẻ em ở Mỹ sinh ra trong gia đình có thu nhập cao (nhóm 1%) có khả năng trở thành nhà phát minh cao hơn gấp mười lần những đứa trẻ sinh ra trong gia đình có thu nhập thấp hơn mức trung bình. Tuy nhiên, điều quan trọng cần lưu ý là trong khi họ đánh giá tất cả trẻ em sinh ra ở Mỹ, chúng tôi chỉ xem xét những cá nhân đạt thành tích xuất sắc trong thời niên thiếu của họ. Các cá nhân đó đã vượt qua nhiều trở ngại trong một môi trường ít khuyến khích tích lũy tiềm lực con người. Hơn nữa, chúng tôi đang xem xét một số ít những cá nhân nằm ở phần đuôi của phân phối tài năng và có thể kỳ vọng những người đó có nhiều khả năng vượt qua các trở ngại nhất. Vì những lý do ấy, nên coi các ước tính của chúng tôi là cận dưới đối với ảnh hưởng của việc đến từ một nước nghèo và chưa phản ánh đầy đủ biên độ rộng của những rào cản đối với việc tiếp cận các cơ hội.

Công trình này được thực hiện dựa trên tài liệu kinh tế vĩ mô về sự phân bố nhân tài và tài liệu kinh tế vi mô về gốc gác của những người tạo ra tri thức.⁶ Baumol (1990), Murphy, Shleifer và Vishny (1991) đã nhấn mạnh rằng sự phân bố nhân tài trong các lĩnh vực khác

nhau của nền kinh tế là chìa khoá cho sự tăng trưởng kinh tế. Gần đây hơn, Hsieh và cộng sự (2019) tin rằng sự tham gia của phụ nữ và người da màu tài năng vào thị trường lao động Mỹ có tác động đến sự tăng trưởng tổng thu nhập của Mỹ. Sử dụng dữ liệu của Chương trình Đánh giá sinh viên quốc tế, Ugarov (2019) chỉ ra rằng so với các nước phát triển, lựa chọn nghề nghiệp ở các nước đang phát triển khó được dự đoán dựa vào những kỹ năng học thuật hơn, có thể là do những cản trở trong nghề nghiệp. Liên quan nhiều nhất đến công trình của chúng tôi là những nghiên cứu thực nghiệm gần đây điều tra về ảnh hưởng của nền tảng kinh tế xã hội và địa lý của trẻ em đến khả năng trở thành một nhà phát minh ở Mỹ (Akçigit, Grigsby, và Nicholas 2017; Celik 2018; Bell và cộng sự 2019) và ở Phần Lan (Aghion và cộng sự 2017).

Một phát hiện nhất quán là trẻ em từ các gia đình có thu nhập thấp có ít khả năng trở thành nhà phát minh hơn những trẻ em xuất thân từ gia đình có thu nhập cao. Bell và cộng sự (2019) cũng báo cáo về những khác biệt đáng kể đối với khả năng trở thành nhà phát minh giữa trẻ em sinh ra ở các bang khác nhau. Ví dụ, họ phát hiện rằng trẻ em sinh ra ở bang Massachusetts có khả năng trở thành nhà phát minh cao hơn gấp năm lần trẻ em sinh ra ở bang Alabama. Kết quả của chúng tôi phản ánh những sự khác biệt này trên phạm vi quốc tế. Bên cạnh khía cạnh quốc tế, một đặc điểm nổi bật trong dữ liệu của chúng tôi là chúng tôi có một mẫu thử gồm những cá nhân ở phần cuối cùng đuôi bên phải của đồ thị phân phối khả năng, và chúng tôi ghi nhận rằng, thậm chí tại các vị trí đó, sự khác nhau về xuất thân cũng dẫn đến những sự khác biệt về sau trong sáng tạo tri thức.

⁵ Chi tiết tính toán và các hạn chế liên quan được thảo luận trong Phần IV.

⁶ Chúng tôi cũng xây dựng dựa trên tài liệu về vai trò của vị trí địa lý trong sáng tạo tri thức (Kabn và cộng sự 2016) và các yếu tố quyết định thành tích cao trong toán học (Andreescu và cộng sự 2008; Ellison và cộng sự 2010, 2016, 2018).

Những bằng chứng chúng tôi đưa ra về sự quan trọng của nhân tài trong việc tạo ra kiến thức tiên phong cũng làm sáng tỏ cái giá phải trả cho những sai lầm trong việc phân bổ ra bên ngoài những nghề nghiệp tạo ra tri thức.

Rộng ra, kết quả của chúng tôi cũng liên quan đến việc nghiên cứu các yếu tố quyết định tốc độ sinh ra tri thức. Tài liệu về tăng trưởng nội sinh nghiên cứu về quy mô của lĩnh vực sản xuất tri thức (tham khảo Jones 2002, Freeman và cộng sự 2009, Bloom và cộng sự 2017,...) nhưng ít chú ý đến những thành phần cấu thành lĩnh vực đó. Tương tự, tài liệu về kinh tế học khoa học thường tập trung vào cách các thể chế và động cơ ảnh hưởng đến năng suất của các nhà khoa học hiện tại hơn là chú ý ngay từ đầu đến những người sẽ trở thành các nhà khoa học, những người sáng tạo tri thức⁷. Nghiên cứu của chúng tôi cho thấy rằng việc lựa chọn nhân tài vào sản xuất tri thức có thể quan trọng đối với tốc độ phát triển khoa học. Cuối cùng, bài báo của chúng tôi cũng xây dựng dựa trên các tài liệu về các động lực “kéo–đổi–đẩy” (pull-versus-push, Maurer 2006; Kremer và Williams 2010; Fu, Lu và Lu 2012; Williams 2012). Trong khi các động cơ “kéo” có vai trò quan trọng trong việc kích thích những khám phá khoa học, nghiên cứu của chúng tôi cho thấy các chương trình “đẩy” nhắm đến những thanh thiếu niên tài năng có thể trở thành một công cụ bổ sung có hiệu quả cho sự mở rộng biên giới tri thức.

Nội dung của bài báo được trình bày như sau. Phần I mô tả Kỳ thi IMO. Phần II trình bày các dữ liệu. Các kết quả về mối liên hệ giữa

sự thành công trong Kỳ thi IMO và những thành tựu dài hạn được nêu trong Phần III và so sánh quốc tế được đưa ra trong Phần IV. Phần V kết luận.

I. IMO

IMO là kỳ thi toán học nổi tiếng được tổ chức hằng năm bắt đầu từ năm 1959. Các thí sinh thuộc đội tuyển mỗi nước hoặc vùng lãnh thổ tập trung tại địa điểm tổ chức IMO (mỗi năm một thành phố khác nhau). Các chi phí cho thí sinh, bao gồm phí đi lại và chỗ ở, được ban tổ chức IMO của năm đó chi trả⁸. Kỳ thi này hướng đến học sinh cấp trung học phổ thông và yêu cầu thí sinh phải dưới 20 tuổi và không theo học tại bất kỳ cơ sở giáo dục đại học nào. Ban đầu, chỉ có các nước Đông Âu cử người tham gia, nhưng theo thời gian, người tham gia đã mở rộng lên trên 100 quốc gia⁹.

Thí sinh dự thi IMO thường được các nước lựa chọn trên cơ sở các cuộc thi khu vực và quốc gia (tối đa 6 thành viên mỗi nước). Các nước có quy mô và sự phổ biến các cuộc thi toán khác nhau, nên độ khó để trở thành thành viên đội tuyển IMO ở các nước khác nhau là khác nhau. Trong thực nghiệm, chúng tôi so sánh những thí sinh IMO dựa trên thành tích trong kỳ thi. Điều này giúp làm giảm tác động của sự khác biệt trong chọn đội tuyển này. Một số thí sinh tham gia vài năm liên tiếp, nhưng phần lớn các thí sinh chỉ tham gia một năm duy nhất. Họ giải tổng cộng 6 bài toán về hình học, số học, đại số và tổ hợp. Mỗi bài toán được 7 điểm, và thí sinh có thể đạt tối đa 42 điểm. Các huy chương (vàng, bạc hoặc đồng) được trao dựa

⁷ Ví dụ, Borjas và Doran (2012) nghiên cứu năng suất của các nhà toán học Mỹ sau ảnh hưởng lớn của các nhà toán học Nga đến Hoa Kỳ. Một số khác nghiên cứu về các yếu tố quyết định năng suất của các nhà khoa học nổi tiếng, như Azoulay và cộng sự 2010, Waldinger 2010, 2012; Azoulay và cộng sự 2011; Jacob và Lefgren 2011; Ganguli 2017; Iaria, Schwarz, và Waldinger 2018. Xem Stephan 2012 để tìm hiểu về một khảo sát tổng quát hơn của lĩnh vực kinh tế học khoa học.

⁸ Thông tin này không hoàn toàn chính xác. Hiện nay chi phí đi lại của mỗi đoàn do nước đó tự chi trả.

⁹ Anh và Pháp đã tham gia từ năm 1967, Mỹ tham gia từ năm 1974, và Trung Quốc từ năm 1985, họ tham gia thường xuyên kể từ đó. Các quốc gia có dân số hơn 20 triệu dân chưa bao giờ tham dự là Ethiopia, Sudan và Cộng hòa Dân chủ Congo.

trên tổng số điểm đạt được qua các bài toán. Chưa quá một nửa số thí sinh của cuộc thi được nhận huy chương.

Một quy trình giống nhau được sử dụng hàng năm để tạo ra một bộ câu hỏi mới với độ khó phù hợp và để chấm điểm. Tuy nhiên, những người quan sát có một cảm giác chung rằng IMO đang trở nên khó dần qua từng năm.

II. Dữ liệu

Nhiều nguồn dữ liệu khác nhau đã được kết hợp với nhau để tạo ra cơ sở dữ liệu gốc của bài báo này. Chúng tôi đã trích xuất dữ liệu của tất cả các thí sinh tham dự IMO từ trang web chính thức của IMO (<http://www.imo-official.org>) và sau đó chúng tôi chọn ra những người đã tham gia dự thi từ năm 1981 đến năm 2000. Đối với một số thí sinh tham gia nhiều hơn một năm, chúng tôi chỉ sử dụng kết quả tham gia năm cuối cùng. Chúng tôi thu được danh sách gồm 4,710 thí sinh.

Sau đó chúng tôi xây dựng các kết quả hiệu suất dài hạn trong toán học của các thí sinh này sử dụng dữ liệu tiến sỹ và dữ liệu trắc lượng thư mục (bibliometric data). Đối với các luận văn tiến sỹ, chúng tôi dựa trên Dự án Phả hệ Toán học (Mathematics Genealogy Project), một dự án tình nguyện có mục đích “tổng hợp thông tin của tất cả các nhà toán học trên thế giới”¹⁰. Dự án này đã đạt được một phạm vi bao phủ rộng rãi, với thông tin của hơn 200,000 nhà toán học. Đối với mỗi nghiên cứu sinh đã bảo vệ, dự án này đưa thông tin về trường đại học, giảng viên hướng dẫn, năm tốt nghiệp và tên luận án. Đối với dữ liệu trắc lượng thư

mục, chúng tôi sử dụng dữ liệu MathSciNet do *Mathematical Reviews* tạo ra dưới sự bảo trợ của Hội Toán học Mỹ. Trong khi cơ sở dữ liệu xuất bản phong phú hơn, các kết quả của chúng tôi dựa trên tổng số lượng ấn phẩm và trích dẫn được tổng hợp bởi MathSciNet (và phản ánh việc lọc tác giả thủ công của *Mathematical Reviews*). Cả hai cơ sở dữ liệu này đã được sử dụng trong các nghiên cứu trước đó (Borjas và cộng sự 2012, 2015a, 2015b; Agrawal, Goldfarb, và Teodoridis 2016). Chúng tôi bổ sung vào dữ liệu ấn phẩm bằng cách thu thập danh sách các nhà toán học được mời báo cáo tại Đại hội Toán học Quốc tế (ICM) và đánh dấu những người trong đó đã từng tham dự kỳ thi IMO. Được mời báo cáo tại ICM là vinh dự lớn của các nhà toán học, và chúng tôi sử dụng điều đó như một thước đo cho sự công nhận của cộng đồng, độc lập với trắc lượng thư mục. Tương tự, chúng tôi ghi lại những người từng tham gia IMO được nhận huy chương Fields.

Trong khi phần lớn bài báo tập trung vào dữ liệu tiến sỹ và trắc lượng thư mục, chúng tôi cũng đã tìm thủ công tên của các thí sinh IMO trên mạng để xây dựng các thước đo cho công việc hiện tại. Thu thập phần thông tin này đặc biệt tốn nhiều thời gian, nên thông tin chỉ được thu thập cho các thí sinh IMO đạt huy chương (2,272 thí sinh trong tổng số 4,710 thí sinh). Chúng tôi đã tìm hiểu xem liệu người đó có làm việc trong giới học thuật về toán học, giới học thuật ngoài ngành toán, làm việc trong ngành công nghệ, hoặc không có hồ sơ trực tuyến.

Cơ sở dữ liệu cuối cùng của chúng tôi bao gồm số lượng người tham gia IMO từ năm

¹⁰ Một người có thể lo lắng rằng phạm vi của Dự án Phả hệ Toán học có thể kém hơn tại các nước đang phát triển, điều này sẽ gây ra khó khăn cho việc so sánh giữa các quốc gia. Tuy nhiên, chúng tôi chỉ gặp rất ít các cá nhân có ấn phẩm toán học (hoặc được bổ nhiệm làm giảng viên toán) không được liệt kê trong dự án phả hệ này, và hầu hết họ đến từ các quốc gia phát triển.

¹¹ Chúng tôi tập trung vào nhóm thí sinh trong những năm này để đảm bảo rằng chúng tôi có thể tìm hiểu về các kết quả hoạt động của họ trong vòng ít nhất 15 năm sau khi tham gia IMO. Chín mươi phần trăm thí sinh IMO đã lấy được bằng tiến sỹ toán học trong vòng 13 năm kể từ năm cuối cùng họ tham gia IMO, không có bất kỳ sự khác

1981 đến năm 2000 (4,710 người)¹¹. Bên cạnh những thông tin khi tham gia IMO (năm, quốc gia, số điểm, loại huy chương), chúng tôi biết rằng họ có tốt nghiệp tiến sỹ trong ngành toán hay không, và nếu có, tốt nghiệp vào năm nào và ở trường nào, những ấn phẩm và trích dẫn của họ được thu thập cho tới năm 2015, người đó đã từng là diễn giả tại đại hội ICM hay không, hoặc có được trao giải thưởng Fields hay không. Đối với những thí sinh IMO có bằng tiến sỹ toán học, chúng tôi muốn tìm hiểu xem liệu người đó có tốt nghiệp từ trường đại học danh giá hay không; chúng tôi quyết định là “có” nếu người đó tốt nghiệp từ trường nằm trong nhóm mười trường có thứ hạng cao nhất trong Bảng xếp hạng Thượng Hải năm 2010 về toán.

Số liệu thống kê mô tả mẫu của chúng tôi có sẵn trong Bảng A1 Phụ lục trực tuyến. Khoảng 8% số thí sinh IMO đạt huy chương vàng, trong khi 16% đạt huy chương bạc và 24% đạt huy chương đồng; và hơn 10% khác nhận bằng khen danh dự. Khoảng 22% số thí sinh IMO có bằng tiến sỹ toán học; trong số đó khoảng một phần ba nhận bằng tiến sỹ từ những trường đại học nằm trong nhóm mười trường tốt nhất. 1% số thí sinh IMO về sau có báo cáo tại ICM, và 0.2% được nhận huy chương Fields. Tổng cộng các thí sinh IMO trong mẫu của chúng tôi đã công bố trên 15,000 ấn phẩm và nhận được nhiều hơn 160,000 trích dẫn.

Chúng tôi thay quốc gia xuất thân của một cá nhân bằng nước mà cá nhân đó đại diện tại IMO. Khoảng một nửa số thí sinh đến từ các nước có thu nhập cao (theo phân loại của Ngân hàng Thế giới năm 2000), 18% đến từ nhóm các nước có thu nhập trên mức trung bình, 23% từ nhóm các nước có thu nhập dưới mức trung bình, và 11% đến từ những nước có thu nhập thấp.

Cuối cùng, chúng tôi tạo ra một tập dữ liệu phụ bao gồm tất cả các nghiên cứu sinh đã tốt nghiệp tiến sỹ (không kể việc tham dự IMO) được đề cập đến trong Dự án Phả hệ Toán học từ năm 1990 đến năm 2010 ($N = 89,086$). Đối với những người đó, chúng ta biết về trường đại học và năm họ tốt nghiệp, họ xuất bản bao nhiêu bài báo và nhận được bao nhiêu trích dẫn (dữ liệu từ MathSciNet), và họ có báo cáo tại ICM hoặc được nhận giải thưởng Fields hay không.

III. Điểm IMO liên quan thế nào đến hiệu suất làm việc lâu dài?

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu liệu tài năng ở tuổi thiếu niên – thể hiện bằng điểm thi IMO – có tương quan với hiệu suất dài hạn trong lĩnh vực toán học không? Một mặt, việc mong đợi thành tích đạt được tại IMO có tương quan tích cực với việc trở thành một nhà toán học chuyên nghiệp, tạo ra tri thức toán, và đạt được các thành tựu toán học nổi bật là điều tự nhiên. Xét cho cùng, các bài toán trong kỳ thi IMO và nghiên cứu toán đều là hoạt động liên quan đến kỹ năng giải quyết vấn đề trong lĩnh vực toán. Hơn nữa, có rất nhiều bằng chứng mang tính giai thoại về các nhà toán học nổi tiếng đã dành được huy chương tại IMO.

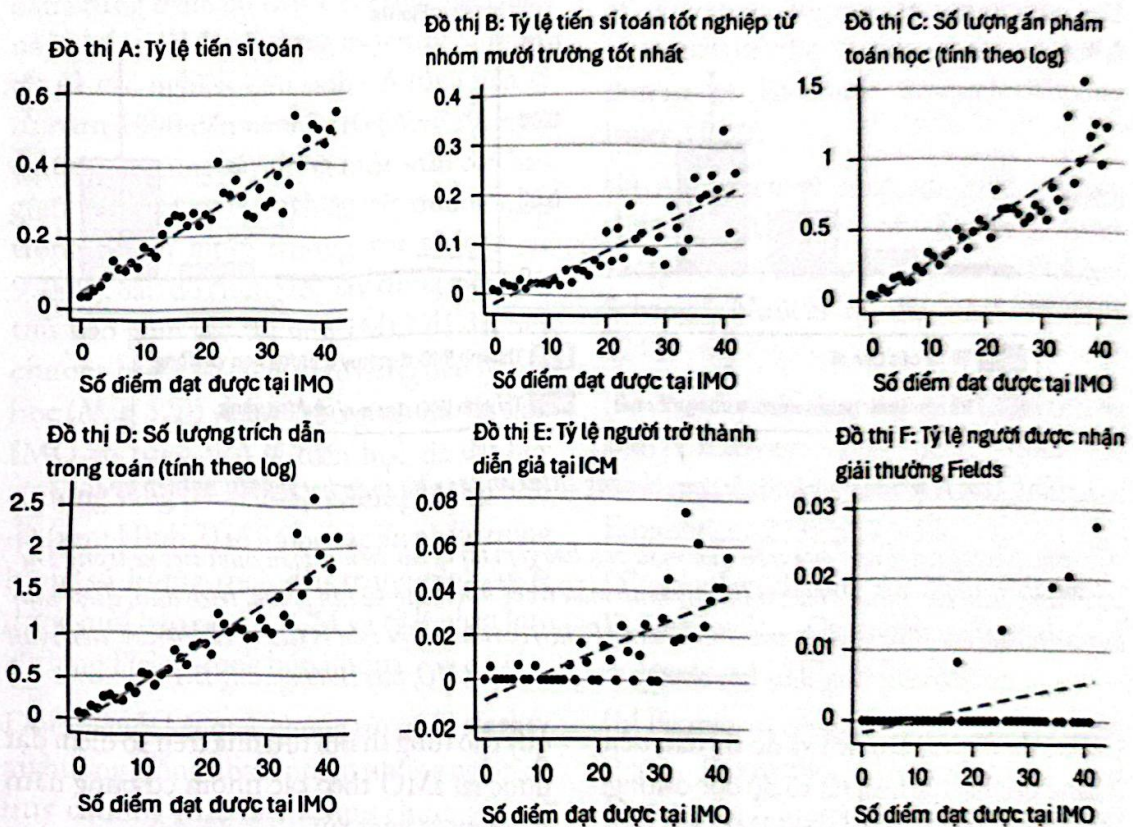
Tuy nhiên, mối liên hệ giữa điểm thi IMO và hiệu suất dài hạn lại không hiển nhiên như vậy. Nghiên cứu toán bao gồm nhiều hoạt động hơn là chỉ giải quyết vấn đề, ví dụ như khái quát hoá thành các khái niệm mới cũng như đặt ra các giả thuyết. Hơn nữa, các bài toán tại IMO rất khác so với các câu hỏi trong nghiên cứu do ta biết là chúng chắc chắn có lời giải và có thể giải được trong một khoảng thời gian ngắn mà không được tiếp cận tài liệu khác hoặc sự trợ giúp của các nhà toán học khác. Ngay cả khi tài năng thực sự quan trọng trong việc tạo ra tri thức, thì điểm thi IMO chưa chắc là thước đo tài năng tốt. Nếu

biệt mang tính hệ thống nào giữa các nhóm quốc gia có thu nhập khác nhau.

các yếu tố may mắn hay yếu tố bên ngoài tác động đến điểm thi IMO, điều này sẽ gây ra lỗi đo lường khi xem điểm thi IMO như một thước đo tài năng¹².

Chúng ta bắt đầu với các bằng chứng đồ họa: Hình 1 biểu thị thành tích trung bình đạt được của các thí sinh IMO bằng số điểm họ

đạt được tại IMO, cùng với một mô hình tuyến tính tương ứng được xếp chồng lên¹³. Sáu loại thành tựu khác nhau đã được đề cập: có bằng tiến sỹ toán học, có bằng tiến sỹ toán học từ một trường trong nhóm mười trường tốt nhất, số lượng các ấn phẩm toán học, số lượng trích dẫn, được mời báo cáo tại ICM, và nhận được huy chương Fields¹⁴.



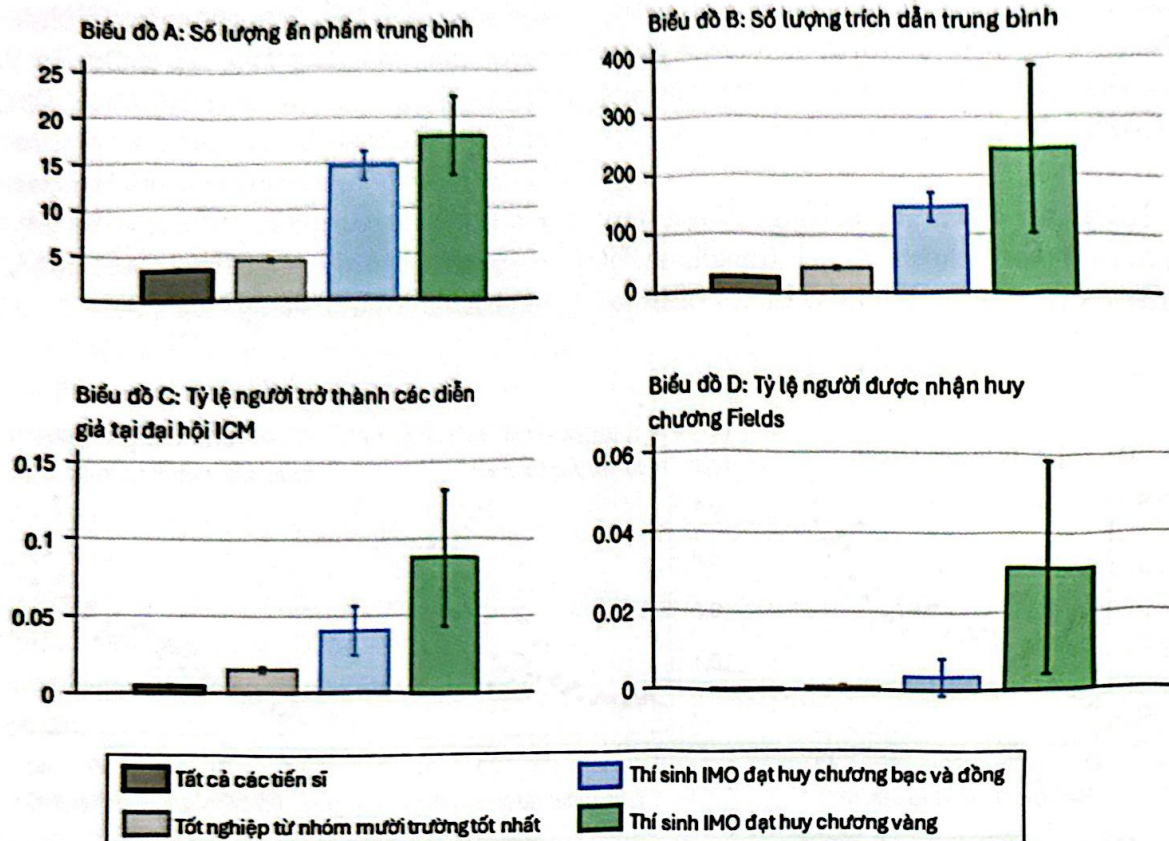
Hình 1. Mối quan hệ giữa điểm thi IMO và các thành tựu đạt được sau đó.

Lưu ý: Chúng tôi tính toán giá trị trung bình mẫu cho mỗi biến số trong sáu biến số chỉ thành tựu dựa trên số điểm đạt được tại IMO (đối với lượng ấn phẩm và trích dẫn, chúng tôi cộng thêm 1 trước khi tính log và sau đó tính giá trị trung bình mẫu). Tiếp theo, chúng tôi vẽ đồ thị dựa trên các kết quả nhận được tương ứng với điểm thi IMO. Đường hồi quy tuyến tính được vẽ bằng nét đứt.

¹²Chúng tôi cũng phải tính đến khả năng điểm thi IMO tương quan với hiệu suất nghiên cứu toán học ngay cả khi điểm thi IMO mang ít thông tin về tài năng. Trường hợp đó có thể xảy ra nếu thành tích tại IMO có quan hệ nhân quả với hiệu suất nghiên cứu. Trong Phụ lục trực tuyến, chúng tôi trình bày kết quả về một sự gián đoạn bởi quy khi so sánh những cá nhân suýt đạt ngưỡng huy chương và suýt trượt ngưỡng huy chương.

¹³Hình này, cũng như các hình khác trong bài báo sử dụng sơ đồ Stata "plotplain" được phát triển bởi Daniel Bischof (tham khảo Bischof 2017).

¹⁴Chúng tôi định nghĩa nhóm mười trường tốt nhất dựa trên bảng xếp hạng Thượng Hải về toán học năm 2010. Các trường này bao gồm Princeton, Berkeley, Harvard, Stanford, Cambridge, Paris 6, Oxford, Học viện Công nghệ Massachusetts-MIT, Paris 11 và Đại học California Los Angeles-UCLA.



Hình 1. So sánh những người đạt huy chương IMO với các nhà toán học chuyên nghiệp khác.

Ghi chú: Những con số này dựa trên một mẫu phụ bao gồm tất cả các tiến sĩ toán được liệt kê trong Dự án Phả hệ Toán học. Biểu đồ hiển thị trung bình mẫu trong bốn thống kê (ấn phẩm, trích dẫn, được mời báo cáo tại đại hội ICM và được trao huy chương Fields) cho bốn nhóm tiến sĩ (tất cả các tiến sĩ, tiến sĩ từ mười trường hàng đầu, huy chương đồng hoặc bạc IMO, huy chương vàng IMO).

Các đồ thị ở hàng đầu tiên và đồ thị đầu tiên ở hàng thứ hai thể hiện rất rõ độ dốc dương: các thí sinh IMO với điểm thi IMO cao hơn có khả năng cao hơn trong việc lấy được bằng tiến sĩ toán học hoặc lấy được bằng tiến sĩ toán học từ các trường tốt nhất, và họ tạo ra nhiều tri thức trong toán hơn như trong đồ thị số lượng ấn phẩm và trích dẫn. Hai đồ thị cuối ở hàng thứ hai biểu thị các thành tựu nổi bật trong toán học. Theo định nghĩa, đây là những thành tựu hiếm có và các đồ thị kém trơn tru hơn, nhưng có xu hướng chung tương tự nhau.

Chúng tôi cũng nghiên cứu mối liên hệ giữa số điểm đạt được tại IMO và thành tựu đạt được sau đó cho từng cá nhân theo mô hình hồi quy. Chúng tôi tiến hành mô hình hồi

quy cho từng thành tựu dựa trên số điểm đạt được tại IMO theo các nhóm có cùng năm thi và nước xuất xứ:

$$Y_{it} = \beta \cdot \text{IMOScore}_{it} + \delta X_{it} + \epsilon_{it}, \quad (1)$$

trong đó i là chỉ số mỗi thí sinh IMO và t là năm thi, Y_{it} là biến chỉ một trong sáu thành tựu đã được nhắc đến ở trên, IMOScore_{it} là số điểm đạt được tại IMO, và X_{it} bao gồm hằng số ảnh hưởng theo nhóm (năm thi) và hằng số ảnh hưởng của nước xuất xứ.

Các kết quả (xem Bảng A2 Phụ lục trực tuyến) cho thấy rằng với 1 điểm cao hơn đạt được tại IMO (trên tổng số 42 điểm – trung bình mẫu là 16 và độ lệch chuẩn là 11) có liên quan đến việc tăng 1% khả năng có bằng tiến sĩ, tăng 2,6% số lượng ấn phẩm, tăng 4,3%

số lượng trích dẫn, tăng 0,1% khả năng được mời báo cáo tại ICM, và tăng 0,03% khả năng được nhận huy chương Fields. Hơn nữa, số điểm đạt được đối với những bài khó giúp dự đoán dễ hơn các thành tựu trong tương lai so với số điểm đạt được từ các bài dễ tại IMO (Bảng A3 Phụ lục trực tuyến).

Chúng tôi cũng so sánh các thí sinh IMO được nhận huy chương với các nhà toán học chưa từng tham dự IMO. Để thực hiện điều này, chúng tôi đã xây dựng một mẫu bao gồm tất cả các nghiên cứu sinh có bằng tiến sĩ từ năm 1990 đến năm 2010 ($N = 89,068$). Chúng tôi cũng xây dựng một mẫu con bao gồm các tiến sĩ tốt nghiệp từ trường nằm trong nhóm mười trường tốt nhất ($N = 9,049$). Sau đó chúng tôi xây dựng một mẫu thử bao gồm các thí sinh IMO đã đạt huy chương bạc hoặc đồng và có bằng tiến sĩ toán học ($N = 520$) và mẫu thử gồm các thí sinh IMO có bằng tiến sĩ toán học đã đạt huy chương vàng ($N = 145$). Chúng tôi lập biểu đồ (xem Hình 2) số lượng các ấn phẩm trung bình, số lượng trích dẫn trung bình, tỷ lệ được mời báo cáo tại ICM và tỷ lệ nhận huy chương Fields trong bốn nhóm.

Đối với mỗi kết quả, chúng tôi quan sát thấy xu hướng giống nhau: nhóm những người có huy chương (đặc biệt là huy chương vàng) vượt trội hơn so với nhóm các tiến sĩ nói chung và nhóm các tiến sĩ tốt nghiệp từ các trường đại học hàng đầu. Trong khi nhóm các thí sinh đạt huy chương tại IMO xuất bản nhiều bài báo hơn và nhận được nhiều trích dẫn hơn so với các nhóm khác, chúng tôi nhận thấy có một cách biệt rất lớn khi so sánh về các thành tựu nổi bật như được mời báo cáo tại ICM hoặc được trao huy chương Fields. Xác suất có điều kiện rằng một người có huy chương vàng tại IMO sẽ được trao huy chương Fields cao gấp 50 lần xác suất đó của một tiến sĩ tốt nghiệp từ nhóm mười chương trình tiến sĩ toán tốt nhất. Bằng chứng này cho thấy rằng tài năng

có thể còn quan trọng hơn đối với việc đạt được những thành tựu nghiên cứu khoa học đặc biệt so với việc sáng tạo trí thức thông thường.

Tài liệu

- [1] Aghion và cộng sự, 2017 “The Social Origins of Inventors.” National Bureau of Economic Research Working Paper 24110.
- [2] Akcigit và cộng sự, 2017 “The Rise of American Ingenuity: Innovation and Inventors of the Golden Age.” National Bureau of Economic Research Working Paper 23047.
- [3] Andreescu và cộng sự, 2008 “Cross-Cultural Analysis of Students with Exceptional Talent in Mathematical Problem Solving.” Notices of the AMS 55 (10): 1248 – 60.
- [4] Azoulay và cộng sự, 2011 “Incentives and Creativity: Evidence from the Academic Life Sciences.” RAND Journal of Economics 42 (3): 527 – 54.
- [5] Azoulay và cộng sự, 2010 “Superstar Extinction.” Quarterly Journal of Economics 125 (2): 549 – 89.
- [6] Baumol và cộng sự, 1990 “Entrepreneurship: Productive, Unproductive, and Destructive.” Journal of Political Economy 98 (5): 893 – 921.
- [7] Bell và cộng sự, 2019 “Who Becomes an Inventor in America? The Importance of Exposure to Innovation.” Quarterly Journal of Economics 134 (2): 647 – 713.
- [8] Bloom và cộng sự, 2017 “Are Ideas Getting Harder to Find?” National Bureau of Economic Research Working Paper 23782.
- [9] Borjas và cộng sự, 2012 “The Collapse of the Soviet Union and the Productivity of American Mathematicians.” Quarterly Journal of Economics 127 (3): 1143 – 1203.
- [10] Borjas và cộng sự, 2015a “Cognitive

Mobility: Labor Market Responses to Supply Shocks in the Space of Ideas." *Journal of Labor Economics* 33 (S1): S109 – 45.

[11] Borjas và cộng sự, 2015b "Which Peers Matter? The Relative Impacts of Collaborators, Colleagues, and Competitors." *Review of Economics and Statistics* 97 (5): 1104 – 17.

[12] Cox, 1926 *Genetic Studies of Genius. II. The Early Mental Traits of Three Hundred Geniuses*. Stanford: Stanford University Press.

[13] Fu và cộng sự, 2012] "Incentivizing R&D: Prize or Subsidies?" *International Journal of Industrial Organization* 30 (1): 67 – 79.

[14] Hsieh và cộng sự, 2019] "The Allocation of Talent and U.S. Economic Growth." *Econometrica* 87 (5): 1439 – 74.

[15] Jones, 2002] "Sources of US Economic Growth in a World of Ideas." *American Economic Review* 92 (1): 220 – 39.

[16] Kahn và cộng sự, 2016 "How Important Is US Location for Research in Science?" *Review of Economics and Statistics* 98 (2): 397 – 414.

[17] Kremer và cộng sự, 2010 "Incentivizing Innovation: Adding to the Tool Kit." *Innovation Policy and the Economy* 10 (1): 1 – 17.

[18] Ugarov, 2019 "Talent Misallocation across Countries: Evidence from Educational Achievement Tests." https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db_name=SED2019&paper_id=1466.

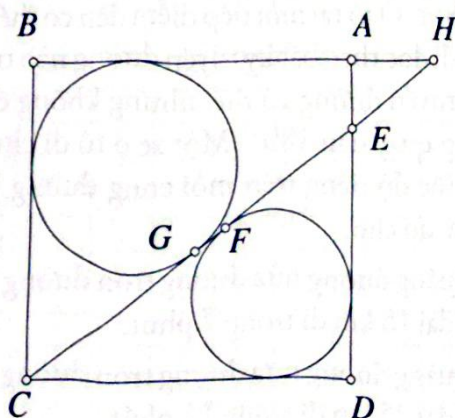
[19] Williams, 2012 "Innovation Inducement Prizes: Connecting Research to Policy." *Journal of Policy Analysis and Management* 31 (3): 752 – 76.

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải các bài toán trong kỳ thi toán Sao chổi Tím (Purple Comet) cấp THCS năm 2024 đăng trong số báo 6/2024.

OC73. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 20$ và $AD = 19$. Điểm E nằm trên cạnh AD với $AE = 4$. Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác CDE tiếp xúc với CE tại F . Đường tròn tiếp xúc với AB, BC và đồng thời tiếp xúc với CE tại G . Khoảng cách FG có thể viết được dưới dạng $\frac{m}{n}$, trong đó m và n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tìm $m + n$.

Lời giải. Gọi H là giao điểm của CE và AB .



TA dễ nhận thấy các tam giác vuông CDE, HAE, HBC đôi một đồng dạng với nhau. Tam giác CDE có tỷ lệ các cạnh $DE : CD : EC$ là $3 : 4 : 5$. Từ đó ta tính được

$$CE = 25, AH = \frac{16}{3}, EH = \frac{20}{3}.$$

Xét đường tròn nội tiếp tam giác CDE ta có

$$CF = \frac{CD + CE - DE}{2} = 15.$$

Xét đường tròn nội tiếp tam giác BCH ta có

$$CG = \frac{CH + BC - BH}{2} = \frac{38}{3}.$$

Như vậy khoảng cách cần tìm là $FG = CF - CG = \frac{7}{3}$. Tổng cần tìm là $7 + 3 = 10$.

OC74. Tìm số cặp có thứ tự (A, B) gồm 2 tập hợp $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ thỏa mãn số phần tử của tập A cộng với số phần tử của tập hợp B là chẵn.

Lời giải. Để chọn một cặp có thứ tự (A, B) thỏa mãn

$$A \subseteq B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

ta xem xét các lựa chọn cho một phần tử của $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mỗi phần tử có thể có 3 khả năng:

- Nằm trong cả A và B ;
- Chỉ nằm trong B mà không nằm trong A ;
- Không nằm trong cả A lẫn B .

Như vậy có tất cả $3^6 = 729$ cặp có thứ tự (A, B) . Đối với mỗi tập con A , số lượng tập B chứa nó có chẵn phần tử và lẻ phần tử là bằng nhau ngoại trừ một trường hợp $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Do đó, phải có $\frac{729 - 1}{2} + 1 = 365$ cặp có thứ tự mà trong đó số phần tử của tập A cộng với số phần tử của tập B là chẵn.

OC75. Một đường ống dài 25 mét nối hai hồ chứa được tạo thành từ các đoạn 2 mét và 3 mét xen kẽ nhau: 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3. Giả sử ba trong số mười đoạn này được chọn ngẫu nhiên và bỏ ra khỏi đường ống. Khi đó có các số nguyên dương m và n nguyên tố cùng nhau, sao cho $\frac{m}{n}$ là xác suất để ba đoạn đó có thể được lắp lại vào đường ống sao cho không có đoạn nào trong ba đoạn được lắp vào vị trí ban đầu và không có đoạn nào trong số bảy đoạn ống còn lại phải di chuyển. Các đoạn 2 mét và 3 mét không nhất thiết phải xếp xen kẽ trong cách bố trí mới. Tìm $m + n$.

Lời giải. Nếu không có đoạn nào trong ba đoạn bị bỏ ra nằm cạnh nhau, khi đó để lắp

lại ba đoạn đó sao cho không có đoạn nào ở vị trí ban đầu, thì cả ba đoạn phải có cùng độ dài.

Nếu có hai đoạn nằm cạnh nhau và đoạn thứ ba thì không, khi đó hai đoạn nằm cạnh nhau luôn có độ dài khác nhau và một trong số chúng có cùng độ dài với đoạn không nằm cạnh nhau. Do đó, hai đoạn có độ dài bằng nhau có thể đổi chỗ cho nhau, và sau đó hai đoạn nằm cạnh nhau cũng có thể đổi chỗ cho nhau sao cho không có đoạn nào trong ba đoạn nằm ở vị trí ban đầu.

Trường hợp cuối cùng, nếu cả ba đoạn bị bỏ ra đều nằm cạnh nhau, ta có thể hoán vị vòng quanh các đoạn này di chuyển mỗi đoạn đến một vị trí mới. Do đó, cách duy nhất để các đường ống không thể được lắp lại theo cách mong muốn là không có đoạn nào trong ba đoạn nằm cạnh nhau và các đoạn đó không phải tất cả đều có cùng độ dài.

Cho ba đoạn được chọn nằm ở vị trí a, b và c trong đó $1 \leq a < b < c \leq 10$ với $b - a > 1$ và $c - b > 1$. Khi đó $1 \leq a < b - 1 < c - 2 \leq 8$, do đó ta có $\binom{8}{3} = 56$ cách để chọn a, b và c như vậy. Trong số 56 cách chọn này, có $\binom{5}{2} = 10$ cách để chọn ba đoạn đều dài 2 mét và $\binom{5}{2} = 10$ cách để chọn ba đoạn đều dài 3 mét. Do đó, có $56 - 2 \times 10 = 36$ cách để chọn ba đoạn không cạnh nhau và không cùng độ dài. Vì có $\binom{10}{3} = 120$ cách có xác suất như nhau để chọn ba đoạn, nên xác suất để chọn ba đoạn thỏa mãn đầu bài là

$$\frac{120 - 36}{120} = \frac{7}{10}.$$

Tổng số cần tìm là $7 + 10 = 17$.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc một số bài toán chọn lọc trong kỳ thi Olympic Toán Lâmônôxốp do trường Đại học Tổng hợp Quốc gia Mát-xcơ-va mang tên Lâmônôxốp tổ chức. Các bài toán sau dành cho học sinh khối lớp 9.

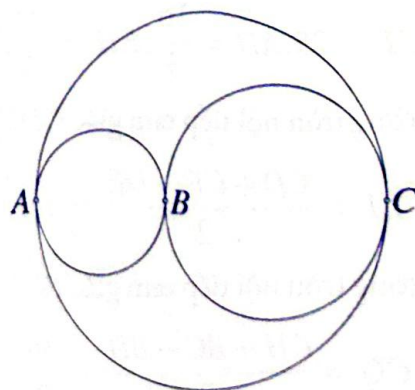
OC82. Giả sử m và n là các số nguyên phân biệt sao cho các số $(\frac{1}{m} - 2)$ và $(\frac{1}{n} - 2)$ là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 + ax + b = 0$ với các hệ số a, b nguyên. Tìm tất cả các giá trị có thể của biểu thức $a + b$.

OC83. Có 5 bạn nữ, 3 bạn nam và một giáo viên ngồi xem phim. Tất cả được ngồi ở một hàng ghế với số ghế được đánh số từ 1 đến 10. Do các bạn nữ thường nói chuyện với nhau, giáo viên quyết định rằng giữa hai bạn nữ bất kỳ phải có ít nhất một ghế trống, hoặc ghế do bạn nam hoặc giáo viên ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách ngồi khác nhau? (Hai cách ngồi là khác nhau nếu có ít nhất một người trong nhóm ngồi ở các ghế số khác nhau trong mỗi cách.)

OC84. Một trường đua xe gồm ba cung đường hình tròn, đôi một tiếp xúc nhau như hình vẽ. Ô tô tại mỗi tiếp điểm đều có thể tiếp tục đi dọc theo bất kỳ tuyến đường nào trong hai tuyến đường có thể, nhưng không được phép quay đầu 180° . Một xe ô tô di chuyển với tốc độ riêng trên mỗi cung đường hình tròn sao cho:

- Quãng đường nửa đường tròn đường kính AB dài 15 km đi trong 7 phút;
- Quãng đường nửa đường tròn đường kính BC dài 25 km đi trong 11 phút;
- Quãng đường nửa đường tròn đường kính AC đi trong 7 phút.

Biết rằng xe xuất phát từ điểm A và sau 1 giờ 25 phút dừng lại tại điểm A . Hỏi xe đã đi được bao nhiêu km?





GIẢI TRÍ VỚI MÊ CUNG

Phần I: Vẽ mê cung

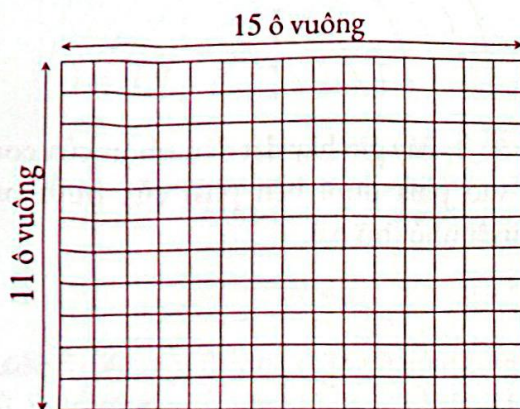
NGUYỄN THỤY VIỆT ANH¹

1. Vẽ mê cung

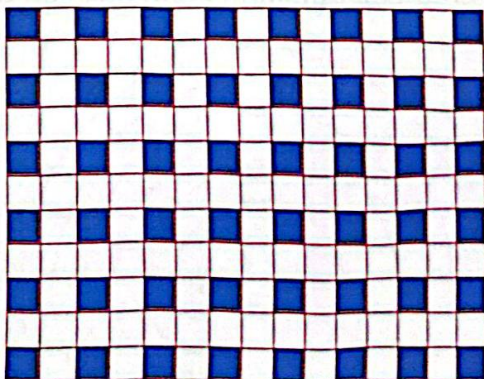
Cách 1:

Các bước thực hiện

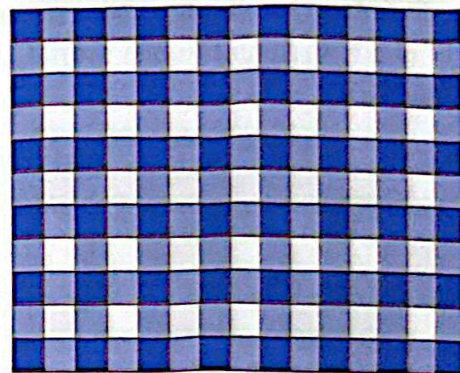
Bước 1: Dùng giấy và bút chì vẽ một hình chữ nhật có số ô vuông mỗi cạnh là lẻ, ví dụ:



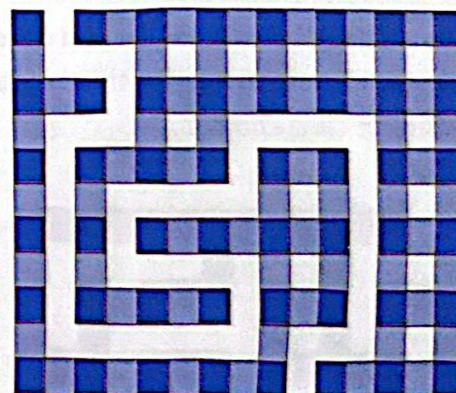
Bước 2: Dùng bút chì tô đậm các ô vuông xen kẽ trên mỗi hàng. Những hình vuông này sẽ trở thành một phần của bức tường trong mê cung.



Bước 3: Tô bóng rất nhẹ ở các ô vuông khác như hình minh họa bên dưới.



Những hình vuông này sẽ là một phần của lối đi hoặc một phần của bức tường trong mê cung. Các ô vuông màu trắng sẽ là một phần của đường đi.

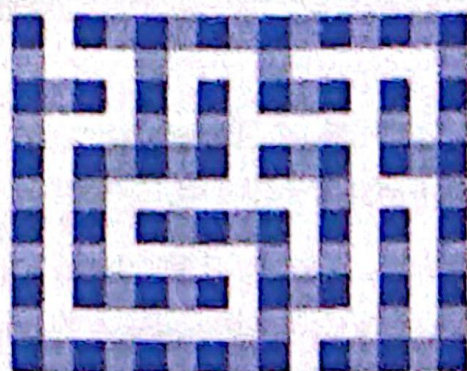


Bước 4: Đã đến lúc tạo ra con đường của mê cung! Chúng ta sẽ tạo lối vào bằng cách xóa một trong những hình vuông được tô bóng

¹ Quảng Trị.

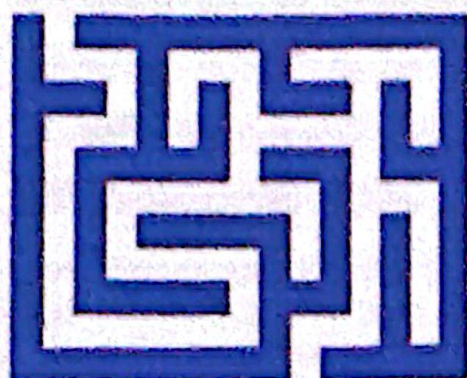
mở nhẹ để tạo một con đường quanh co dẫn đến lối ra như hình minh họa bên trên.

Bước 5: Bắt đầu tạo những con đường mới từ con đường đầu tiên này, nhưng hãy làm cho chúng dẫn đến ngõ cụt để đánh lừa mọi người.



Bước 6: Tô đậm các ô vuông có bóng mờ như còn lại như hình minh họa bên dưới. Cuối cùng đánh dấu lối vào và lối ra.

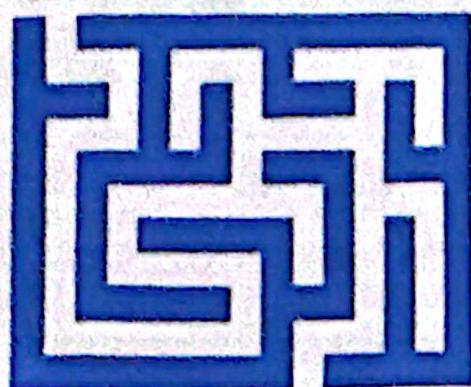
Start



Finish

Vậy là mê cung đã hoàn tất! Nếu như các em vẽ mê cung với quy mô càng lớn thì có thể tạo ra những mê cung khó hơn.

Start



Finish

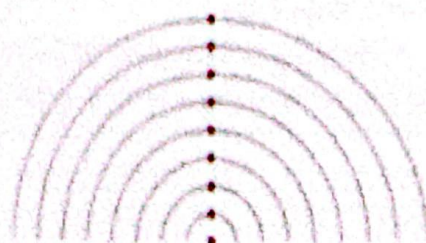
Cách 2:

Các bước thực hiện

Bước 1: Bắt đầu từ giữa trang giấy, các em hãy sử dụng bút chì và thước kẻ để tạo ra một hàng dọc với 9 chấm nhỏ, mỗi chấm nhỏ cách nhau 0.5 cm.



Bước 2: Sử dụng com- pa để vẽ các hình bán nguyệt đồng tâm như hình minh họa bên dưới.



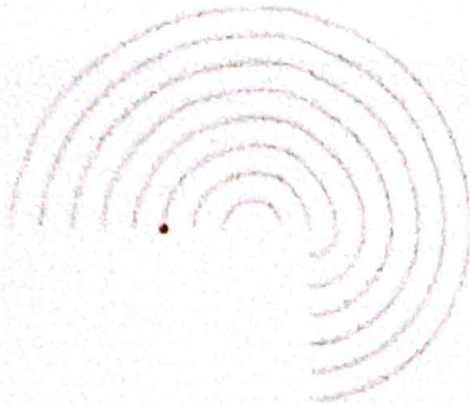
Bước 3: Bây giờ hãy đặt đầu nhọn của com- pa vào phía dưới bên phải của hình bán nguyệt nhỏ thứ hai.



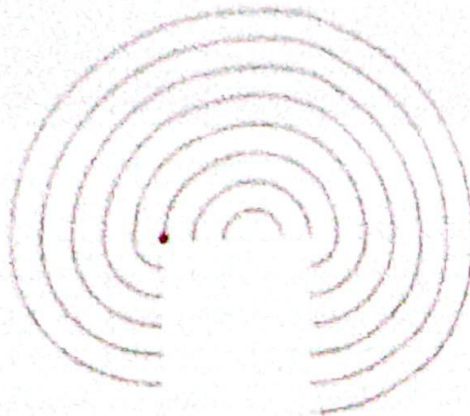
Lấy điểm này làm tâm và tạo một bộ 6 cung tròn đồng tâm như hình minh họa bên dưới.



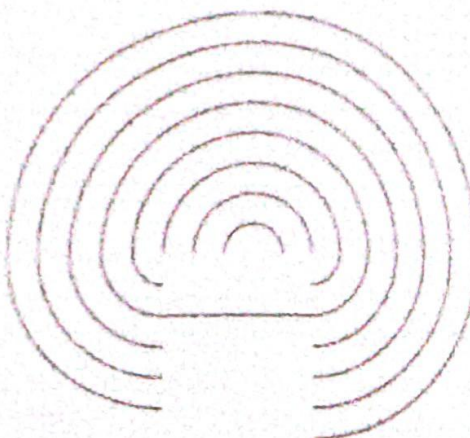
Bước 4: Tiếp theo, hãy đặt đầu nhọn của com-pa vào phía dưới bên trái của hình bán nguyệt nhỏ thứ ba.



Lần này các em hãy tạo một bộ gồm 5 cung tròn đồng tâm như hình minh họa.



Bước 5: Vẽ một đường thẳng nằm ngang để nối hai cung tròn như hình minh họa bên dưới.



Bước 6: Vẽ một đường thẳng đứng xuống từ phía bên trái của hình bán nguyệt nhỏ nhất.



Cần thận uốn cong đường thẳng này để nó chạm vào cung tròn lớn nhất ở phía dưới bên phải như hình minh họa.



Bước 7: Cuối cùng, hoàn thiện phần còn lại của mô hình như hình minh họa bên dưới.



Tài liệu tham khảo

<https://www.artfulmaths.com/mathematical-art-lessons.html>

NGHỆ THUẬT TRANH ĐÌNH CHỈ VÀ TOÁN

Phần I: Tranh đình chỉ với các phép toán đơn giản

HOÀNG THỊ HÀ MY¹

Tranh đình chỉ do Mary Everest Boole phát minh vào cuối thế kỷ 19 nhằm làm cho các ý tưởng toán học dễ tiếp cận hơn với trẻ em. Nó đã được phổ biến như một nghề thủ công mỹ nghệ vào cuối những năm 1960 thông qua các bộ dụng cụ và sách hướng dẫn cách làm. Gần đây, bộ môn nghệ thuật này dần phổ biến ở Việt Nam, các tác phẩm sẽ được tạo nên từ đình và chỉ.

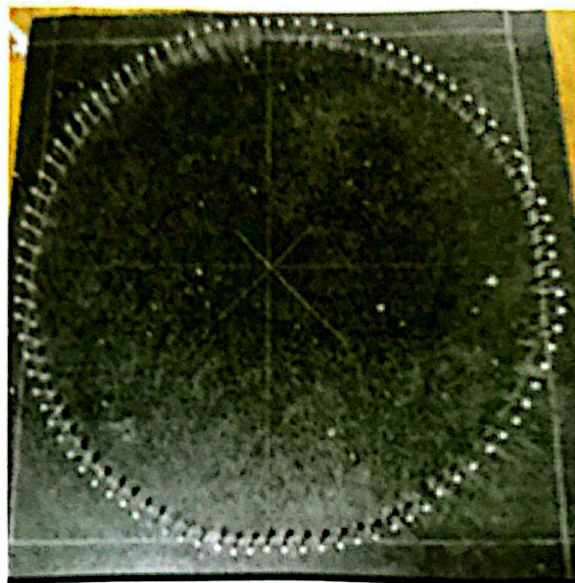
Trong phần đầu này, chúng ta sẽ thực hành trên bảng đình tròn với một số phép toán đơn giản, để cùng nhau khám phá vẻ đẹp của chúng qua nghệ thuật tranh đình chỉ nhé! Và, bây giờ, các bạn nhỏ hãy chuẩn bị cho mình một không gian yên tĩnh bên những cây đình và sợi chỉ mỏng nhiều màu sắc, cùng nhau thực hiện những “nhịp điệu toán học” để tạo nên một bức tranh thật mềm mại!

1. Phép cộng

Đầu tiên, chúng ta sẽ thực hành với phép toán cộng – một phép toán rất gần gũi và quen thuộc.

Chúng ta đang có một bảng đình tròn 96 đình (các bạn có thể đóng nhiều hơn hoặc ít hơn 96 đình đều được, tuy nhiên, khoảng cách giữa các đình đảm bảo từ 0,5cm–0,7cm thì bức tranh sẽ “mịn” và đẹp hơn).

Bây giờ, chúng ta sẽ thực hiện phép cộng trên bảng đình này. Trước hết, chúng ta sẽ chọn 1 cây đình (cây nào cũng được, vì là đường tròn nên tất cả các điểm đều đóng vai trò như nhau) để làm điểm xuất phát 0, sự tăng dần của các đình theo chiều kim đồng hồ sẽ tương ứng với sự tăng dần của số. Đầu tiên, ta thực hiện phép cộng một số với 35 (chẳng hạn) và tiến hành nối chỉ từ số đó tới kết quả của phép cộng.



Hình 1. Bảng đình.

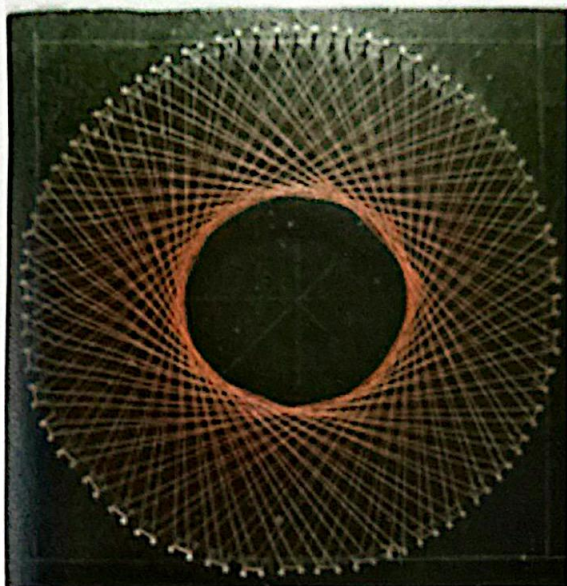
$0 + 35 = 35$	Nối 0 với 35
$1 + 35 = 36$	Nối 1 với 36
$2 + 35 = 37$	Nối 2 với 37
...	...
$60 + 35 = 95$	Nối 60 với 95
$61 + 35 = 96$	Nối 61 với 0
$62 + 35 = 97$	Nối 62 với 1

Như vậy, ta có những cặp “tình tiến” $(0, 35) - (1, 36) - (2, 37) - (3, 40) - \dots - (60, 95) - (61, 0) - (62, 1) - \dots - (95, 34)$, mỗi cặp sẽ tương ứng với một đoạn thẳng nối hai đầu đình. Trước khi đọc phần tiếp theo, các bạn thử nhắm mắt tưởng tượng trên bảng đình tròn mình sẽ làm thế nào để tạo nên những đoạn thẳng như vậy, một cách liên tục bằng một sợi chỉ duy nhất?

Bắt đầu sợi chỉ ở 0 – nối tới 35 (đoạn 0 – 35), đi tiếp tới 36, nối về 1 (đoạn 1 – 36), đi tiếp tới 2, nối đến 37 (đoạn 2 – 37), ..., cứ nhịp nhàng như vậy (vòng đình – nối tới – đi tiếp –

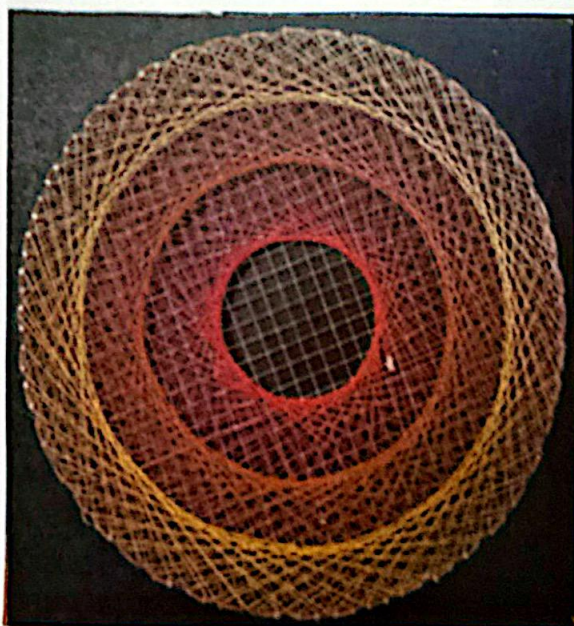
¹ Trường Đại học Quảng Nam.

nối về- đi tiếp- nối tới- đi tiếp- nối về...) cho đến hết một vòng tròn đỉnh. Các bạn có nhận ra “nhịp điệu” mình đang đi không? Đến đây, chắc hẳn là các bạn đã đoán được hình chúng ta nhận được rồi đúng không?



Hình 2. Phép cộng với 35.

Các bạn thử quan sát xem làm thế nào để phát hiện lỗi sai khi thực hiện? Và chúng ta muốn tạo hình tròn bên ngoài hình tròn cũ (bán kính lớn hơn, xa tâm hơn) thì sẽ thực hiện phép cộng với bao nhiêu?

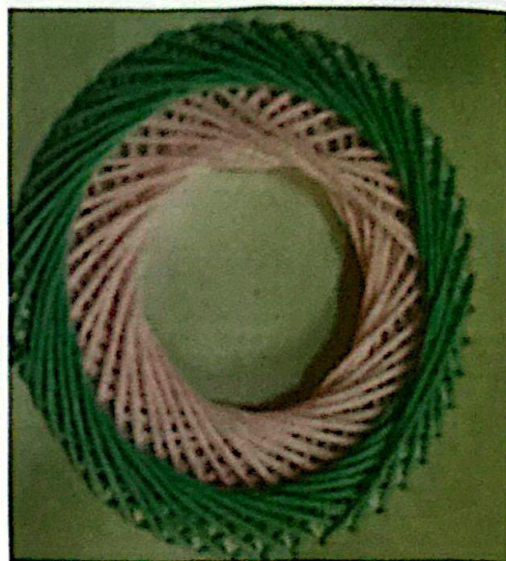


Hình 3. Phép cộng với ba số khác nhau.

Ta sẽ nhận thấy rằng nếu ta cộng với những

số khác nhau và nối chỉ đúng thì sẽ tạo nên những đường tròn có đường kính khác nhau và nếu cộng với số càng lớn thì vòng tròn càng gần tâm.

Hướng dẫn thêm: Với những bạn nhỏ, chưa đóng đỉnh được hoặc với các bạn không sẵn bảng gỗ và đỉnh thì chúng ta có thể thực hành trên các tấm xốp, kim to và sợi len nhỏ, sản phẩm nhận được cũng rất dễ thương nhé!



Hình 4. Phép cộng trên bảng xốp và len.

2. Bảng cửu chương

Bây giờ ta có bảng đỉnh tròn 60 đỉnh, chúng ta sẽ bắt đầu với bảng cửu chương 2. Ta cũng sẽ chọn một điểm cố định làm điểm 0, ta có:

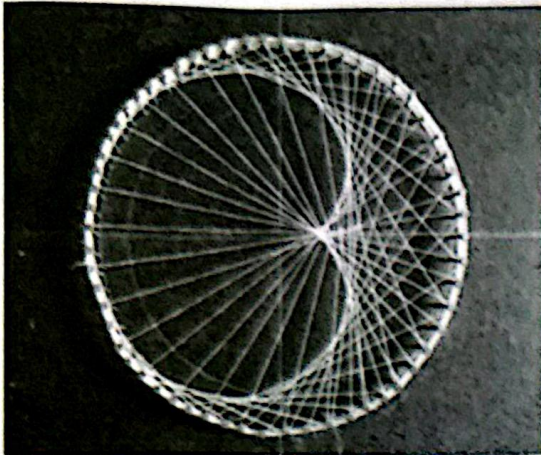
$$0 \times 2 = 0$$

$$1 \times 2 = 2$$

$$2 \times 2 = 4$$

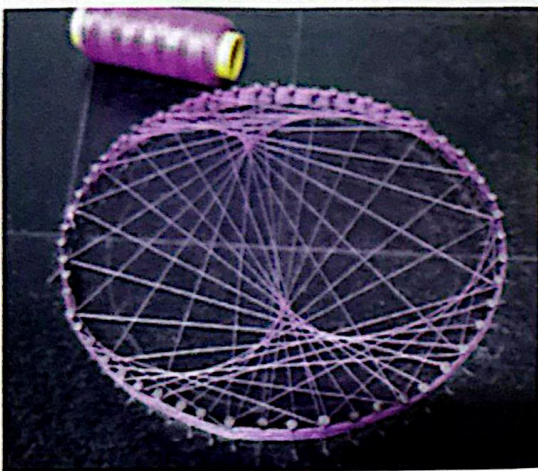
....

Ta cũng sẽ nối chỉ từ 1 số tới kết quả của phép nhân số đó với 2 như sau: bắt đầu sợi chỉ ở điểm 0, đi chỉ vòng ngoài đến 1, đi chỉ vòng trong đến 2 ($1 \times 2 = 2$), đi chỉ vòng trong đến 4 ($2 \times 2 = 4$), đi chỉ vòng ngoài đến 3, đi chỉ vòng trong đến 6 ($3 \times 2 = 6$), đi chỉ vòng ngoài đến 4, đi chỉ vòng trong đến 8 ($4 \times 2 = 8$), Giữ “nhịp điệu” đó cho đến hết vòng tròn. Các bạn có nhận ra hình tạo được không?



Hình 5. Bảng cửu chương 2 trên bảng 60 đỉnh.

Các bạn có nhận ra vị trí điểm xuất phát và vị trí của đầu tim đối xứng nhau không? Vì vậy, ta có thể chọn điểm xuất phát phù hợp với vị trí đầu tim mà ta muốn.



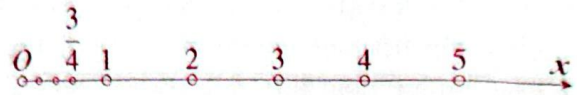
Hình 6. Bảng cửu chương 3 trên bảng gồm 60 đỉnh.

Thực hiện tương tự như vậy với bảng cửu chương 3, ta có 2 đầu tim. Thật kỳ diệu! Các bạn có thể dự đoán hình nhận được với bảng cửu chương 4, 5, ...?

3. Phân số

Khi biểu diễn phân số $\frac{a}{b}$ trên trục số thì b là số phần bằng nhau trên mỗi đoạn thẳng đơn vị (cách chia) và a là số phần ta sẽ lấy (cách lấy).

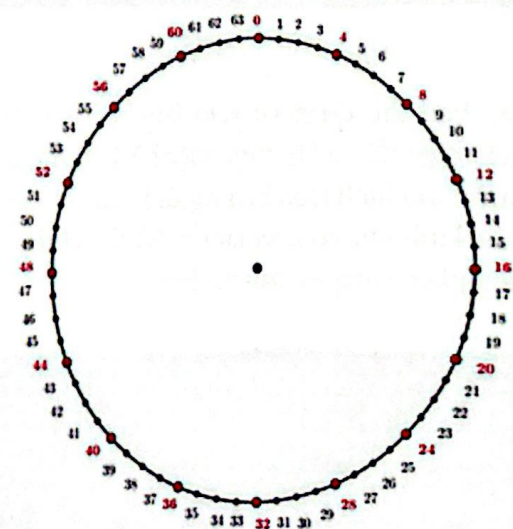
Chẳng hạn, biểu diễn phân số $\frac{3}{4}$ trên trục số như sau:



Hình 7. Biểu diễn phân số $\frac{3}{4}$ trên trục số.

Trong phần này ta sẽ xét những phân số có dạng $\frac{n}{n+1}$, trong đó n là một số tự nhiên tùy ý và ta xem mỗi đường tròn là một trục số được cuộn lại. Bây giờ ta sẽ xem điều thú vị cùng với những sợi chỉ và phân số nhé!

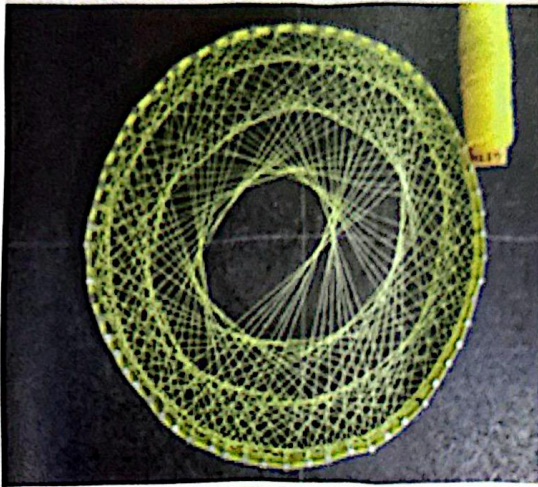
Chẳng hạn, ta xét phân số $\frac{3}{4}$, như vậy 4 là cách chia và 3 là cách lấy trên mỗi khoảng đơn vị, để thực hiện việc biểu diễn ta sẽ chọn bảng đỉnh có số đỉnh chia hết cho 4. Với bảng đỉnh tròn gồm 64 đỉnh (64 chia hết cho 4) – ta sẽ chia đường tròn thành 16 cung bằng nhau (Hình 8).



Hình 8. Chia đường tròn thành 64 điểm và 16 cung bằng nhau.

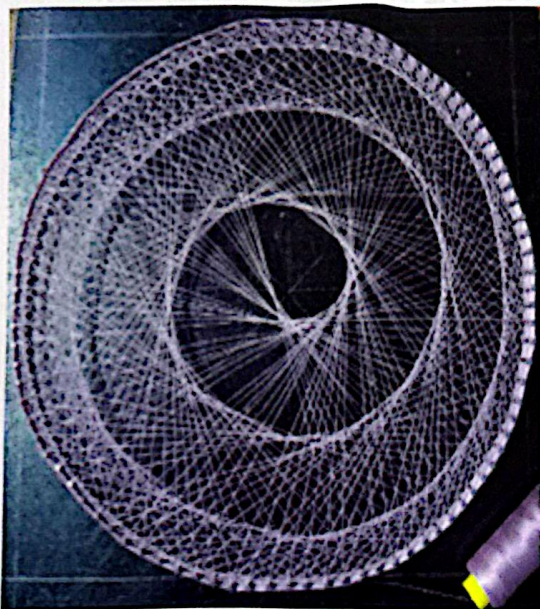
Ta có các cung tròn (0 – 4), (4 – 8), (8 – 12), ... Đầu tiên, ta sẽ chọn 1 điểm xuất phát cách điểm đầu tiên (điểm 0) của cung (0 – 4) một khoảng tùy ý, chẳng hạn là điểm 59, nối đến 0, đi sợi chỉ vòng ngoài lùi lại 60. Ta sẽ thực hiện lấy 3 phần của cung (0 – 4) bằng cách nối 60 – 1; 61 – 2; 62 – 3; bỏ 4. Tiếp tục lấy 3 phần của cung (4 – 8) bằng cách nối 63 – 5; 0 – 6; 1 – 7; bỏ 8. Cứ giữ “nhịp điệu”

như vậy cho đến hết, tạo hình nhận được sẽ là một đường xoắn ốc.



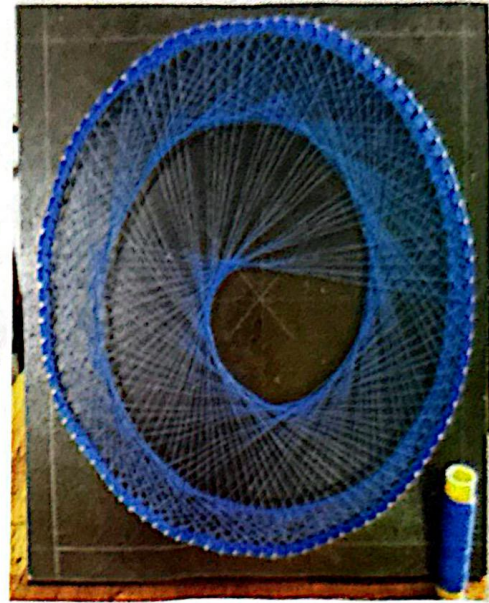
Hình 9. Biểu diễn phân số $\frac{3}{4}$ trên bảng 64 đinh.

Tương tự trên bảng gồm 96 đinh ta biểu diễn phân số $\frac{7}{8}$.



Hình 10. Biểu diễn phân số $\frac{7}{8}$ trên bảng 96 đinh.

Cũng trên bảng 96 đinh ta biểu diễn phân số $\frac{5}{6}$.



Hình 11. Biểu diễn phân số $\frac{5}{6}$ trên bảng 96 đinh.

Như vậy, trong suốt phần đầu này, ta đã thực hành trên bảng đinh tròn với một số phép toán đơn giản, từ đường tròn đã cho tạo ra nhiều đường tròn có đường kính khác nhau, bình trái tim, hình xoắn ốc.

Tài liệu tham khảo

[1] Rebecca Rapoport and J.A. Yoder. *Math games lab for kid*. First published in the United States of America in 2017 by Quarry Books.

[2] Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/String_art

[3] <https://momath.org/mathmonday/math-monday-12-card-star-puzzle/math-monday-beginning-of-a-string/>



TẤN CÔNG VUA

Chủ đề: Tiêu diệt quân phòng thủ

HOÀNG MINH HIẾU¹, BÙI VINH²

Trong cờ vua, có rất nhiều cách để kết thúc một ván cờ, và trong số đó, tấn công vua là một trong các kế hoạch cơ bản nhất mà có lẽ ai đã nghe qua. Đương nhiên, một bên tấn công sẽ có một bên phòng thủ, và những quân phòng thủ sẽ có vai trò ngăn chặn kế hoạch tấn công, khiến tấn công không là 1 kế hoạch đơn giản để thực hiện; ta cần vượt qua những quân phòng thủ này để hoàn thành thành công đợt tấn công. Và trong số đó, tiêu diệt quân phòng thủ (annihilation of defense), là một trong các cách cổ điển trong một cuộc tấn công.

Sau đây sẽ là một số ví dụ tham khảo cho chủ đề:

Ví dụ 1: F. De La Paz Perdomo – C. Pujols (Cuba 1993) (Hình 1)

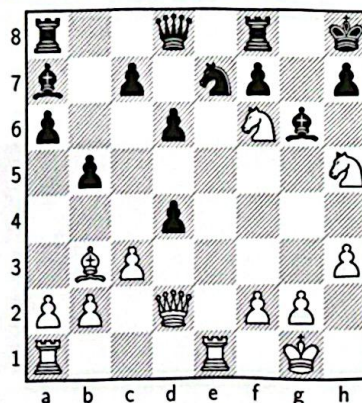
Nhìn qua thế cờ, trắng đang có rất nhiều quân đang nhắm đến vua đen, cụ thể: 2 mã f6 và h5, hậu d2, tượng b3, xe e1. Thoạt nhìn, kế hoạch 1.Hh6 rồi Hg7# có lẽ là khá hiển nhiên, nhưng điều này bị cản trở do quân mã ở e7 của đen:

1. Hh6 Mf5 và đen ngăn chặn được kế hoạch của trắng

Khi đó, quân mã ở e7 được gọi là quân phòng thủ (defense). Để thực hiện được kế hoạch,

trắng sẽ “tiêu diệt quân phòng thủ” với nước:

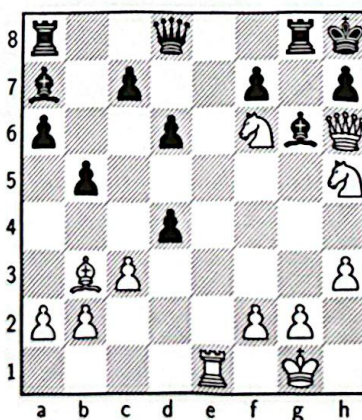
1. Xxe7 !! Hxe7 2. Xe1 Hd8



Hình 1: Trắng đi trước thắng.

1... Hxe1 2. Hxe1 + – và trắng ưu thế vật chất.

3. Hh6 trắng đe dọa 4. Hg7# Xg8 (Hình 2)



Hình 2: 3... Xg8.

¹ Kịện tướng FIDE (FM).

² Đại kiện tướng quốc tế.

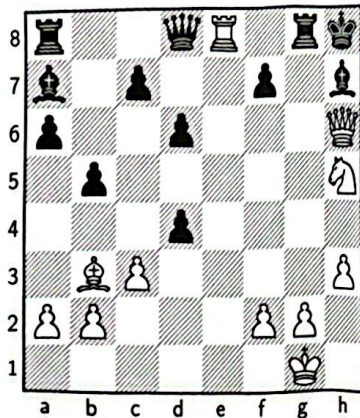
4. Mxh7 !! Txxh7 và ở đây trắng đã tìm ra nước cờ kết thúc then chốt

5. Xe8 !! (Hình 3)

Quân hậu đen đang giữ ô f6, cản kế hoạch chơi Hf6 của trắng.

Quân xe g8 đang giữ ô g7, cản kế hoạch chơi Hg7# của trắng.

Khi đó, quân Xe8 sẽ không thể bị ăn bởi cả 2 quân Hd8 và Xg8 – nếu ăn sẽ “bỏ rơi” vị trí mà nó trước đây đang chiếm đóng.

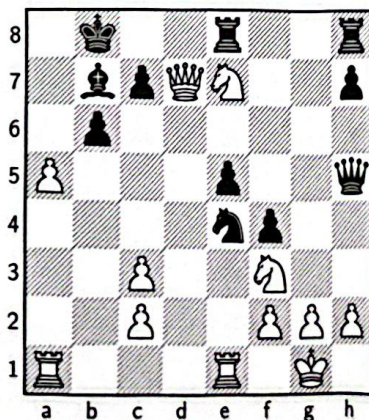


Hình 3: 5. Xe8 !!

Đồng thời, con Xe8 đang giăng Xg8 và Vh8 – Trắng dọa Hg7#, nên có lẽ đây sẽ là kết thúc của đen.

5... Hxe8 6. Hf6+ Xg7 7. Hxg7+ #
1 – 0

Ví dụ 2: Stalflinga – L. Grahn (Denmark 1976) (Hình 4)



Hình 4: Đen đi trước thắng

Thoạt nhìn, đòn thí 1... Hxf3 mở cột g và chuyển xe qua cột g chiếu cùng sự trợ giúp

của ...Ta6 sau khi trắng chạy vua qua f1 (Vf1). Nhưng kế hoạch này sẽ gặp 1 số rắc rối:

- Sau khi thí Hxf3, Xe đen sẽ gặp khó khăn trong việc sang cột g do có Mã ở e7 kiểm soát.

- Kế cả đen chấp nhận việc thí quân, sau 1... Hxf3 2. gxf3 Xhg8 3. Mxg8 Xexg8, Trắng không nhất thiết phải qua Vf1 mà 4. Hg4! sẽ đập tắt kế hoạch của đen đồng thời đơn giản hóa thế cờ.

Như vậy, ở thế cờ này, ta có thể coi quân Me7 và Hd7 là 2 quân bảo vệ (defense) – chúng cản trở và ngăn chặn kế hoạch của đen.

Vị trí của quân Hd7 sẽ cản trở việc tấn công rất nhiều, nhất là khi đen không còn hậu (sau khi thí vào f3).

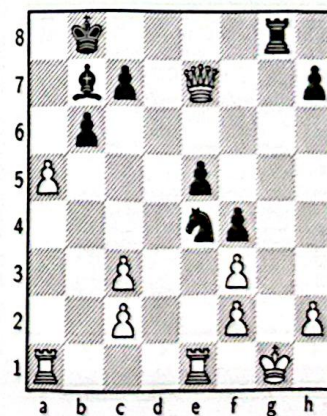
Như vậy, nước đi sau của đen là khá hiển nhiên: 1... Xxe7! 2. Hxe7

Nếu trắng rút hậu thay vì ăn xe, đen có thể chuyển xe qua cột g và tiếp tục cuộc tấn công cùng với ưu thế vật chất.

2... Hxf3 !! 3. gxf3

3. Xf1 (bảo vệ tốt f2) Xg8 4. g3 Mxg3 và các đe dọa chiếu hết không thể đỡ

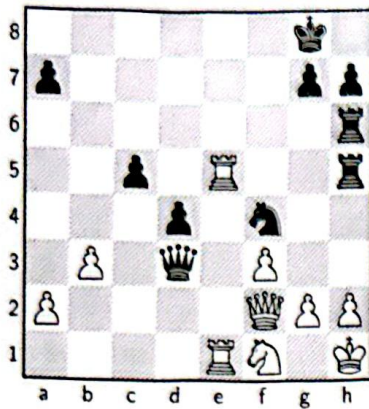
3... Xg8+ (Hình 5)



Hình 5: 3... Xg8+

4. Vf1 Ta6+ 5. c4 Txc4 6. Xe2 Md2 7. Ve1 Mxf3 8. Vd1 Xg1+ 9. Xe1 Xxe1 + # 0 – 1

Ví dụ 3: S. Zavgorodniy – Alexander Moiseenko (Ukraine 2005) (Hình 6)



Hình 6: Đen đi trước thắng

Một hình cờ khá đơn giản: Không khó để nhận ra rằng đen có 2 Xh6-h5 đều tấn công vào h2, nhưng đồng thời Mf1 của trắng đang bảo vệ h2. Như vậy, để thực hiện đòn tấn công, việc “tiêu diệt” quân Mf1 của trắng là cần thiết, khi đó:

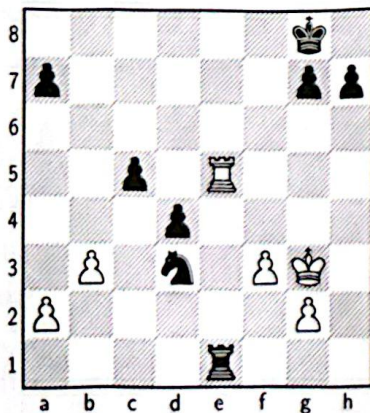
1... Hxf1+ !! 2. Hxf1

Nếu 2. Xxf1 ? thì 2... Xxh2+ 3. Vg1 Xh1 +#, Trắng thua nhanh.

2... Xxh2+ 3. Vg1 Xh1+ 4. Vf2 Xxf1+ 5. Vxf1

5. Xxf1 Md3+ 6. Vg3 Mxe5 - +

5... Xh1 6. Vf2 Md3 7. Vg3 Xxe1 - + (Hình 7) Đen hơn mã và ưu thế thắng



Hình 7: 7... Xxe1 - +

Lời bình: Qua các ví dụ, ta có thể thấy kỹ thuật tiêu diệt quân phòng thủ đôi khi sẽ giúp người chơi thực hiện được kế hoạch tấn công sau khi loại bỏ được “vật cản”. Đương nhiên, kỹ thuật này khá cơ bản và nên được

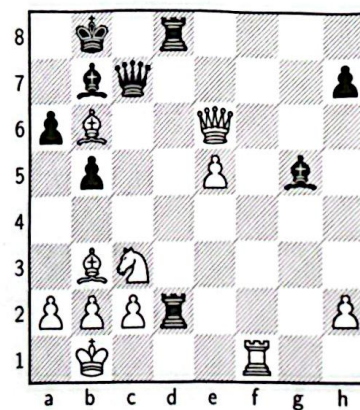
luyện thành phản xạ qua việc luyện tập và tiếp xúc nhiều hơn với các thế tấn công. Tuy nhiên, ta cần chú ý xem sau khi tiêu diệt quân phòng thủ (thường là chấp nhận hi sinh quân mạnh hơn của ta với quân phòng thủ), ta có kế hoạch thắng rõ ràng hay không, tránh việc thí quân để tấn công nhưng không mang lại thành quả “bù lỗ” với tổn thất của việc “tiêu diệt”.

Những kế hoạch thắng trên có thể giúp ta:

- Hơn quân và bù đắp “tổn thất” (có thể là thế cờ, vật chất, ...)
- Chiêu bí

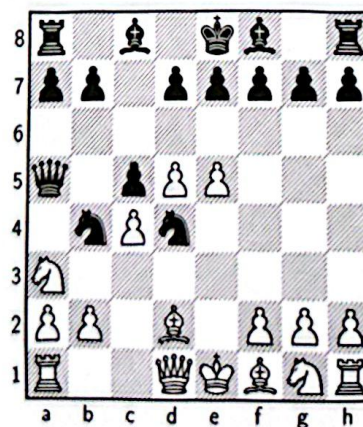
Bài tập:

Bài 1: I. Mádl – Chiburdanidze (Batumi 2000) (Đen đi trước thắng) (Hình 8)



Hình 8.

Bài 2: I. Girvalakis – I. Giakoumis (Athens 2005) (Đen đi trước thắng) (Hình 9)



Hình 9.

MVSM NƠI ƯƠM MẦM TOÁN HỌC TRẺ

Trong bối cảnh cách mạng công nghệ phát triển như vũ bão, thị trường lao động thế giới ngày càng thêm "khát" nhân sự giỏi Toán và Tiếng Anh.

Trường Toán Minh Việt - Minh Việt School of Math (MVSM) đã kết hợp với The Arts of Problem Solving (AoPS) - Chương trình giáo dục Toán học nâng cao số 1 tại Hoa Kỳ và hàng đầu thế giới, để mở ra mô hình học tập Toán ưu việt nhất.



SỨ MỆNH MVSM

Khơi dậy
Tinh yêu
Toán học

Khả năng
Sáng tạo

Tư duy
Logic

Nghe thuật
giải quyết
các vấn đề

CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO

- **Đối tượng:** Học sinh tiểu học và trung học cơ sở
- **Giáo trình học:** Chương trình Toán Beast Academy cho học sinh tiểu học và Chương trình Tiến Đại số - Honors Math 6 cho học sinh lớp 6
- **Phương thức:** Học Online cùng giáo viên Mỹ
- **Thời gian học:**
 - **Lớp Toán:** 1 buổi/ tuần, học phí từ 7 đến 10 triệu đồng/năm
 - **Lớp Tiếng Anh bổ trợ (từ Mẫu giáo đến lớp 9):** 4 buổi/tuần, 7 triệu/năm

Những học sinh xuất sắc của MVSM sẽ được tặng học bổng một phần hoặc toàn phần và được giới thiệu học Câu lạc bộ Toán Kỳ Lân với những Giáo sư Toán học hàng đầu Việt Nam.

NĂM HỌC 2024-2025

- **Khai giảng: 24/6/2024**

Phụ huynh có thể đăng ký cho con chỉ học Toán, chỉ học Tiếng Anh hoặc học cả Toán và Tiếng Anh.

CHƯƠNG TRÌNH TIẾNG ANH NHẬN ĐĂNG KÝ LIÊN TỤC TRONG SUỐT NĂM HỌC.

ĐỌC THÊM



**Beast
ACADEMY**
By Art of Problem Solving

ĐỒ VUI

Nguyễn Thanh Giang
(Hung Yên)

Tại Hội khoẻ Phù Đổng, vòng bán kết của một cự ly chạy có hai lượt chạy, mỗi lượt chọn ra bốn vận động viên có thành tích tốt nhất vào vòng chung kết. Ở lượt chạy đầu tiên đã xảy ra hiện tượng thủ vị sau:

- Các vận động viên mang số áo 1, 2, 3, 4 là những vận động viên về đích nhanh nhất và không có ai có số áo trùng với thứ tự về đích của mình;
- Vận động viên mang áo số 4 không về đích đầu tiên;
- Vận động viên mang áo số 3 có thứ tự về đích chính là số áo của vận động viên về đích đầu tiên.

Theo bạn các vận động viên có thứ tự về đích như thế nào nhỉ?

