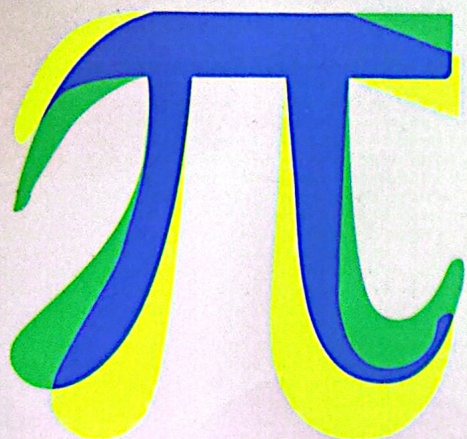


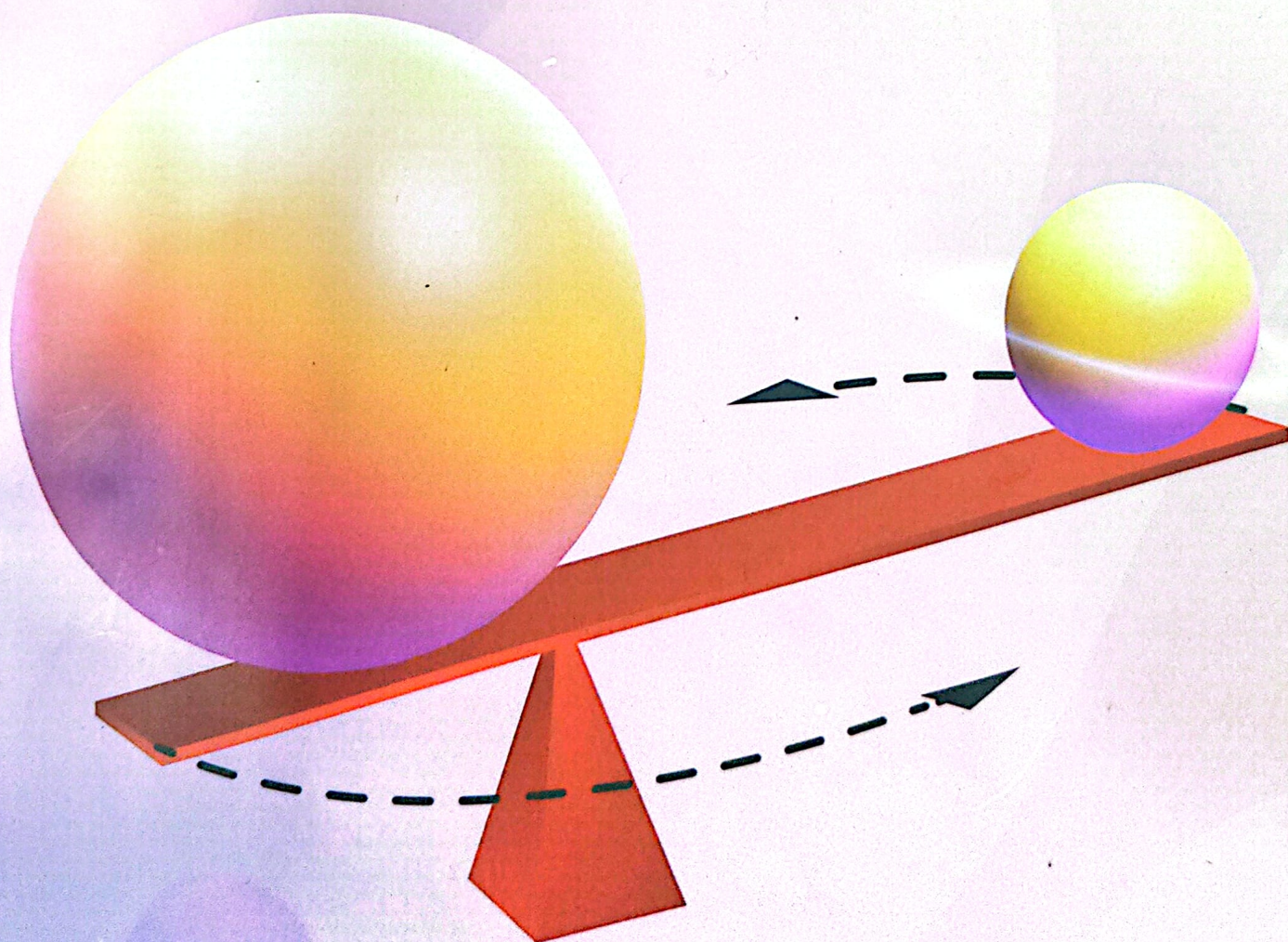


TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 8 - SỐ 7-8

THÁNG 8. 2024

THỂ NÀO LÀ TRỌNG TÂM



TÌM ĐỌC TRONG SỐ NÀY

Chuyên mục **Đường vào Toán học** giới thiệu với các bạn học sinh và sinh viên yêu toán câu chuyện về **Bài toán đẳng chu Dido và Tối ưu miễn**. Tối ưu là một trong những lĩnh vực của toán học có nhiều ứng dụng nhất trong đời sống. Hy vọng bài viết này sẽ là một lời mời và một lời động viên các bạn theo đuổi toán học.

Trong chuyên mục **Toán của Bì** tiếp tục thách thức các bạn học sinh nhỏ tuổi với nhiều bài toán thú vị và lại mời các bạn du lịch cùng thăm từ **Xuân Phong**.

Xác định được trọng tâm của vật luôn là một vấn đề quan trọng trong cuộc sống. Chuyên mục **Học cùng Pi** của số này sẽ giới thiệu với các bạn **Thế nào là Trọng tâm** và cách xác định trọng tâm của một vật. Bài viết sẽ cho các bạn thấy mối liên hệ thú vị giữa toán học và vật lý.

Ngoài những thử thách thường lệ trong chuyên mục **Thách thức Toán học**, bạn đọc học sinh phổ thông có thể thử sức với một số bài toán trong cuộc thi **Phần thưởng Toán học cho Nữ sinh năm 2023 ở Mỹ**, được giới thiệu trong **Góc toán Olympic**.

Diễn đàn Dạy và học Toán giới thiệu bài viết về Phương pháp ước lượng một số số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm. Bài viết sẽ giúp các thầy cô giáo có sự chuẩn bị tốt hơn cho việc giảng dạy nội dung Thống kê ở lớp 11 và 12.

Chuyên mục **Lịch sử Toán học** tiếp tục với phần bốn của loạt bài về **Hình học phi Euclid** với tiêu đề **Hình học trên đĩa Poincaré**.

Quán toán giới thiệu bài viết thú vị “**Trong toán có thơ, trong thơ có toán**” của GS. TSKH Trần Văn Nhung, mời các bạn cùng thưởng thức.

MỤC LỤC

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (Tổng Biên tập)
Phùng Hồ Hải (Phó Tổng Biên tập)
Nguyễn Chu Gia Vương (Phó Tổng Biên tập)
Vũ Thế Khôi (Thư ký Tòa soạn)
Ngô Bảo Châu (Ủy viên)
Trần Nam Dũng (Ủy viên)
Phạm Triều Dương (Ủy viên)
Hà Duy Hưng (Ủy viên)
Nguyễn Khắc Minh (Ủy viên)
Nguyễn Hoàng Thạch (Ủy viên)

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phạm Huy Điển, Ngô Trung Hiếu, Nguyễn Thành Nam,
Ngô Văn Minh, Trần Văn Nhung, Tạ Duy Phương,
Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Duy Thái Sơn, Đỗ Đức Thái,
Phạm Văn Thiệu, Vũ Kim Thủy, Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn,
Lê Anh Vinh

Chế bản: Nguyễn Thái Hiệp
Đồ họa: Nguyễn Trần, Đoàn Xuân Trường
Nguyễn Chu Chloe Huệ Chi

Ảnh bìa 1: Đoàn Xuân Trường

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYỀN

Hạ Vũ Anh, Bùi Văn Biên, Võ Quốc Bá Cẩn, Lưu Công Đồng,
Lưu Thị Thanh Hà, Nguyễn Hiệp, Phan Thanh Hồng,
Trần Quang Hùng, Trần Quốc Luật, Kiều Đình Minh,
Nguyễn Thị Nhung, Vũ Hồng Sơn, Lưu Bá Thắng,
Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thắng, Nguyễn Xuân Thọ,
Nguyễn Mạnh Toàn, Nguyễn Hoàng Vũ (phụ trách mục
Tìm hiểu Khoa học).

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty TNHH Đầu tư TM In Hồng Đức
Tập chí ra hàng tháng
Giá: 35.000 đồng

TÒA SOẠN

Phòng 107, Nhà A5, Viện Toán học,
18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội
Email gửi bài: btt@pi.edu.vn
Email giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com
Điện thoại: (024) 3215.1407.
Website: pi.edu.vn

ĐƯỜNG VÀO TOÁN HỌC

- 2 Từ bài toán đẳng chu Dido đến tối ưu miễn
Lê Minh Trí & Nguyễn Đăng Khải Hoàn

TOÁN CỦA BỊ

- 12 Phép dời hình và công thức tính diện tích
Phần V: Công thức tính diện tích
*Ngô Văn Minh, Phan Ngọc Minh
và Nguyễn Thị Nhung*
- 18 Cuộc điều tra thú vị
Gia Dương
- 19 Các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi
- 20 Lời giải các bài toán cho học sinh
nhỏ tuổi (số 4 năm 2024)
- 23 Perfect squares are everywhere (Part IV)
Ngheia Doan

QUÁN TOÁN

- 26 Trong toán có thơ, trong thơ có toán
Trần Văn Nhung

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

- 30 Đề ra kỳ này
- 31 Giải bài kỳ trước

HỌC CÙNG PI

- 41 Thế nào là trọng tâm
Nguyễn Hoàng Vũ

CÁC KỲ THI TOÁN

- 50 Góc toán Olympic

DIỄN ĐÀN DẠY VÀ HỌC TOÁN

- 52 Phương pháp ước lượng một số số đặc
trưng của mẫu số liệu ghép nhóm
Ngô Hoàng Long

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

- 56 Hình học Phi Euclid
Phần IV: Hình học trên đĩa Poincaré
Lê Vũ Minh Trí và Nguyễn Duy Anh

VUI CÙNG PI

- 63 Trò chơi về hình có tâm đối xứng
Phần IV: Làm lồng đèn Trung thu từ
chai nhựa
Nguyễn Thụy Việt Anh

TỪ BÀI TOÁN ĐẲNG CHU DIDO ĐẾN TỐI ƯU MIỀN

LÊ MINH TRÍ & NGUYỄN ĐĂNG KHẢI HOÀN

Tóm tắt nội dung. Bài viết giới thiệu về bài toán đẳng chu, một bài toán cổ xưa và cơ bản trong toán học. Từ đó, chúng tôi trình bày các bài toán tối ưu miền hay tối ưu hình dáng, một nhánh toán học hiện đại. Cuối cùng bài viết thảo luận một phương pháp để giải quyết vấn đề này.

1. Bài toán đẳng chu

1.1 Vấn đề của Dido

Nhà thơ La Mã Publius Vergilius Maro (70 – 19 TCN) kể trong tác phẩm sử thi Aeneid một câu chuyện về nữ hoàng Dido, con gái của vua Phoenician vào thế kỷ 9 TCN. Sau khi chồng bị anh trai bà ám sát, nữ hoàng chạy trốn đến một nơi gần Tunis, thủ đô của Tunisia bây giờ. Ở đó, bà yêu cầu người lãnh đạo địa phương, Yarb, cho một mảnh đất có thể bao quanh bởi da của một con bò. Vì thỏa thuận có vẻ rất khiêm tốn, ông ta đã đồng ý. Dido cắt da bò thành các dải hẹp, buộc chúng lại với nhau và bao quanh một mảnh đất lớn mà sau này hình thành nên thành phố Carthage. Dido đã đối mặt với vấn đề toán học, còn được biết đến là bài toán đẳng chu: tìm trong tất cả các đường cong có độ dài cho trước đường cong bao quanh diện tích lớn

nhất. Dido đã tìm ra bằng trực giác câu trả lời đúng.



Dido Purches Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthius Merian the Elder, in Historische Chronica, Frankfurt a.M., 1630. Dido's people cut the hide of an ox into thin strips and try to enclose a maximal domain.

Hình 1. Dido cắt mảnh da bò tạo nên thành Carthage-Nguồn:[7].

Vào thời đó, một công thức cho diện tích A của một hình tròn có chu vi L đã được biết. Người Babylon vào khoảng năm 1800 TCN đã sử dụng công thức $A = \frac{2}{25}L^2$ thay vì $A = \frac{1}{4}\pi L^2$. Sự xấp xỉ của π là 3.125 khá chính xác. Trong tác phẩm ngắn Về việc đo đạc đường tròn, Archimedes (285 – 212 TCN) đã cho ngoại tiếp và nội tiếp hình tròn vào một đa giác 96 cạnh để xác định rằng $3.1408 < \pi <$

¹ Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik, VADOR E105 – 04

² Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita".

3.14285. Người Hy Lạp quan tâm đến vấn đề đẳng chu vì vì lý do thực tiễn. Chúng hữu ích để có một giới hạn trên cho diện tích đất đai, nhằm ngăn chặn các thương gia gian lận khi họ khai báo diện tích của một hòn đảo bằng chu vi của nó. Vào thời đó, rất nhiều người tin rằng chu vi của một hình xác định diện tích của nó. Khoảng năm 150 TCN, Zenodorus đã chứng minh chặt chẽ bằng các lập luận hình học cơ bản rằng:

1. nếu tồn tại một đa giác n cạnh có diện tích lớn nhất trong tất cả các đa giác n cạnh với chu vi cho trước, nó phải là đa giác đều;



(a) Paris thời trung cổ



(b) Cologne thời trung cổ

Hình 2. Áp dụng phương pháp của Dido trong xây dựng thành phố cổ-Nguồn: Internet

2. trong tất cả các đa giác đều có chu vi bằng nhau, đa giác có nhiều cạnh hơn sẽ có diện tích lớn hơn;
3. hình tròn bao quanh một diện tích lớn hơn đa giác đều với cùng chu vi.

Liệu có tồn tại một đa giác tối đại hay không? Các nhà hình học cổ đại không quan tâm đến câu hỏi này. Nó đã được giải quyết nhiều thế kỷ sau đó, chẳng hạn bởi Weierstraß. Không có tiến bộ toán học đáng kể nào được thực hiện trong gần 1.900 năm về vấn đề đẳng chu sau người Hy Lạp. Trong suốt thời gian này, người ta đã tin rằng hình tròn có diện tích lớn nhất trong tất cả các miền phẳng có chu vi cho trước. Tương tự, các nhà thiên văn học tin rằng một tính chất tương tự cũng có giá trị cho các hình dáng trong không gian, cụ thể là quả cầu có thể tích lớn nhất trong tất cả các miền có diện tích bề mặt cho trước.

1.2 Phép tính biến phân

Năm 1744, Euler, được gợi cảm hứng từ bài toán đẳng chu cũng như được hai anh em Johann và Jakob Bernoulli đề xuất, đã đặt nền móng cho phép tính biến phân. Về mặt giải tích, bài toán có thể được phát biểu như sau: tìm đồ thị $y(x)$ với $0 < x < a$ sao cho $y(0) = y(a) = 0$ và diện tích giữa $y(x)$ và trục x , $\int_0^a y(x)dx$, là lớn nhất trong khi chiều dài $L = \int_0^a \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ được giữ cố định. Ý tưởng của Euler là giảm bài toán này thành một bài toán có số chiều hữu hạn mà có thể được xử lý bằng phương pháp tiêu chuẩn của phép tính vi phân. Ông chia đoạn $(0, a)$ thành n đoạn bằng nhau với độ dài $x_{k+1} - x_k = h$ và tìm kiếm một đa giác $P(h)$ với các đỉnh $C_k = (x_k, y_k)$ có chu vi cho trước L và diện tích dưới đồ thị của nó là lớn nhất. Ông đã giải quyết bài toán này trong lớp các đa giác với các đỉnh C_k , $k \neq m, m+1$, $(x_m, y_m + \varepsilon)$ và $(x_{m+1}, y_{m+1} + \delta)$, trong đó ε, δ là các tham số tự do. Khi h tiến tới 0, ông đã có thể chứng minh rằng đồ thị tối ưu $y(x)$ thỏa mãn phương trình vi phân Euler-Lagrange $\Phi_y - \frac{d}{dx} \Phi_{y'} = 0$, trong đó $\Phi_y = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ là nhân tử Lagrange.

Phương pháp đa giác của Euler vẫn còn được sử dụng cho việc xử lý số học của các phương trình vi phân thường. Mười một năm sau khi

xuất bản lý thuyết về phép tính biến phân, Euler nhận được một lá thư từ Lagrange, khi đó mới mười chín tuổi, viết rằng anh ta đã tìm ra một phương pháp tổng quát hơn. Thay vì thực hiện các thay đổi tại từng điểm, anh ta đã làm biến dạng toàn bộ đường cong, cách mà vẫn được sử dụng cho đến ngày nay. Euler rất hài lòng và thừa nhận rằng phương pháp của Lagrange có thể đạt được những kết quả sâu sắc hơn nhiều. Phương pháp nổi tiếng này sau đó được gọi theo tên của hai nhà toán học.

1.3 Cách tiếp cận của Steiner

Nhiều lập luận hình học khéo léo đã được J. Steiner (1796 – 1863) đề xuất để chứng minh tính chất đẳng chu của hình tròn và quả cầu. Ông luôn chọn một hình không phải là hình tròn hoặc hình cầu và chỉ ra rằng diện tích hoặc thể tích có thể tăng lên trong khi giữ chu vi cố định. Dựa trên một trong những lập luận của Steiner, Edler đã chứng minh rằng bất kỳ miền nào trong mặt phẳng có chu vi bằng chu vi của hình tròn đều có diện tích nhỏ hơn. Điều này đã hoàn thành chứng minh toán học của bài toán đẳng chu trong mặt phẳng. Steiner đã phát minh ra kỹ thuật đối xứng hóa, một công cụ then chốt trong giải tích hình học. Mục đích là biến đổi một tập hợp $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sao cho thể tích (độ đo Lebesgue) không đổi và chu vi giảm.

Đối Xứng Hóa Steiner: Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{R}^d$. Ký hiệu x là một điểm tùy ý trong $\mathbb{R}^{d-1}$ và e_d là vector đơn vị vuông góc với $\mathbb{R}^{d-1}$. Với mỗi $x \in \mathbb{R}^{d-1}$, xét đường thẳng $L_x := \{x + x_n e_d : x_n \in \mathbb{R}\}$. Độ đo Lebesgue 1 chiều của phần cắt $L_x \cap \Omega$ sẽ được ký hiệu là $\mathcal{L}_1(x)$ (dễ thấy $\mathcal{L}_1(x) = 0$ nếu $L_x \cap \Omega = \emptyset$). Đối xứng hóa Steiner của Ω đối với siêu phẳng $\mathbb{R}^{d-1}$ là miền $St\Omega$, đối xứng quanh $\mathbb{R}^{d-1}$ và có tính chất rằng mỗi phần cắt $L_x \cap St\Omega$ là một đoạn thẳng có chiều dài $\mathcal{L}_1(x)$.

Theo nguyên lý Cavalieri, thể tích của Ω bằng thể tích của $St\Omega$, còn việc giảm chu vi là một

vấn đề phức tạp hơn. Có thể hiểu nôm na rằng sau vô số lần đối xứng hóa như thế, một vật thể sẽ biến thành một quả cầu. Lusternik (1935) đã chỉ ra rằng có tồn tại vô số các đối xứng hóa St_k sao cho:

$$\Pi_{k=1}^n St_k(\Omega) \rightarrow \Omega^* \quad \text{khi } n \rightarrow \infty,$$

với Ω^* là quả cầu có cùng thể tích với Ω . Bằng cách thực hiện vô số lần đối xứng hóa đối với các siêu mặt phẳng chứa trục x_n , ta thu được đối xứng hóa Schwarz.

Đối Xứng Hóa Schwarz: Trong trường hợp này, mỗi phần cắt ngang của Ω ở vị trí $x_n = c$ được thay thế bằng một quả cầu ($d-1$) chiều có cùng thể tích, được đặt tại trục $x_n = c$. Chẳng hạn, một miền $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ được biến đổi bằng đối xứng hóa Schwarz thành một bề mặt quay quanh trục x_3 . Giống như đối xứng hóa Steiner, thể tích không thay đổi và chu vi không tăng. Nhờ đối xứng hóa này cùng với giải tích biến phân, H. A. Schwarz đã đưa ra chứng minh nghiêm ngặt đầu tiên về tính chất đẳng chu của quả cầu trong lớp các miền có biên giải tích từng khúc vào năm 1884. Ông cũng là người đầu tiên chỉ ra thiếu sót của định lý tồn tại trong các chứng minh của Steiner. Hóa ra, như chúng ta sẽ thấy sau này, đối xứng hóa đóng vai trò quan trọng trong giải tích hiện đại và trong vật lý toán.

Bài toán đẳng chu trong các chiều cao hơn là tìm kiếm trong tất cả các miền có chu vi cho trước miền có thể tích lớn nhất. Lời giải khả dĩ là quả cầu. Chứng minh của nó tinh tế hơn nhiều so với trong mặt phẳng. Một lý do là bao lồi của một vật không nhất thiết có chu vi nhỏ hơn chu vi vật đó. Điều này đã được giải quyết một cách thanh lịch bằng bất đẳng thức do H. Brunn (1887) và H. Minkowski (1896) cho các tập lồi và sau đó được tổng quát hóa cho các tập không lồi bởi L. A. Lusternik (1935).

2. Bài toán tối ưu miền

Giới thiệu một số ký hiệu được dùng trong bài.

$\mathcal{K}^d$	tập hợp các tập con compact K của $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{K}_{conv}^d$	tập hợp các vật thể lồi K trong $\mathbb{R}^d$, nghĩa là, K compact, lồi và có phần trong khác rỗng
$C^1(\Omega)$	không gian các hàm khả vi liên tục
$L^1(\Omega)$	không gian Lebesgue
$W^{1,2}(\Omega)$	không gian Sobolev
$W_0^{1,2}(\Omega)$	không gian các hàm $u \in W^{1,2}(\Omega)$ và triệt tiêu trên biên $\partial\Omega$
$\text{Vol}(A)$	độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^d$ hoặc thể tích ($d = 3$) hoặc diện tích ($d = 2$)
$\text{Per}(A)$	độ đo Hausdorff ($d - 1$) chiều hoặc diện tích bề mặt ($d = 3$) hoặc chu vi ($d = 2$)
$B(x, r)$	quả cầu trong $\mathbb{R}^d$, $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \ x - y\ < r\}$
$\Delta u(x)$	toán tử Laplace, $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$

2.1 Giới thiệu về bài toán tối ưu miền

Tối ưu miền (shape optimization) có thể được hiểu là đưa ra một hình dạng hay cấu hình tối ưu mà nó tối đa hóa hoặc tối thiểu hóa một chi phí cho trước. Về mặt toán học, bài toán tối ưu miền được phát biểu dưới dạng tìm giá trị nhỏ nhất/lớn nhất (GTNN/GTLN) của một phiếm hàm $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ như sau

$$\begin{aligned} &\text{Tìm GTNN/GTLN } F(A) \\ &\text{sao cho } A \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (2.1)$$

trong đó

★ $\mathcal{A}$ là tập hợp các miền (có thể không liên thông) bất kỳ (không có cấu trúc tuyến tính hoặc lồi). Ta thường thấy $\mathcal{A}$ là một họ các tập con của $U \subset \mathbb{R}^d$;

★ $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm chi phí;

★ ta gọi $\bar{A} \in \mathcal{A}$ là một điểm cực tiểu (tương ứng, điểm cực đại) của F nếu bài toán (2.1) đạt cực tiểu (tương ứng, cực đại) tại $\bar{A}$, nghĩa là, $F(\bar{A}) = \min_{A \in \mathcal{A}} F(A)$ (tương ứng $F(\bar{A}) = \max_{A \in \mathcal{A}} F(A)$).

Vấn đề được quan tâm ở đây là làm sao chỉ ra được sự tồn tại của điểm cực tiểu/cực đại của bài toán trong trường hợp phiếm hàm F bị chặn dưới/chặn trên. Bài toán Dido có thể được xem như bài toán cổ xưa nhất của giải tích biến phân nói chung và tối ưu miền nói riêng, mà ở đó điểm cực tiểu là hình tròn. Bài toán tối ưu miền còn liên quan mật thiết với một số hướng nghiên cứu khác trong toán học hiện đại như trong một số ví dụ sau.

Ví dụ 2.1 (Bài toán tối ưu biên tự do) Cho trước một tập bị chặn $U \subset \mathbb{R}^d$ và các hàm số $\bar{u}, f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ta xét bài toán tối ưu biên tự do như sau

$$\begin{aligned} &\text{Tìm GTNN } \int_U |u_A(x) - \bar{u}(x)|^2 dx \\ &\text{sao cho } A \subset U \text{ và } u_A : U \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\text{thỏa mãn } \begin{cases} -\Delta u_A = f \text{ trong } A \\ u_A \in W_0^{1,2}(A). \end{cases}$$

Bài toán trên có thể hiểu một cách đơn giản như sau: Ta được cho trước một nguồn nhiệt f trên miền U . Trong một quá trình truyền nhiệt tĩnh (quá trình nhiệt đạt trạng thái cân bằng độc lập với thời gian), bằng việc tìm điểm cực tiểu cho bài toán tối ưu miền tự do, ta mong muốn tìm một phân bố nhiệt u_A trên A (và hiển nhiên bằng 0 trên $U \setminus A$) sao cho nó gần nhất có thể với phân bố nhiệt $\bar{u}$ cho trước trên U .

Ví dụ 2.2 (Bài toán phổ hay bài toán Rayleigh–Faber–Krahn) Trước hết, chúng ta cần đến khái niệm giá trị riêng của toán tử Laplace. Với A là một miền trong $\mathbb{R}^n$, giá trị riêng thứ nhất của toán tử Laplace được xác định bởi

$$\lambda_1(A) := \inf \left\{ \frac{\int_A \|\nabla u\|^2 dx}{\int_A |u|^2 dx} : u \in W_0^{1,2}(A) \right\}$$

(thương số Rayleigh) hoặc giá trị nhỏ nhất

$$\lambda > 0 \text{ sao cho } -\Delta u = \lambda u$$

có nghiệm trong $W_0^{1,2}(A)$.

ĐƯỜNG VÀO TOÁN HỌC

Một phỏng đoán được đặt ra bởi Rayleigh vào năm 1877 [8]: trong tất cả các miền con của $\mathbb{R}^n$ với thể tích cố định cho trước, thì giá trị riêng thứ nhất của toán tử Laplace trên quả cầu là nhỏ nhất. Đầu thế kỷ XX, lời giải của bài toán được đưa ra một cách độc lập bởi Faber [4] và Krahn [6]. Ta có thể thấy vấn đề Rayleigh–Faber–Krahn cũng là một cũng là một bài toán tối ưu miền, được phát biểu như sau

Tìm GTNN $\lambda_1(A)$ sao cho A là tập con mở của $\mathbb{R}^d$ với $\text{Vol}(A) = m > 0$.

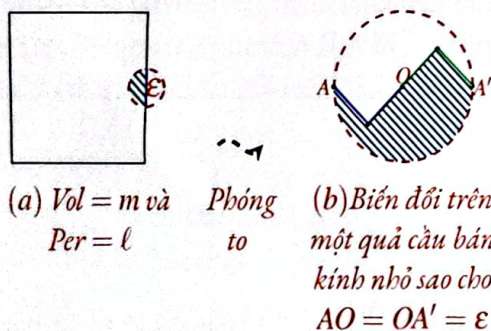
2.1 Khi không có nghiệm!

Dưới đây, ta sẽ xem xét một vài bài toán, mà ở đó không tồn tại điểm cực tiểu/điểm cực đại.

2.2 Ví dụ 2.3 Cho $U \subset \mathbb{R}^2$ và $m > 0$, ta xét bài toán

Tìm GTLN $\text{Per}(A)$, sao cho
 $A \subset U, \text{Vol}(A) = m > 0$.

Bài toán trên không có chặn trên và dĩ nhiên không tồn tại điểm cực đại. Thực vậy, đầu tiên ta cố định một hình chữ nhật có diện tích $m > 0$ và chu vi $\ell > 0$. Quá trình làm tăng chu vi nhưng diện tích cố định được mô tả ở hình 3. Trong hình 3, ta đã thêm bớt một phần diện tích như nhau nên miền mới vẫn có cùng diện tích $m > 0$ nhưng lúc này chu vi là $\ell + \varepsilon$. Lặp lại quá trình trên vô hạn lần ta sẽ thấy một cấu trúc hình phân dạng (fractal) với cùng một diện tích nhưng chu vi có thể lớn tùy ý.



Hình 3. Mô tả cách xây dựng các miền bảo toàn diện tích nhưng chu vi tăng dần.

Ví dụ 2.4. Xét họ các quả cầu $Q = \bigcup_{n \geq 1} B((2n, 0), 1 - 1/n) \subset \mathbb{R}^2$. Ta xét bài toán tối ưu miền sau

Tìm GTNN $\text{Per}(A)$ sao cho
 $\text{Vol}(A) = \pi, A \subset Q. \quad (\text{P1})$

Ý tưởng của việc chứng minh bài toán này không tồn tại nghiệm là không có quả cầu nào có bán kính 1 nằm trong Q . Nói rõ hơn, trong không gian Euclid d -chiều, ta có bất đẳng thức đẳng chu được phát biểu cụ thể như sau.

Định lý 2.5. (Bất đẳng thức đẳng chu) Cho $S \subset \mathbb{R}^d$ là một tập con bị chặn, khi đó ta có

$$\text{Per}(S) \geq d \text{Vol}^{\frac{d-1}{d}}(S) \text{Vol}(B(0, 1))^{\frac{1}{d}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi S là quả cầu trong $\mathbb{R}^d$.

Từ bất đẳng thức trên, ta có thể suy ra bài toán (P1) có chặn dưới lớn nhất là 2π . Tuy nhiên, bài toán không bao giờ đạt được điểm cực tiểu do tập Q không chứa bất cứ quả cầu nào có bán kính là 1.

2.3 Phương pháp trực tiếp và ứng dụng

Để giải quyết các bài toán tìm điểm cực tiểu của một hàm f trên miền X , người ta thường xem xét xây dựng một tô-pô τ trên X và thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lấy một dãy xấp xỉ chặn dưới lớn nhất (bất kỳ) $\{x_n\} \subset X$ và chứng minh rằng tồn tại một dãy con $\{x_{n_j}\}$ hội tụ đến $\bar{x} \in X$ trong tô-pô τ .

Bước 2: Chỉ ra rằng f là hàm nửa liên tục dưới với tô-pô τ và sau đó ta thu được

$$f(\bar{x}) \leq \tau - \liminf_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = \inf_X f(x).$$

Như vậy, ta kết luận $\bar{x}$ là một điểm cực tiểu của hàm f trên X hay f đạt giá trị nhỏ nhất trên X .

Cách làm như trên được gọi là *phương pháp trực tiếp* (direct method) để tìm điểm cực tiểu

cho một bài toán tối ưu. Lưu ý rằng, ta cũng có thể sử dụng phương pháp trực tiếp để tìm điểm cực đại cho một hàm g trên X ; lúc bấy giờ, ta sẽ cần phải chỉ ra là g là hàm nửa liên tục trên theo tô-pô τ . Ta sẽ xem xét một số ví dụ sau để thấy rõ tính ứng dụng của phương pháp trực tiếp.

Khi sử dụng phương pháp trực tiếp, ta thấy rằng hàm số f đạt được cực tiểu khi có ít nhất một tập mức dưới là compact. Ở đây ta không đòi hỏi tính compact trên không gian đang xét.

Mệnh đề 2.6. *Cố định $X = (X, d)$ là một không gian metric và $\tau = \tau(d)$ là tô-pô sinh ra bởi metric d . Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số nửa liên tục dưới theo τ , bị chặn dưới và inf-compact, tức là, tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho*

$$[f \leq \lambda] := \{x : f(x) \leq \lambda\}$$

là tập compact khác rỗng trong τ .

Khi đó, f tồn tại điểm cực tiểu $\bar{x} \in X$.

Ta xét một trường hợp cụ thể $X = \mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm nửa liên tục dưới thỏa mãn $f(x) \geq C_1|x|^\gamma - C_2$ với $C_1, C_2, \gamma > 0$ là các hằng số cho trước, thì hàm f tồn tại điểm cực tiểu trên $\mathbb{R}^d$. Thật vậy, từ tính chất của hàm f , nếu ta cố định $\bar{\lambda} > 0$, thì ta có

$$[f \leq \bar{\lambda}] \subset \overline{B(0, r)}, \text{ với } r = \left(\frac{\bar{\lambda} + C_2}{C_1} \right)^{1/\gamma}.$$

Kết hợp tính nửa liên tục dưới của f và quả cầu đóng $\overline{B(0, r)} := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| \leq r\}$ là tập compact trong $\mathbb{R}^d$, ta suy ra $[f \leq \bar{\lambda}]$ là một tập compact. Sử dụng Mệnh đề 2.6, ta thấy rằng hàm f tồn tại điểm cực tiểu trên $\mathbb{R}^d$.

Chứng minh Mệnh đề 2.6. Từ giả thiết về hàm f nửa liên tục dưới, ta cần chỉ ra mỗi dãy xấp xỉ chặn dưới lớn nhất đều tồn tại một dãy con hội tụ. Thật vậy, ta gọi $\{x_k\}$ là một dãy xấp xỉ chặn dưới lớn nhất, nghĩa là $f(x_k) \rightarrow \inf_X f$ khi $k \rightarrow \infty$. Nếu $k \geq \bar{k}$ đủ

lớn, ta có

$$f(x_k) \leq \lambda \text{ hay ta có } \{x_k\}_{k \geq \bar{k}} \subset [f \leq \lambda].$$

Từ giả thiết $[f \leq \lambda]$ là tập compact, ta suy ra $\{x_k\}$ có ít nhất một dãy con hội tụ.

Ví dụ 2.7. (Bài toán chương ngại vật) Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là một miền với biên đủ trơn và các hàm số f, φ cho trước. Xem xét bài toán sau

$$\text{Tìm GTNN } J(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

sao cho $u \in \mathcal{M} := \{w \in W^{1,2}(\Omega) : w = f \text{ trên } \partial\Omega \text{ và } w \geq \varphi \text{ trong } \Omega\}$. (OP)

Sự tồn tại nghiệm của bài toán (OP) được chứng minh thông qua phương pháp trực tiếp với tô-pô yếu trên không gian $W^{1,2}(\Omega)$ (tham khảo [5, Mệnh đề 2.1]).

Mệnh đề 2.8 Cố định Ω là miền bị chặn C^1 . Cho trước các hàm số $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ và $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

- $f \in C^1(\partial\Omega)$, $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$;
- $f \geq \varphi$ trên $\partial\Omega$.

Khi đó, bài toán (OP) tồn tại duy nhất điểm cực tiểu $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$.

Chứng minh. Trước hết, ta có một số quan sát đơn giản sau:

- $\mathcal{M}$ là tập lồi và đóng yếu trong $W^{1,2}(\Omega)$,
- $J(u)$ là hàm số nửa liên tục dưới yếu (sử dụng định lý Hahn–Banach).

Ta sẽ chỉ ra mỗi dãy xấp xỉ chặn dưới lớn nhất của J có một dãy con hội tụ yếu. Ta cố định $\{u_k\}$ là một dãy hàm trong $W^{1,2}(\Omega)$ sao cho $J(u_k) \rightarrow \inf_{\mathcal{M}} J$ khi $k \rightarrow \infty$. Khi $n \geq \bar{n}$ đủ lớn, ta có $\|\nabla u_k\|_{L^2} \leq \text{const}$. Cố định $V \in \mathcal{M}$, ví dụ, ta có thể chọn $V = \max\{\varphi, \tilde{f}\}$ trong đó $\tilde{f}$ là một thác triển C^1 của f lên toàn miền Ω . Sử dụng bất đẳng thức Poincaré, ta có

$$\|u_k - V\|_{L^2} \leq C_{\Omega} \|\nabla u_k - \nabla V\|_{L^2} \leq \text{const}.$$

Điều này suy ra

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^2} &\leq \|u_k - V\|_{L^2} + \|V\|_{L^2} \\ &\leq C_{\Omega} \|\nabla u_k - \nabla V\|_{L^2} + \|V\|_{L^2} \leq \text{const}, \end{aligned}$$

và vì vậy $\{u_k\}$ bị chặn trong $W^{1,2}(\Omega)$. Sau đó ta có thể sử dụng định lý Kakutani để kết luận sự tồn tại điểm cực tiểu.

Ta sẽ tiếp tục chứng minh bài toán có nghiệm duy nhất. Bằng phản chứng, ta giả sử bài toán có hai điểm cực tiểu khác nhau $u_1, u_2 \in \mathcal{M}$. Từ định nghĩa tồn tại một tập $A \subset \Omega$ có độ đo dương sao cho $\nabla u_1 \neq \nabla u_2$ trên A . Kết hợp điều này với tính lồi ngặt của hàm $t \mapsto t^2$, ta suy ra

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla u_1(x) + \nabla u_2(x)}{2} \right|^2 dx \\ & < \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_1(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_2(x)|^2 dx \right) \\ & = 2\alpha, \end{aligned}$$

với $\alpha \geq 0$ là chặn dưới nhỏ nhất của bài toán. Điều này dẫn đến $w := (u_1 + u_2)/2 \in \mathcal{M}$ thỏa mãn $J(w) < \alpha$, vô lý.

Mệnh đề 2.8 được chứng minh.

Tiếp theo, chúng ta sẽ bàn về tính ứng dụng của phương pháp trực tiếp trong bài toán tối ưu miền. Một cách đơn sơ, ta có thể xem xét một họ các tập con của một tập U cho trước như là một không gian metric và giải quyết bài toán trên đó. Tuy nhiên, điều này sẽ dẫn đến một số điểm bất lợi, chẳng hạn các phiếm hàm Vol và Per không nửa liên tục dưới. Xa hơn nữa, ta có thể sử dụng một công cụ hiện đại hơn, không gian $BV(\Omega)$, để đi đến những kết quả tổng quát hơn (ví dụ như Định lý 2.11).

Cho $V, W \subset \mathbb{R}^d$ là các tập compact. Khoảng cách Hausdorff giữa V và W được xác định bởi công thức

$$\begin{aligned} d_H(V, W) &:= \max \left\{ \sup_{b \in W} d(b, V), \sup_{a \in V} d(a, W) \right\} \\ &= \inf \{ \varepsilon > 0 : V \subset W + \varepsilon B(0, 1) \\ & \quad \text{và } W \subset V + \varepsilon B(0, 1) \}. \end{aligned}$$

Khi đó, họ các tập compact trong $\mathbb{R}^d$ với khoảng cách Hausdorff d_H là một không

gian metric. Hơn nữa, ta có kết quả sau liên quan đến tính compact của không gian này. **Định lý 2.9** (tham khảo [9])

(i) Cho $A \subset \mathbb{R}^d$ là compact và $\mathcal{K}(A) := \{K \subset A : K \in \mathcal{K}^d\}$. Khi đó, $(\mathcal{K}(A), d_H)$ là một không gian metric compact.

(ii) (Định lý Blaschke về sự chọn lọc) Mọi dãy bị chặn trong $(\mathcal{K}_{\text{conv}}^d, d_H)$ tồn tại một dãy con hội tụ.

Để bàn đến tính khả thi của việc sử dụng tô-pô sinh bởi khoảng cách Hausdorff, trước hết, ta có thể xét một ví dụ đơn giản sau về tính không liên tục của phiếm hàm Vol trên $(\mathcal{K}^d, d_H)$. Xét $A = [0, 1]$ và ta biết rằng $\mathbb{Q} \cap A := \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$ là một tập đếm được. Đặt $A_m = \{q_1, \dots, q_m\}$ với $m \in \mathbb{N}$. Ta thấy rằng $d_H(A_m, A) \rightarrow 0$ khi $m \rightarrow \infty$; tuy nhiên, $\text{Vol}(A_m) = 0$ trong khi $\text{Vol}(A) = 1$. Như vậy, $\text{Vol}(A) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \text{Vol}(A_m)$ và điều này chỉ ra rằng Vol không nửa liên tục dưới theo tô-pô sinh bởi d_H . Từ đây, liên quan đến phiếm hàm Vol , ta thấy xét bài toán tìm GTNN bằng phương pháp trực tiếp với tô-pô sinh bởi d_H chưa phải là một ý hay.

Mặt khác, nếu ta hạn chế họ tập hợp là các vật thể lồi thì khoảng cách Hausdorff vẫn khả dụng. Dưới đây, ta liệt kê một vài tính chất của các phiếm hàm đơn giản trong bài toán tối ưu miền đối với khoảng cách Hausdorff.

Mệnh đề 2.10. (tham khảo [9])

(i) $\text{Vol} : (\mathcal{K}_{\text{conv}}^d, d_H) \rightarrow [0, +\infty)$ là liên tục, nhưng $\text{Vol} : (\mathcal{K}^d, d_H) \rightarrow [0, +\infty)$ không liên tục.

(ii) $\text{Per} : (\mathcal{K}_{\text{conv}}^d, d_H) \rightarrow [0, +\infty)$ là liên tục, nhưng không nửa liên tục trên/dưới trên không gian $(\mathcal{K}^d, d_H)$.

Cho U là một tập compact trong $\mathbb{R}^d$ và $f \in L^1(U)$. Sử dụng Mệnh đề 2.10, Định lý 2.9 và tô-pô sinh bởi khoảng cách Hausdorff, từ phương pháp trực tiếp, ta có thể giải một số

bài toán cực trị sau

Tìm GTNN $\text{Per}(A)$ sao cho $A \subset U$,

$$A \in \mathcal{K}_{\text{conv}}^d \text{ và } \int_A f(x)dx = m > 0;$$

Tìm GTLN $\text{Vol}(A)$ sao cho

$$A \in \mathcal{K}_{\text{conv}}^d, A \subset U.$$

Tính chất của các vật thể lồi đóng vai trò quan trọng trong chứng minh tính liên tục/nửa liên tục dưới của nhiều phiếm hàm trong các bài toán tối ưu miền. Bài toán sẽ trở nên phức tạp hơn khi ta xét một họ các tập con khác. Và để kết thúc, chúng tôi sẽ nêu một kết quả tồn tại tổng quát hơn sử dụng phương pháp trực tiếp mà ở đó ta phải dùng đến một tô-pô khác với tô-pô sinh bởi khoảng cách Hausdorff.

Định lý 2.11. *Giả sử ta có*

- $U \subset \mathbb{R}^d$ là một tập mở bị chặn, $f \in L^1(U)$, $c \in \mathbb{R}$,
- $\mathcal{A} := \{A \subset U : A \text{ là một tập đo được và } \int_A f(x)dx = c\} \neq \emptyset$.

Khi đó, bài toán $\min_{A \in \mathcal{A}} \text{Per}(A)$ có ít nhất một nghiệm.

Ở đây, chúng tôi sẽ không trình bày cụ thể tất cả các kết quả liên quan trong chứng minh của định lý trên (xem chi tiết [3, Định lý 1.2.2] và [Chương 16]). Tuy nhiên, ý tưởng chính vẫn là sử dụng phương pháp trực tiếp bằng cách chọn tô-pô yếu* trên không gian $BV(U)$ (bounded variation). Cách xây dựng tô-pô này và các tiêu chuẩn cần thiết để áp dụng phương pháp trực tiếp được mô tả dưới đây.

Trước hết, ta định nghĩa không gian $BV(U)$ gồm các hàm số $f \in L^1(U)$ sao cho gradient $\nabla f \in C_0(U, \mathbb{R}^d)'$ (đạo hàm được hiểu theo nghĩa phân bố). Ở đây $C_0(U) := C_0(U, \mathbb{R})$ là không gian các hàm số liên tục trên U triệt tiêu ở vô cùng, nghĩa là, $u \in C_0(U)$ khi với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một tập compact $K_\varepsilon \subset$

U sao cho $|u(x)| < \varepsilon$ với mọi $x \in U \setminus K_\varepsilon$. Không gian $C_0(U)$ là Banach khi được trang bị chuẩn $\|v\| = \sup_{x \in U} |v(x)|$ và ta ký hiệu $C_0(U)'$ là đối ngẫu của $C_0(U)$. Lúc bấy giờ ta có thể định nghĩa *hội tụ yếu** trên $BV(U)$ như sau: ta nói $u_n \xrightarrow{*} u$ khi

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ trong } L^1(U), \\ \nabla u_n \xrightarrow{*} \nabla u \text{ trong } C_0(U, \mathbb{R}^d)'. \end{cases}$$

Lưu ý, ở đây ta có thể đồng nhất phần tử trên $C_0(U)'$ như là một độ đo có dấu trên U và tính hội tụ yếu* của một dãy các phiếm hàm tuyến tính liên tục sẽ tương đương với tính hội tụ yếu của một dãy các độ đo xác định bởi các phiếm hàm đó (xem [1, Trang 393]).

Ta định nghĩa phép nhúng $j : \mathcal{A} \rightarrow BV(U)$ bởi $j(A) = \mathbf{1}_A$, trong đó

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Lúc bấy giờ ta có thể xem $\text{Per} : j(\mathcal{A}) \subset BV(U) \rightarrow [0, +\infty]$ như là một phiếm hàm trên $j(\mathcal{A})$. Từ [1, Mệnh đề 4.2.2] và [1, Định lý 10.1.4], ta có một tiêu chuẩn về tính compact yếu* trên $BV(U)$: mỗi dãy bị chặn trong $BV(U)$ thì tồn tại một dãy con hội tụ yếu*. Hơn nữa, từ [1, Mệnh đề 10.1.1], phiếm hàm Per nửa liên tục dưới theo tô-pô yếu*. Từ đây, ta có thể kết luận về sự tồn tại điểm cực tiểu cho bài toán trong Định lý 2.11 bằng phương pháp trực tiếp với tô-pô yếu* trên không gian $BV(U)$.

Thay cho lời kết, chúng tôi sẽ liệt kê một số vấn đề thú vị khác vẫn chưa được thảo luận trong bài viết này

★ tính duy nhất và ổn định của bài toán tối ưu miền;

★ khảo sát các tính chất hình học của điểm cực tiểu, ví dụ như tính đối xứng, khối Wulff, đối xứng hóa Schwarz, đối xứng hóa Steiner cho các phiếm hàm tổng quát; cũng như ứng dụng vào chứng minh các bất đẳng thức hàm, ví dụ lý thuyết Brunn-Minkowski, bất đẳng thức Brascamp-Lieb;

★ phương pháp xấp xỉ số cho nghiệm tối ưu, ví dụ phương pháp phần tử biên (boundary element method), các khái niệm đạo hàm miền (shape derivative) kết hợp các phương pháp gradient;

★ xem xét họ tập hợp với các tính chất đại số, ví dụ, các tập nửa đại số, tập hợp 0-tối tiểu.

Tài liệu

[1] H. ATTOUCH, G. BUTTAZZO AND G. MICHAILLE, *Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Applications to PDEs and optimization*, MOS-SIAM Series on Optimization 17. Philadelphia, 2014.

[2] C. BUNDLE, Dido's problem and its impact on modern mathematics, *Notices Am. Math. Soc.* **64** (2017), 980 – 984.

[3] D. BUCUR & G. BUTTAZZO, *Variational methods in shape optimization problems*, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* **65**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2005.

[4] G. FABER, Beweis, dass unter allen

homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt, *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Phys. Kl.* (1923), 169 – 172.

[5] A. FIGALLI, Free boundary regularity in obstacle problems, *Journées équations aux dérivées partielles* (2018), 24pp.

[6] E. KRAHN, Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, *Math. Ann.* **94** (1925), 97 – 100.

[7] H. J. PESCH, The princess and infinite-dimensional optimization, *Doc. Math., Extra vol.: Optimization stories* (2012), 345 – 356.

[8] J. W. S. RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, 2nd Edition, Dover Publications, New York, 1945.

[9] R. SCHNEIDER, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory. Second expanded edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Cuộc điều tra thú vị

Do cả người nói thật và người nói dối đều trả lời “có” cho câu hỏi thứ tư, suy ra có đúng 100 người dân ở địa phương nọ.

Người dân trung thực sẽ trả lời “có” cho đúng một trong 3 câu hỏi đầu tiên, và “không” cho hai câu hỏi còn lại. Còn người nói dối sẽ trả lời “có” cho hai trong 3 câu hỏi đầu tiên và “không” cho một câu hỏi.

Từ đây ta có thể giải bằng cách lập phương trình hoặc bằng lập luận.

Cách 1: Giả sử có tất cả x người dân địa phương trung thực. Khi đó có tất cả $x +$

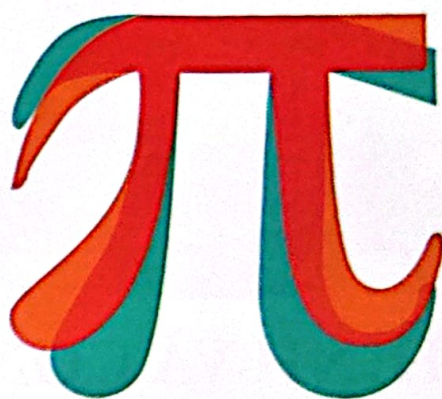
$2(100 - x) = 200 - x$ câu trả lời “có”, có nghĩa là $200 - x = 40 + 50 + 70 = 160$. Suy ra $x = 40$.

Cách 2: Tổng số các câu trả lời “có” cho ba câu hỏi đầu tiên là $40 + 50 + 70 = 160$. Nếu tất cả các dân địa phương đều nói thật, thì tổng số các câu trả lời “có” cho ba câu hỏi đầu tiên phải là 100. Do mỗi một người nói dối làm tăng thêm đúng một câu trả lời “có” trong tổng số, nên có tất cả $160 - 100 = 60$ người nói dối. Có nghĩa là có 40 người dân trung thực.

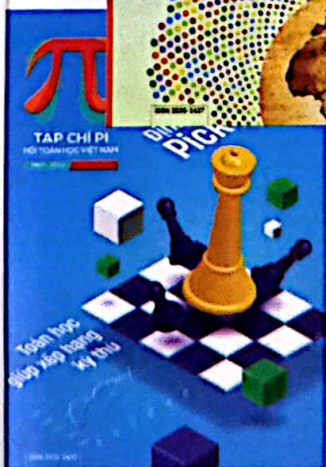
(Xem tiếp trang 62.)



Hội Toán học Việt Nam



Tạp chí Toán học cho mọi người



Tạp chí *Pi* là một ấn phẩm của Hội Toán học Việt Nam, với mục đích quảng bá Toán học tới cộng đồng. *Pi* được xuất bản hàng tháng, và được in màu toàn bộ (kể từ tháng 1/2020). Tạp chí mang vẻ đẹp toán học, kiến thức toán học tới mọi người qua các chuyên mục đa dạng với các nội dung phong phú, thân thiện và nhiều màu sắc. Chúng tôi hy vọng rằng mỗi độc giả, từ trẻ em tới người lớn tuổi, với các kiến thức về Toán học khác nhau, đều tìm được những điều lý thú về Toán học cùng những ích lợi của nó, qua các chuyên mục phù hợp trong *Pi*.



Pi.edu.vn



: Pi của bạn



PHÉP DỜI HÌNH VÀ CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH

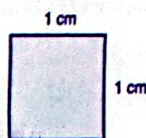
Phần V: Công thức tính diện tích

NGÔ VĂN MINH, PHAN NGỌC MINH VÀ NGUYỄN THỊ NHUNG

Trong các số trước của tạp chí Pi, Toán của Bi đã giới thiệu đến các bạn nhỏ những phép dời hình cơ bản: Phép phản xạ, phép đối xứng tâm, phép quay và phép tịnh tiến. Một trong những tính chất quan trọng của những phép dời hình này là không làm thay đổi hình diện tích của những hình đã cho. Bài viết này sẽ sử dụng tính chất quan trọng này của những phép dời hình để xây dựng công thức tính diện tích của những hình cơ bản như: Hình chữ nhật, hình bình hành, hình tam giác và hình thang.

5.1 Diện tích hình vuông

Trước hết ta công nhận hình vuông đơn vị, hình vuông có cạnh là 1 (đơn vị độ dài) có diện tích là 1 (đơn vị diện tích). Ví dụ hình vuông cạnh 1cm có diện tích $1\text{cm} \times 1\text{cm} = 1\text{cm}^2$ (centimét vuông).



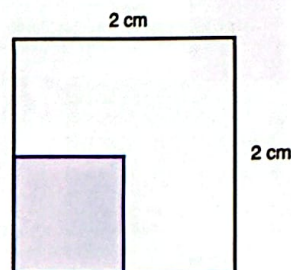
Hình 1.

Tính diện tích hình vuông theo cạnh hình vuông

Từ diện tích của hình vuông đơn vị ta có thể

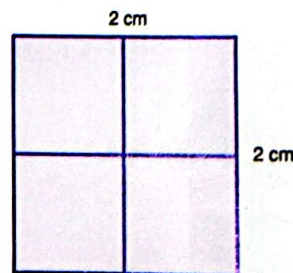
tính được diện tích của một hình vuông bất kỳ. Giả sử ban đầu ta có một hình vuông có cạnh là 1cm.

Bây giờ ta tăng độ dài của hình vuông này lên 2cm,



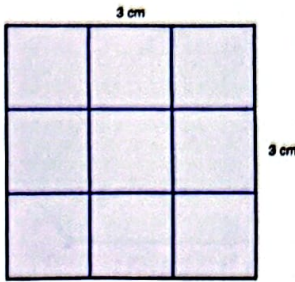
Hình 2.

thì khi đó cần phải dùng 4 hình vuông đơn vị mới có thể “lấp đầy” hình vuông cạnh 2cm này:



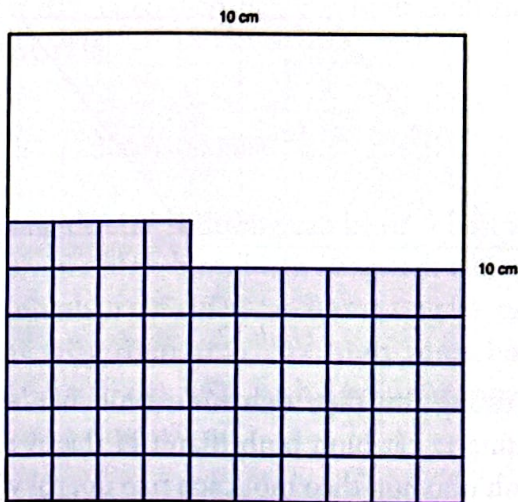
Hình 3.

Nếu ta tăng tiếp độ dài cạnh hình vuông lên **3cm** thì sẽ cần tới **9** hình vuông đơn vị:



Hình 4.

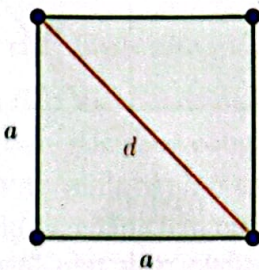
Tương tự như trên, các bạn nhỏ có đoán được cần bao nhiêu hình vuông đơn vị để lấp đầy hình vuông cạnh **10cm** sau đây không?



Hình 5.

Từ những ví dụ trên, chúng ta rút ra nhận xét: **Nếu một hình vuông có độ dài cạnh là a (đơn vị độ dài) thì diện tích của nó bằng $a \times a$ (đơn vị diện tích).**

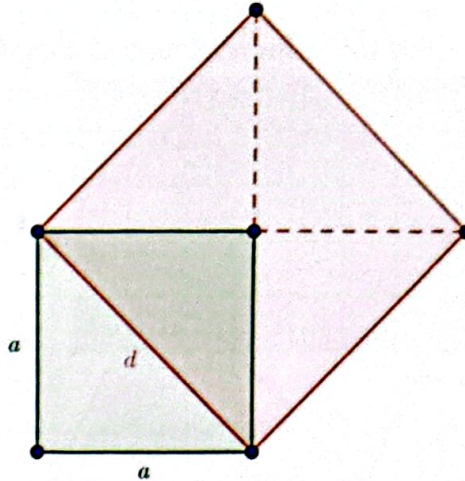
Tính diện tích hình vuông theo độ dài đường chéo



Hình 6.

Theo các bạn nhỏ, nếu như chưa biết độ dài cạnh của hình vuông, nhưng lại biết độ dài đường chéo của nó, thì liệu có thể tính được diện tích của hình vuông đó hay không?

Ý tưởng là chúng ta vẫn dựa vào cách tính thứ nhất, bằng cách “cắt” hình vuông theo đường chéo **d** thành hai tam giác vuông, rồi lấy tam giác vuông cân đó “lấp đầy” để thu được một hình vuông cạnh **d** .



Hình 7.

Rõ ràng ta phải cần **4** tam giác vuông màu xanh thì mới tạo ra được hình vuông màu cam. Nói cách khác, diện tích của hình vuông màu cam gấp **2** lần diện tích hình vuông màu xanh.

Như vậy, nếu biết được độ dài đường chéo **d** của một hình vuông cho trước thì diện tích của nó sẽ bằng:

$$S = \frac{d \times d}{2}.$$

Như vậy ta có thể tính diện tích hình vuông cạnh **a** , đường chéo **d** bằng hai cách sau:

$$S = a \times a = \frac{d \times d}{2}$$

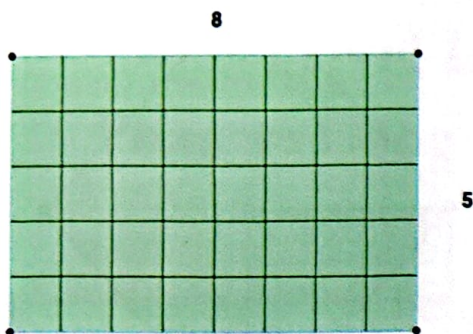
5.2 Diện tích hình chữ nhật

Diện tích của hình chữ nhật cũng được tính dựa vào diện tích của các hình vuông đơn vị. Để xây dựng ra công thức tính diện tích, ta xét một ví dụ cụ thể cho hình chữ nhật có chiều dài bằng **7**, chiều rộng bằng **1**:



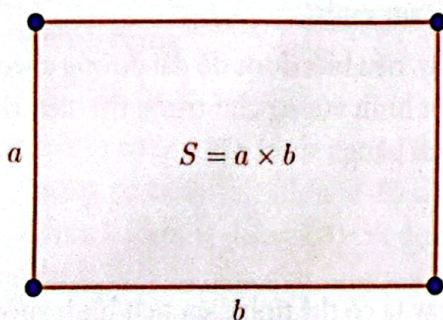
Hình 8.

Rõ ràng ta cần 7 hình vuông đơn vị để “lấp đầy” nó. Nếu tăng chiều dài bằng 8 đơn vị và chiều rộng bằng 5 đơn vị thì sẽ cần tới 40 hình vuông đơn vị:



Hình 9.

Đến đây các bạn nhỏ đã đoán ra được công thức tính diện tích của hình chữ nhật rồi đúng không. **Một hình chữ nhật có chiều dài a và chiều rộng b có diện tích bằng $a \times b$.**

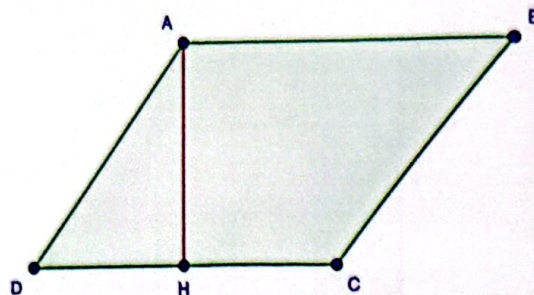


Hình 10.

5.3 Diện tích hình bình hành

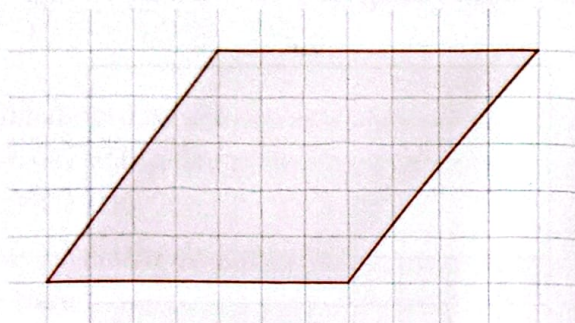
Bây giờ chúng ta sẽ xác định diện tích của một hình tổng quát hơn hình chữ nhật là hình bình hành. Nhắc lại rằng hình bình hành là hình có hai cặp cạnh đối diện song song với nhau. Từ một đỉnh, chẳng hạn đỉnh A , ta hạ AH vuông góc với cạnh đối diện DC .

Khi đó AH được gọi là đường cao ứng với cạnh DC .



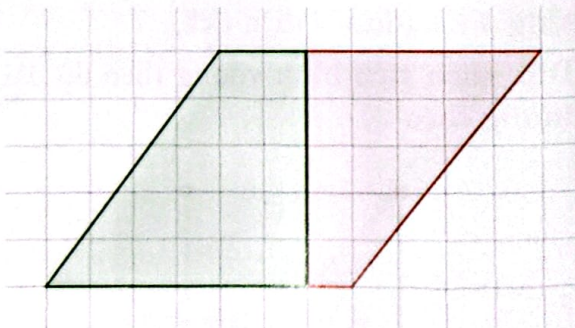
Hình 11.

Giả sử ta có một hình bình hành cho như trong hình vẽ sau:



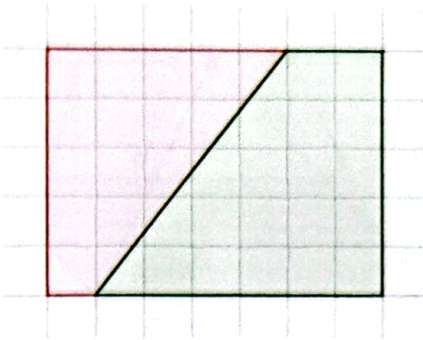
Hình 12.

Ý tưởng tìm diện tích hình bình hành là chúng ta cắt hình bình thành ra thành các hình nhỏ hơn theo một cách nào đó, rồi vận dụng các phép biến hình đưa về bài toán tính diện tích hình chữ nhật mà đã biết công thức. Chẳng hạn như ở hình trên, chúng ta có thể làm như sau: kẻ một đường cao cắt hình bình hành thành hai phần.



Hình 13.

Sau đó dùng phép tịnh tiến “trượt” phần màu xanh sang bên phải của phần màu cam



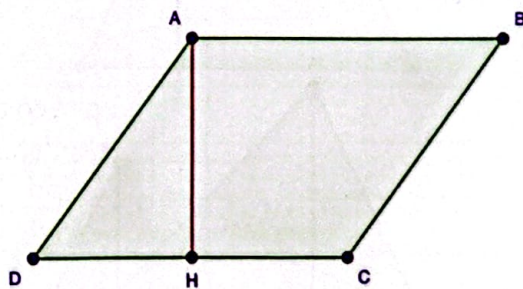
Hình 14.

Để thấy đây là hình chữ nhật có chiều dài bằng 7, chiều rộng bằng 5. Vì vậy diện tích hình bình hành sẽ bằng diện tích hình chữ nhật và bằng $7 \times 5 = 35$ (đơn vị diện tích).

Từ đây, ta có diện tích của hình bình hành $ABCD$ là

$$S_{(\text{hình bình hành})} = DC \times AH,$$

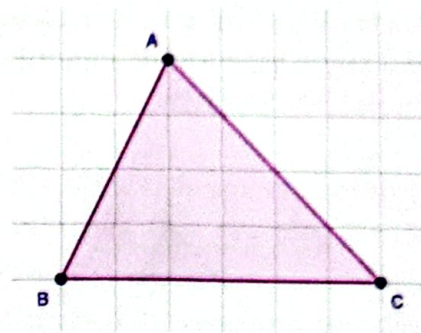
trong đó AH là đường cao kẻ từ A hay diện tích của hình bình hành bằng tích của một cạnh nhân với chiều cao tương ứng với cạnh này. **Vậy diện tích của hình bình hành bằng tích của một cạnh đáy và đường cao tương ứng với nó.**



Hình 15.

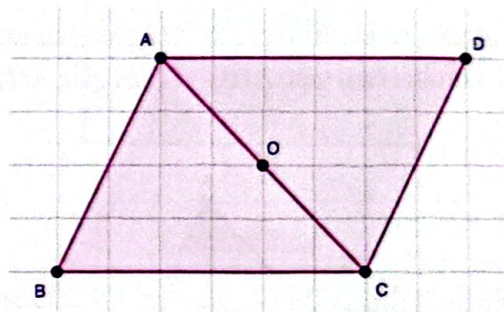
5.4 Diện tích hình tam giác

Chúng ta tiếp tục xây dựng công thức tính diện tích tam giác theo công thức tính diện tích của hình bình hành ở trên. Có một vài cách xây dựng, chẳng hạn ta đang muốn tính diện tích của tam giác ABC màu hồng dưới đây



Hình 16.

Bằng cách thực hiện phép đối xứng tâm O là trung điểm của cạnh AC , tam giác ABC sẽ biến thành tam giác CDA và thu được $ABCD$ là hình bình hành.

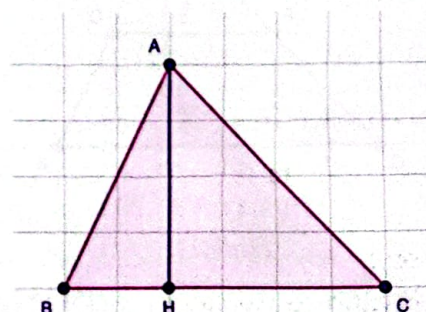


Hình 17.

Để thấy diện tích hình tam giác bằng một nửa diện tích hình bình hành có cùng chiều cao và đáy. Vậy diện tích hình tam giác ABC có công thức là:

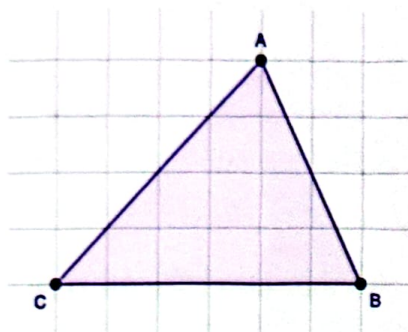
$$S_{(\text{hình tam giác})} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH.$$

Diện tích của tam giác bằng một nửa tích của một cạnh và đường cao tương ứng với nó.



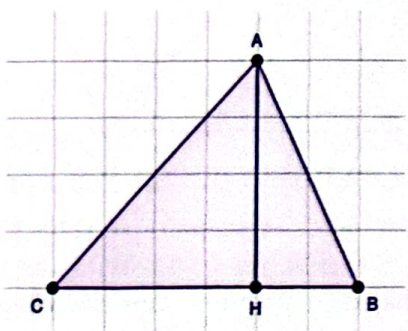
Hình 18.

Ngoài ra ta cũng có thể thực hiện cách phân chia như sau. Chẳng hạn để tính diện tích của tam giác ABC dưới đây.



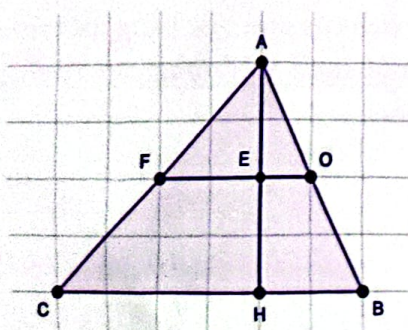
Hình 19.

Đầu tiên, ta kẻ đường cao AH rồi chia tam giác làm hai tam giác AHC và tam giác AHB



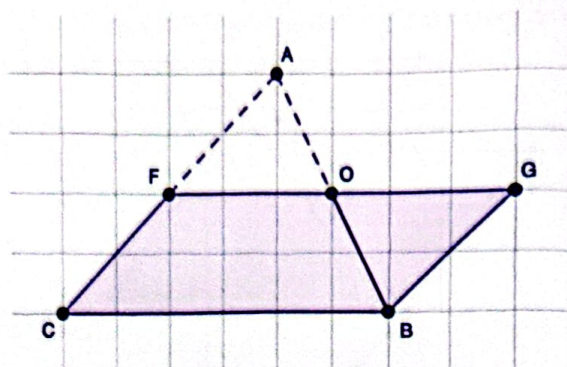
Hình 20.

Tiếp đó, tại trung điểm E của đường cao AH , kẻ đường thẳng FO song song với đáy



Hình 21.

Cuối cùng, ta quay tam giác AFO quanh tâm O một góc 180°



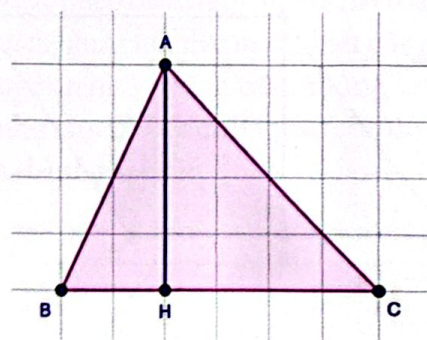
Hình 22.

Kết quả thu được là hình bình hành $CFGB$ có chiều cao bằng một nửa chiều cao của tam giác ABC ban đầu. Vậy diện tích tam giác vẫn là

$$S_{\text{tam giác}} = \frac{1}{2} \times BC \times AH.$$

Ngoài cách tính diện tích tam giác từ hình bình hành như trên, chúng ta cũng có thể đưa ra công thức tính diện tích tam giác trực tiếp từ hình chữ nhật. Các em hãy cùng xây dựng công thức diện tích tam giác theo cách này bằng cách làm bài tập sau nhé.

Bài tập 5.1. Xây dựng công thức tính diện tích mỗi tam giác sau theo công thức diện tích hình chữ nhật.

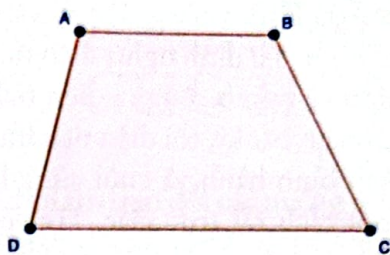


Hình 23.

5.5 Diện tích hình thang

Hình cuối cùng trong bài viết này giới thiệu cách xây dựng công thức tính diện tích là hình thang.

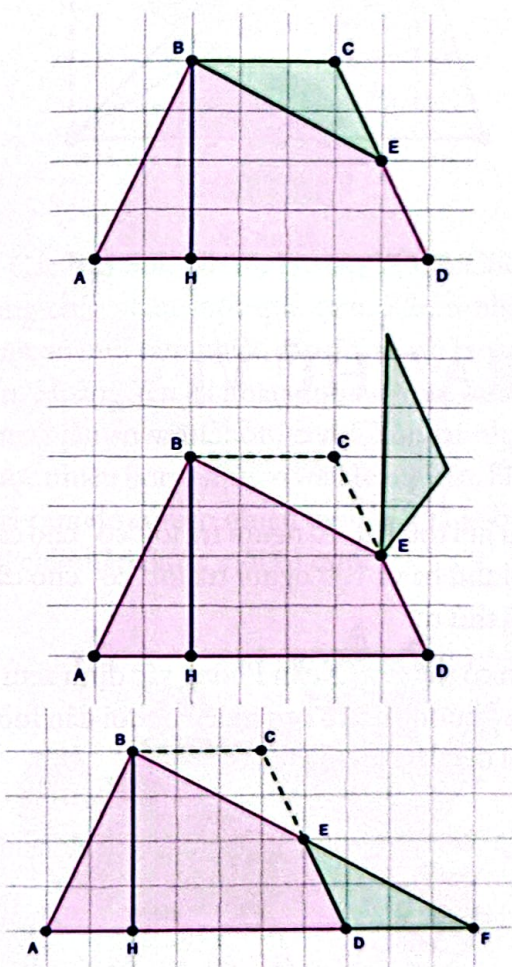
Như các em đã viết hình thang là một tứ giác có một cặp cạnh đối diện song song.



Hình 24.

Ta cũng thấy ngay một nhận xét đó là hình bình hành là một hình thang đặc biệt, với hai cặp cạnh đối diện song song.

Các em hãy quan sát hình vẽ sau.



Hình 25.

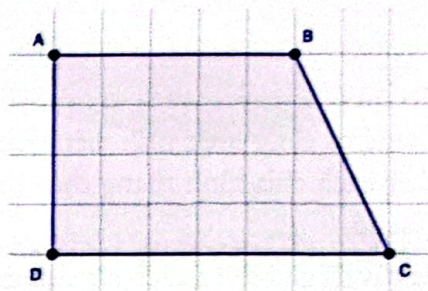
Như vậy, bằng cách thực hiện phép quay 180° tam giác BCE quanh tâm là trung điểm E của cạnh CD , hình thang đã “biến” thành một hình tam giác có chiều cao giữ nguyên, nhưng độ dài đáy bằng tổng của đáy nhỏ với đáy lớn. Do đó diện tích hình thang được

tính bằng

$$S_{\text{hình thang}} = \frac{((\text{đáy lớn} + \text{đáy nhỏ}) \times \text{chiều cao})}{2}$$

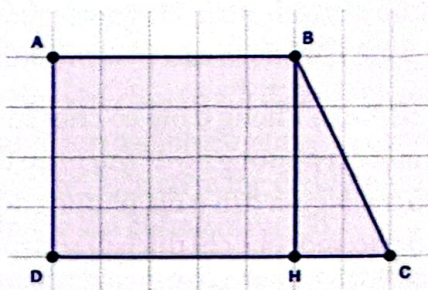
Như vậy diện tích của một hình thang bằng một nửa tích của tổng hai đáy và chiều cao của nó.

Ta có thể xây dựng công thức tính diện tích hình thang bằng cách khác như sau. Ví dụ như ta cần tính diện tích hình thang vuông $ABCD$ cho bởi hình vẽ



Hình 26.

Ta sẽ chia hình thang $ABCD$ thành hình chữ nhật $ABHD$ và hình tam giác BHC

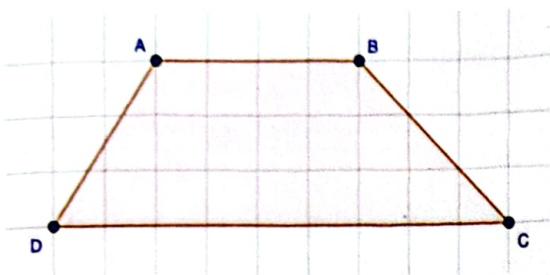


Hình 27.

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABHD} + S_{BHC} \\ &= DH \times BH + \frac{1}{2} \times HC \times BH \\ &= \frac{(2 \times DH + HC) \times BH}{2} \\ &= \frac{(DC + AB) \times BH}{2} \end{aligned}$$

Bài tập 5.2. Đưa ra công thức tính diện tích hình thang $ABCD$ sau theo công thức diện tích hình chữ nhật và diện tích hình tam giác.



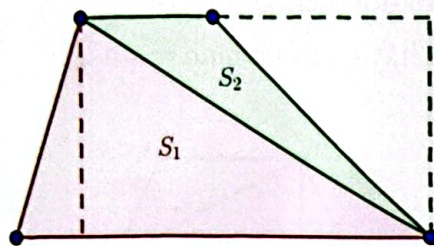
Hình 28.

Một phương án khác để xây dựng công thức hình thang là ta chia hình thang thành hai tam giác dọc theo đường chéo của nó. Các em hãy làm bài tập sau để xem công thức theo cách này có giống các cách chứng tra vừa trình bày ở trên không nhé.

Bài tập 5.3. Lập công thức tính diện tích hình thang từ công thức tính diện tích tam giác bằng cách chia hình thang theo đường chéo của nó.

Bài viết này đã giới thiệu cách xây dựng công thức diện tích một số hình cơ bản, thông qua

diện tích của hình vuông đơn vị và những phép dời hình. Từ định nghĩa diện tích hình vuông đơn vị, ta mở rộng ra diện tích hình vuông có cạnh bất kỳ, rồi diện tích hình chữ nhật, hình bình hành và cuối cùng là hình thang một cách rất trực giác. Hy vọng bài viết sẽ không những giúp các em nhớ về công thức tính diện tích một cách dễ dàng mà còn có thể tự mình xây dựng được những công thức này một cách rất tự nhiên.



Hình 29.

CUỘC ĐIỀU TRA THÚ VỊ

GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong đang có chuyến công tác tới một địa phương nọ để thu nhập thông tin điều tra. Người dân ở địa phương đó chia thành 3 phe: một phe chỉ thích đi xe đạp, một phe chỉ thích đi xe điện và một phe chỉ thích đi bộ. Xem ra phe nào cũng có lý lẽ để bảo vệ cho quan điểm của mình. Xuân Phong cũng được biết rằng một số người ở địa phương đó luôn nói dối, còn những người còn lại thì luôn nói thật. Một vài ngày sau, Xuân Phong phát cho mỗi người dân 4 câu hỏi sau đây:

1. “Anh (chị) có thích đi xe đạp không?”
2. “Anh (chị) có thích đi xe điện không?”
3. “Anh (chị) có thích đi bộ không?”
4. “Anh (chị) có trả lời trung thực các câu hỏi trên hay không?”

Có 40 người dân địa phương trả lời “có” cho câu hỏi thứ nhất, 50 người trả lời “có” cho

câu hỏi thứ hai, 70 người trả lời “có” cho câu hỏi thứ ba và 100 người trả lời “có” cho câu hỏi thứ tư.

Em có thể giúp Xuân Phong xác định xem ở địa phương đó có bao nhiêu người dân luôn nói thật hay không?



CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Việt chơi trò trao đổi các miếng dán decal. Cứ mỗi miếng decal Việt lại đổi được 5 miếng decal khác. Lúc đầu Việt chỉ có đúng 1 miếng decal. Hỏi sau 30 lần trao đổi, Việt sẽ có bao nhiêu miếng decal?



2. Các bạn Sói, Nhím, Hoàng Yến và Chồn cùng chia nhau một quả cam. Nhím nhận được số múi cam nhiều gấp đôi so với Hoàng Yến. Hoàng Yến lại nhận được số múi cam ít hơn 5 lần so với Chồn, còn Chồn lại nhận được nhiều hơn 8 múi so với Hoàng Yến. Hỏi quả cam đó có bao nhiêu múi, biết rằng bạn Sói chỉ nhận được mỗi vỏ cam.

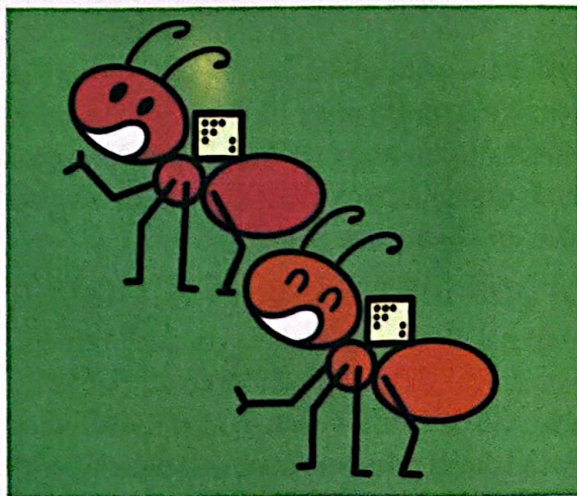


3. Ba chú lùn có tên là Uống Rời, Ăn Rời và Ngủ Rời tìm thấy một viên kim cương, một miếng hoàng ngọc và một chiếc chậu đồng trong hang động. Chú Ăn Rời có mũi chùm màu đỏ và có bộ râu dài hơn của chú Uống Rời. Chú lùn tìm thấy chiếc chậu đồng có bộ râu dài nhất và có mũi chùm màu xanh. Chú lùn có bộ râu ngắn nhất thì tìm thấy viên kim

cương. Hỏi các chú lùn lần lượt đã tìm thấy thứ gì?



4. Có hai chú kiến Béo và Gày, mỗi chú phải chuyển 150g đồ ăn dự trữ từ điểm A (là nơi các chú đang đứng) tới điểm B, khoảng cách giữa chúng là 15m. Chú kiến Béo đi với vận tốc 3 m/phút, nhưng có thể mang tới 5g đồ ăn mỗi lần. Chú kiến Gày đi với vận tốc 5m/phút nhưng chỉ mang được 3g đồ ăn mỗi lần. Hỏi chú kiến nào di chuyển được hết số đồ ăn cần vận chuyển tới điểm B nhanh hơn và nhanh hơn bao nhiêu phút? Ta coi vận tốc của mỗi chú kiến có mang đồ không sai khác với vận tốc khi không mang đồ.



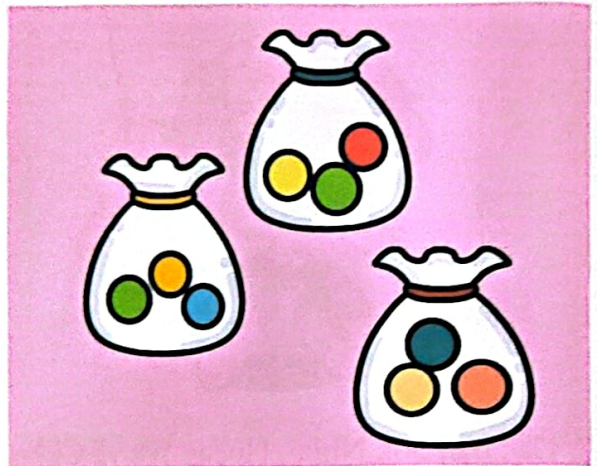
5. Có 16 cậu bé rủ nhau ra hồ câu cá. Biết rằng cậu bé nào mà đi ủng thì cũng đội mũ

lưỡi trai. Có **10** cậu bé không đi ủng và có **2** cậu bé không đội mũ lưỡi trai. Hỏi số các cậu bé đội mũ lưỡi trai nhưng không đi ủng nhiều hơn hay ít hơn số các cậu bé đi ủng là bao nhiêu?



6. Có **5** chiếc túi, trong mỗi chiếc túi lại có một ít kẹo. Trong túi thứ nhất có **7** chiếc kẹo,

trong túi thứ hai có **8** chiếc kẹo, trong túi thứ ba có **9** chiếc kẹo, trong túi thứ tư có **11** chiếc kẹo và trong túi thứ năm có **15** chiếc kẹo. Từ một chiếc túi bất kỳ ta có thể nhặt ra một số lượng kẹo tùy ý và chuyển số kẹo đó sang một chiếc túi khác. Hỏi có thể nhận được số kẹo bằng nhau trong tất cả các túi sau đúng hai lần chuyển kẹo hay không? Cũng câu hỏi như trên với ba lần chuyển kẹo.



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 4 năm 2024)

1. Cô giáo phát cho **4** em học sinh Mai, Tuấn, Vinh, Ngọc tổng cộng **66** chiếc bút. Mai được phát nhiều hơn Tuấn một chiếc bút, Vinh được phát nhiều hơn Mai một chiếc bút, còn Ngọc lại được phát nhiều hơn Vinh một chiếc bút. Hỏi Ngọc được cô giáo phát cho bao nhiêu chiếc bút?

Lời giải. Ta tạm thu lại một chiếc bút của Mai, hai chiếc của Vinh và ba chiếc bút của Ngọc. Khi đó cả ba bạn sẽ có số bút bằng nhau. Ta đã thu lại **6** chiếc bút, vì thế **60** chiếc còn lại được chia cho **4** bạn, mỗi bạn được **15** chiếc. Vì ta tạm thu ba chiếc của Ngọc nên cô giáo đã phát cho Ngọc **18** chiếc.

Đáp số: **18** chiếc.



2. Ba người bạn cùng vào quán ăn sáng. Một người gọi mua **4** chiếc bánh ngọt, một cốc

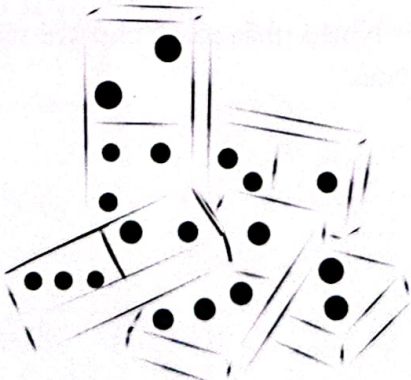
sữa và 10 chiếc quẩy và trả hết 40000 đồng. Người thứ hai gọi mua 3 chiếc bánh ngọt, một cốc sữa và 7 chiếc quẩy và trả hết 30000 đồng. Người thứ ba phải trả bao nhiêu tiền nếu anh ta chỉ mua một chiếc bánh ngọt, một cốc sữa và một chiếc quẩy?



Lời giải. Từ đề bài ta thấy 8 cái bánh ngọt, 2 cốc sữa và 20 chiếc quẩy có giá là 80000 đồng, còn 9 cái bánh ngọt, 3 cốc sữa và 21 chiếc quẩy có giá là 90000 đồng. Hiệu hai giá tiền này chính là giá của 1 cái bánh ngọt, 1 cốc sữa và 1 chiếc quẩy.

Đáp số: 10000 đồng.

3. Tất cả các quân của bộ domino (gồm 28 quân) được xếp đúng thành một dãy xích theo quy luật của trò chơi: điểm số tại một đầu của quân cờ này trùng với điểm số tại một đầu của quân cờ kia. Một đầu của dãy xích có 5 điểm. Hỏi đầu kia của dãy có bao nhiêu điểm?



Lời giải. Năm điểm (ngũ) được xuất hiện trên các nửa của bộ domino đúng 8 lần: {5,0}, {5,1}, {5,2}, {5,3}, {5,4}, {5,5} và {5,6}. Bên trong dãy xích, các 5 điểm

được chia thành từng cặp. Mà 5 điểm đứng đầu tiên bị lẻ, vì thế 5 điểm cuối cùng sẽ ở đầu kia.

Đáp số: 5 điểm.

4. Ở vùng Rừng Núi nọ, chỉ có các giống người Thần Tiên và người Lùn sinh sống. Người Lùn luôn nói dối nếu nói về số vàng của mình, còn luôn nói thật trong tất cả các trường hợp còn lại. Người Thần Tiên thì luôn nói dối khi nói về người Lùn, còn luôn nói thật trong các trường hợp còn lại. Một lần nọ, hai người dân vùng Rừng Núi nói chuyện với nhau:

A. Toàn bộ số vàng mà tôi có là do tôi đã đánh cắp ở chỗ con Rồng.

B. Anh nói dối.

Em hãy xác định xem mỗi người trong số hai người đó là người Thần Tiên hay là người Lùn.

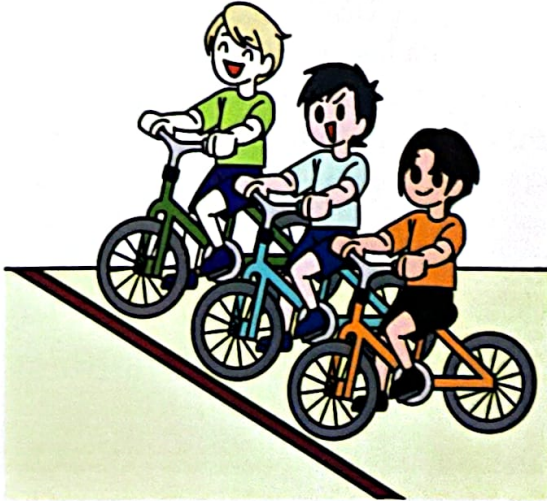


Lời giải. Giả sử A là người Thần Tiên. Khi đó A nói thật, và B nói dối. Nhưng cả người Lùn lẫn người Thần Tiên đều không nói dối khi nói về những người Thần Tiên, do đó A là người Lùn. Khi nói về vàng, A đã nói dối, do đó B đã nói thật về A. Điều này chỉ có thể khi B là người Lùn.

Đáp số: Cả A và B đều là các người Lùn.

5. Ba bạn Vinh, Phúc và Khánh tham gia một cuộc đua xe đạp trong nhà theo đường đua vòng tròn, cùng xuất phát một lúc. Vinh đạp xe mỗi vòng quanh sân nhanh hơn Phúc 2 giây, còn Phúc đạp xe mỗi vòng quanh sân nhanh hơn Khánh 3 giây. Khi Vinh về

đến đích để kết thúc quãng đua của mình, thì Phúc phải đạp thêm 1 vòng còn Khánh phải đạp thêm 2 vòng nữa mới kết thúc. Hỏi quãng đường đua bao gồm mấy vòng quanh sân?



Lời giải. Giả sử quãng đường đua bao gồm n vòng. Khi đó trên cả đoạn đua, Vinh đã đạp nhanh hơn Phúc $2n$ giây (trong thời gian đó Phúc đạp được vòng cuối cùng của mình), còn Vinh đạp nhanh hơn Khánh $5n$ giây (trong thời gian đó Khánh đạp được 2 vòng). Suy ra Khánh đạp mỗi vòng mất $2.5n$ giây, chậm hơn $0.5n$ giây so với Phúc. Theo đề bài $0.5n = 3$. Vậy $n = 6$.

Đáp số: Đường đua có 6 vòng.

6. Ở một vườn bách thú nọ có rất nhiều chú khỉ, nhưng mỗi chú khỉ sẽ chỉ hạnh phúc nếu được cho ăn ba loại hoa quả khác nhau.

Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chú khỉ sẽ hạnh phúc, nếu người chăm sóc vườn thú chỉ có 20 quả lê, 30 quả táo, 40 quả đào và 50 quả quýt?



Lời giải. Ta để tất cả quýt sang một bên. Còn lại $20 + 30 + 40 = 90$ trái hoa quả. Do mỗi chú khỉ chỉ được cho ăn tối đa 1 quả quýt để hạnh phúc, nên mỗi chú khỉ muốn hạnh phúc phải ăn ít nhất 2 quả trong số 90 quả này. Vì thế số khỉ được hạnh phúc không vượt quá $90 : 2 = 45$ (chú).

Ta chỉ ra cách làm 45 chú khỉ hạnh phúc như sau:

5 chú được ăn lê, táo và quýt;

15 chú được ăn lê, đào và quýt;

25 chú được ăn đào, táo và quýt.

Đáp số: Nhiều nhất có 45 chú khỉ sẽ được hạnh phúc.



PERFECT SQUARES ARE EVERYWHERE (Part IV)

NGHIA DOAN¹

This article is the fourth part of the series on the expedition to find *Perfect Squares*.

Example 16. n is an arbitrary positive integer. Find positive integer m such that

$$\binom{m}{2} = 3 \binom{n}{4}.$$

Solution. First we prove the following claim,

The product of 4 consecutive positive integers plus one is always a perfect square.

Let n be an arbitrary positive integer > 3 , we have

$$\begin{aligned} & n(n-1)(n-2)(n-3) + 1 \\ &= n(n-3) \cdot (n-1)(n-2) + 1 \\ &= (n^2 - 3n)(n^2 - 3n + 2) + 1 \\ &= ((n^2 - 3n) + 1)^2. \end{aligned}$$

Now come back to our problem, by the claim we have:

$$\begin{aligned} & \binom{m}{2} = 3 \binom{n}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{m(m-1)}{2} &= \frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ \Leftrightarrow 4m(m-1) &= n(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= ((n^2 - 3n) + 1)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow (2m-1)^2 &= ((n^2 - 3n) + 1)^2 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2) \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Example 17. Prove that if the sum $x + y$ can be written as a sum of a perfect square and thrice of another perfect square, then the sum $x^3 + y^3$ can also be written as a sum of a perfect square and thrice of another perfect square. In other words, if there exist integers a, b such that $x + y = a^2 + 3b^2$, then there exist integers c, d , such that

$$x^3 + y^3 = c^2 + 3d^2.$$

Solution. First we prove the following claim

If x and y are sums of a perfect square and thrice of another perfect square, then xy is also a sum of a perfect square and thrice of another perfect square. In other words, if there are integers a, b, c, d such that $x = a^2 + 3b^2$, $y = c^2 + 3d^2$ then $xy = (a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2)$ can be written as a sum of a perfect square and thrice of another perfect square.

It is easy to verify that $(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = 3(ac - bd)^2$.

Now, write $x + y = a^2 + 3b^2$, we have that $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, where:

$$x^2 - xy + y^2 = \begin{cases} \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2, & \text{if } x, y \text{ have the same parity} \\ \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2}\right)^2, & \text{if } x, y \text{ have different parity} \end{cases}$$

Thus, $x^2 - xy + y^2$, can be written as a sum of a perfect square and thrice of another perfect square. Hence, $x^3 + y^3$ can be written as a

¹ Ottawa, Canada.

sum of a perfect square and thrice of another perfect square.

Example 18. Prove that for integers x, y such that

$$2x^2 + x = 3y^2 + y,$$

then $2x + 2y + 1$ and $3x + 3y + 1$ are perfect squares.

Solution. First, note that:

$$\begin{aligned} & (2x + 2y + 1)(x - y) \\ &= 2x^2 - 2xy + 2yx - 2y^2 + x - y \\ &= 2x^2 - 2y^2 + 3y^2 - 2x^2 = y^2 \\ & (3x + 3y + 1)(x - y) \\ &= 3x^2 - 3xy + 3yx - 3y^2 + x - y \\ &= 3x^2 - 3y^2 + 3y^2 - 2x^2 = x^2 \end{aligned}$$

Now, $(2x + 2y + 1)(3x + 3y + 1)(x - y)^2 = (xy)^2$. If $xy = 0$, then $x = 0$ or $y = 0$. From the given equality, we see that both numbers x and y are equal to 0 if one of them is 0. Then both $2x + 2y + 1$ and $3x + 3y + 1$ are 1 and thus are perfect squares.

Now, suppose that $xy \neq 0$. Let $d \mid \gcd(2x + 2y + 1, 3x + 3y + 1)$, then $d \mid (3x + 3y + 1) - (2x + 2y + 1) = x + y$. This implies that $d \mid (2x + 2y + 1) - 2(x + y) = 1$. Therefore $\gcd(2x + 2y + 1, 3x + 3y + 1) = 1$, and since $(2x + 2y + 1)(3x + 3y + 1)(x - y)^2 = (xy)^2$, each of $2x + 2y + 1$ and $3x + 3y + 1$ is a perfect square.

Example 19. Prove that the sum of squares of twelve positive consecutive integers is not divisible by the sum of them. In other words, if n is a non-negative integer, then

$$\begin{aligned} & (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + 12) \\ & \nmid (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \dots + (n + 12)^2. \end{aligned}$$

Solution First, note that the sum of any three positive consecutive integers is divisible

by 3, thus the sum of twelve positive consecutive integers is divisible by 3, too. On the other hand, the sum of squares of three consecutive integers when divided by 3 leaves a remainder of 2, so the sum of twelve positive consecutive integers when divided by 3 has a remainder 2. The conclusion follows.

Example 20. Let N be a 16-digit number, where none of its digits can be 0, 1, 4, or 9. Prove that there exist some of its consecutive digits such that their product is a perfect square.

Solution. Let $N = \overline{a_1 a_2 \dots a_{16}}$. Consider the following sequence of 16 terms:

$$a_1, a_1 a_2, \dots, a_1 a_2 \dots a_{16} \quad (*)$$

Note that since each of $a_1, a_2, \dots, a_{16}$ can only be 2, 3, 5, 6, 7, 8, each of the terms can only be factored as

$$2^{2\alpha_2} + \beta_2 \cdot 3^{2\alpha_3} + \beta_3 \cdot 5^{2\alpha_5} + \beta_5 \cdot 7^{2\alpha_7} + \beta_7,$$

where α_i ($i = 2, 3, 5, 7$) are non-negative integers, β_i ($i = 2, 3, 5, 7$) are 0 or 1.

Thus, the sequence $(*)$ is one-to-one corresponding to a sequence of four-digit binaries $\beta_2 \beta_3 \beta_5 \beta_7$. If there is a 0000 binary, then it is the term in $(*)$ which is a perfect square. If there is no such binary, then among 16 terms, two should have the same four-digit binaries $\beta_2 \beta_3 \beta_5 \beta_7$. Let assume that they are $a_1 a_2 \dots a_i$ and $a_1 a_2 \dots a_j$, where $i < j$, then

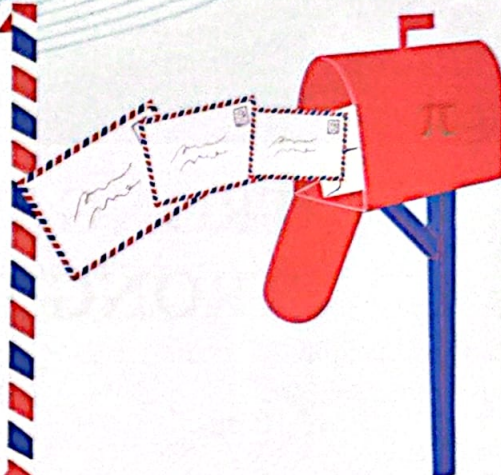
$$\frac{a_1 a_2 \dots a_j}{a_1 a_2 \dots a_i} = a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j$$

has a 0000 binary representation of its prime factorization. This product is a perfect square.

Note that 16 is the best possible lower limit. For 15, the following number 232523272325232 is a counter example.

MỜI BẠN ĐỌC RA ĐỀ CHO π

Chuyên mục Thách thức Toán học
trân trọng mời các thầy cô giáo, các
bạn học sinh, sinh viên đóng góp các
bài toán hay do mình sáng tác hoặc
sưu tầm.



YÊU CẦU ĐỐI VỚI BÀI TOÁN GỬI ĐĂNG

Dành cho đối tượng là
học sinh THCS hoặc
THPT

Có ý tưởng hay độc đáo trong lời
giải.

Đề bài sáng tác hoặc sưu tầm,
được gửi kèm cùng lời giải. Đề
bài chưa được công bố hay gửi
công bố trên các tạp chí, báo
toán bằng tiếng Việt.

Với những bài toán khó,
khuyến khích tác giả gửi
thêm các bài phân tích
về ý tưởng, phương pháp
tư duy, mối liên hệ với
các bài toán khác để
đăng trong chuyên mục
Học cùng π .

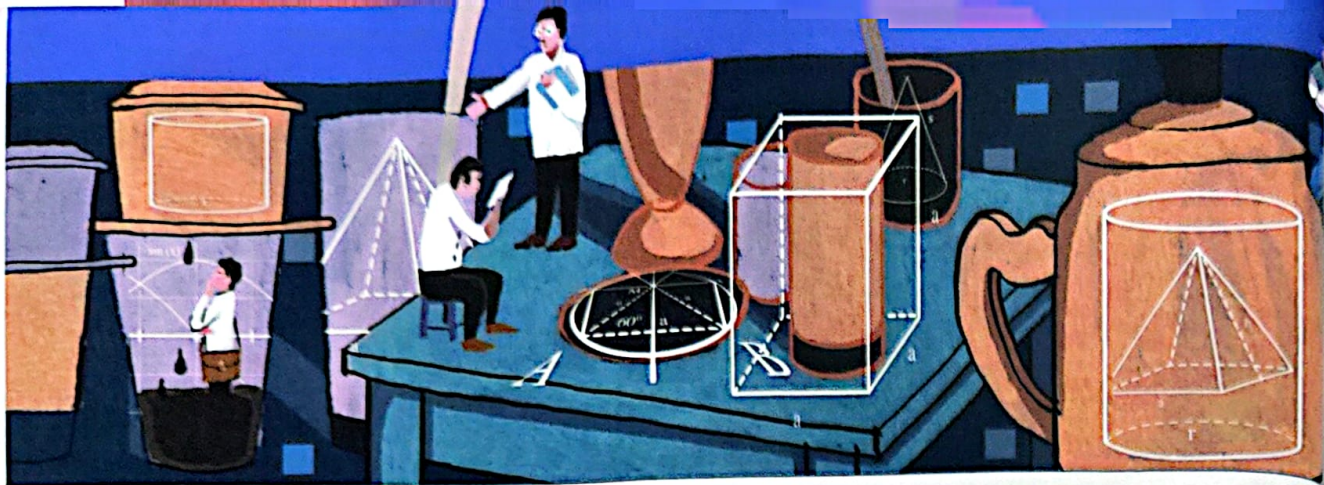
Đối với đề sưu tầm cần ghi rõ
nguồn gốc (trên các sách báo,
tạp chí hay trong các kỳ thi). Đối
với các bài toán được phát triển
từ một bài toán khác, cũng
khuyến khích tác giả giới thiệu
bài toán gốc.

*Các bạn học sinh, sinh viên có đề bài trên chuyên mục Thách thức Toán học sẽ nhận được
giấy khen từ Tạp chí π .*

Thông tin Tòa soạn

✉ Gửi bài: bbt@pi.edu.vn
✉ Giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com

☎ Hotline: 024.3215.1407
🌐 Website: www.pi.edu.vn



TRONG TOÁN CÓ THƠ, TRONG THƠ CÓ TOÁN

TRẦN VĂN NHUNG¹

Mở đầu

Đây là khẳng định của nhiều nhà toán học và nhà thơ nước ta và quốc tế mà tôi rất tâm đắc. Đọc và suy ngẫm sâu thêm tôi càng khâm phục các nhà thơ lớn của nhân loại, ví dụ như Nguyễn Du, W. Goethe (Đức) và R. Tagore (Ấn Độ), ... Vì tác phẩm của họ không chỉ là sản phẩm của trái tim mà cả khối óc, tổ hợp một cách thiên tài để có thể chỉ đường cho nhân loại đến bến bờ tự do và hạnh phúc.

Tôi thường hình dung những con người tài năng như những thân cây mọc thẳng đứng vút cao. Đặc biệt, những thiên tài là số rất ít ỏi những thân cây tạo thành các đường thẳng song song lên tận vô cùng trên trời xanh. Dù thân cây có mọc ở miếng đất nào, lên vô cùng chúng đều gặp nhau, gặp nhau ở điểm vô cùng. Tức là các thiên tài ở các lĩnh vực khác nhau họ đều “hiếu” nhau trên đỉnh cao gặp gỡ, hội tụ, ở vô cùng, nói riêng là nhà toán học và nhà thơ.

Các nhà toán học thế giới nói về toán và thơ

Nhà toán học kiệt xuất người Đức, một trong các cha đẻ ra giải tích toán học, Karl Weierstrass (1815 – 1897), cũng đã khẳng định: “Đúng là nếu một nhà toán học không có tâm hồn thi sĩ thì không bao giờ có thể

trở thành một nhà toán học hoàn hảo được (It is true that a mathematician who is not also something of a poet will never be a perfect mathematician)”. Có một số tác giả cũng đã trích dẫn một câu nói tương tự của Sofya Vasilyevna Kovalevskaya, một nữ học trò thông minh và xinh đẹp người Nga của Weierstrass.



Karl Weierstrass (1815 – 1897).

Trong bài báo “Toán học và Thơ” trên Tia Sáng, 9/11/2016, đề tặng GS. toán học Hoàng Tụy và Nhà thơ Việt Phương, nhà vật lý người Pháp nổi tiếng Pierre Darriulat đã nhắc lại hai câu nói vui trên để nhấn mạnh sự

¹ Hà Nội.

tương đồng giữa toán học và thơ. Darriulat cũng cho biết toán và thơ được coi là cùng sinh ra đầu tiên ở Mesopotamia (nay là Iraq) khoảng năm-sáu nghìn năm trước khi chữ viết bắt đầu xuất hiện.



Sofya Vasilyevna Kovalyevskaya (1850 – 1891).

Henri Poincaré (1854 – 1912) là nhà toán học, vật lý học và triết học Pháp vĩ đại đã từng nói: “Mathematics is the art of giving the same name to different things. Poetry is the art of giving different names to the same thing”. Tạm dịch là: “Toán học là nghệ thuật đặt cùng tên cho những thứ khác nhau. Thơ là nghệ thuật đặt tên khác nhau cho cùng một thứ”.

Giả thuyết nổi tiếng, xuyên thế kỷ của H. Poincaré, một trong bảy bài toán Thiên niên kỷ, đã được Grigori Perelman (SN 1966, Nga) chứng minh. Người ta gọi Perelman là “người thông minh nhất hành tinh” và “thiên tài kỳ dị”. Henri Poincaré và David Hilbert (1862 – 1943, Đức) là hai nhà toán học vĩ đại của nhân loại có đóng góp quan trọng trong việc tìm ra Thuyết Tương đối của Albert Einstein (1879 – 1955, Đức).

“Diễn đàn Toán học Việt Nam” (5/5/2019)

nêu đề thi vấn “lạ”: Hãy viết một đoạn văn trình bày suy nghĩ của anh/chị về câu nói: “Trong một tam giác vuông, bình phương của cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông”. Dùng văn “giải thích” toán!. Có rất nhiều cách làm, một ví dụ là em Trương Phan Minh Thảo, học sinh THPT ở TPHCM. Rất hoan nghênh sự sáng tạo khi ra đề thi mở, mở đến mức dùng văn bình toán và dùng toán bình văn!

Bài thơ đố tuổi trên mộ nhà Toán học nổi tiếng Diophantus là ví dụ một bài toán bằng thơ (Nguyễn Sương). Diophantus là nhà toán học Hy Lạp nổi tiếng, được mệnh danh là “cha đẻ của ngành đại số”. Ông có đóng góp to lớn vào sự phát triển của đại số học và cũng có rất nhiều ảnh hưởng đến lý thuyết số sau này. Bài thơ ngắn trên mộ ông không chỉ tóm tắt cuộc đời nhà toán học vĩ đại, mà còn là câu đố thú vị.



Henri Poincaré (1854 – 1912).

Cuộc đời của Diophantus có thể được tóm gọn trong những dòng thơ khắc trên bia mộ: “Hỡi người qua đường, đây là nơi Diophantus yên nghỉ

Những con số sau cho biết cuộc đời ông:
Ông trải qua $\frac{1}{6}$ cuộc đời trong thời niên thiếu,

Thêm $\frac{1}{12}$ nữa, râu trên cằm đã mọc,

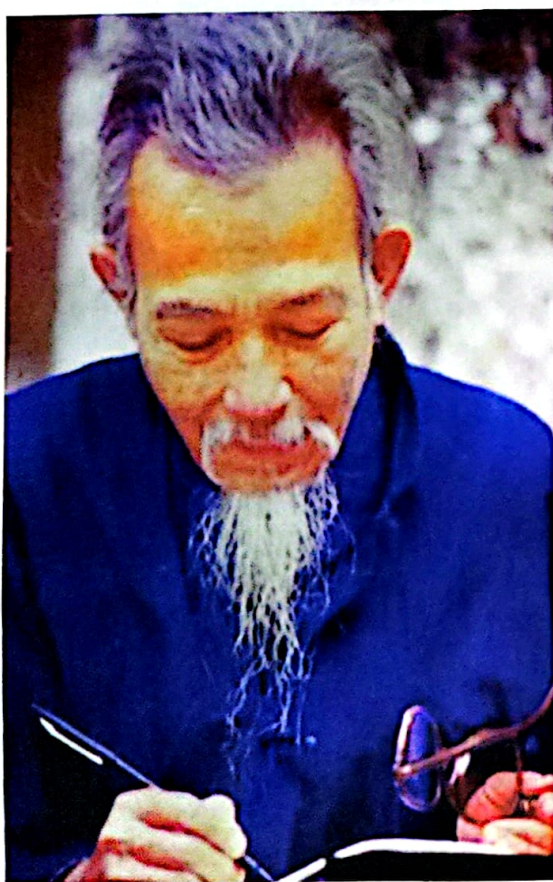
Trải thêm $1/7$ cuộc đời, ông lấy vợ, 5 năm sau, ông vui sướng đón chào đứa con trai đầu lòng,

Nhưng hồi ôi, số phận thật nghiệt ngã, Cậu bé chỉ sống được $1/2$ tuổi đời cha, Ông tìm sự an ủi trong khoa học thêm 4 năm rồi theo con về thế giới bên kia”.

Dựa vào bài thơ trên, bạn thử tính xem Diophantus thọ bao nhiêu tuổi. (Đáp số là 84).

Một số nhà thơ và nhà toán học Việt Nam

Phùng Quán (1932 – 1995) là một trong những nhà văn Việt Nam nửa cuối thế kỷ XX được nhiều thế hệ bạn đọc yêu mến và trân trọng. Ông là nhà văn chiến sĩ trọn đời trung thành với cách mạng, với lý tưởng mà mình theo đuổi từ thuở thiếu thời: đi theo Vệ quốc đoàn, trở thành người chiến sĩ chiến đấu vì Tổ quốc, phụng sự nhân dân (Kim Phước).



Phùng Quán (1932 – 1995).

GS. TSKH. Đỗ Long Vân và cố GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn (1950 – 2022) là hai nhà

toán học có uy tín của Viện Toán học, Viện Hàn lâm KH&CN Việt Nam.

GS. Đỗ Long Vân đã viết trên FB Long Van Do ngày 19/6/2016: Tôi quen biết anh Phùng Quán là nhờ Nguyễn Xuân Tấn (bạn cùng Viện Toán). Hồi đó Tấn hay rủ tôi lên chơi nhà anh chị Phùng Quán ở ven Hồ Tây, phía sau Trường Chu Văn An. Nơi đây lúc bấy giờ còn hoang vắng lắm, hầu như chưa có một quán xá nào. Gia đình chị Bội Trâm – vợ anh Quán – có nhà ở phố cổ phải sửa chữa, loại đi một ít cột kèo, ván gỗ. Anh Quán xin những thứ này về dựng một gian nhà sàn diện tích bằng khoảng hai cái chiếu, lúc đầu không có mái, để làm chỗ ngồi chơi, tiếp khách. Anh gọi nơi này là “Chòi ngắm sông”, hay tên chữ là “Vọng ba lâu” cho nó có vẻ sang – Anh bảo thế.

Một lần, trong khi ngồi uống rượu tại nhà anh Quán, một vị văn nghệ sỹ hỏi: “Toán là gì nhỉ?” Quả cũng không dễ để giải thích ngắn gọn cho các văn nghệ sỹ thế hệ lớn tuổi thời bấy giờ về toán học hiện đại, vì các vị ấy có được học Toán mấy đâu! Nguyễn Xuân Tấn rất nhanh trí trả lời: “TOÁN là THƠ của Khoa học tự nhiên”. Anh Quán cười hóm hỉnh đáp lại liền: “Vậy thì THƠ là TOÁN của Khoa học xã hội”. Quả là những định nghĩa không thể ngắn gọn hơn?

Trong thời kỳ “Nhân văn Giai phẩm” anh Quán có đăng một bài thơ có tên là “LỜI MẸ DẶN”, trong đó nhà thơ tuyên bố phương châm sống của mình. Chính vì vậy mà Nhà thơ, Tác giả tiểu thuyết “Vượt Côn Đảo”, đã ròng rã nhiều năm phải sống cảnh “Cá trộm, Rượu chui, Văn chui” như chính ông đã tự tổng kết quãng đời đó của mình!

Một trong những tác phẩm thơ cuối đời của Phùng Quán là trường ca bằng thơ “Trăng hoàng cung”, hình thức là một truyện tình, nhưng thực ra là để nói lên tấm lòng son sắt thủy chung với lý tưởng sống của mình, dù có bị đời bạc bẽo, ruồng bỏ.

Trong ngày giỗ đầu anh Phùng Quán, sáng thức dậy, đang bận khoản chưa biết mang gì lên thắp hương Anh, thì, không biết có phải do Anh mách bảo hay không, tôi nảy ra một ý thơ, vội đánh máy, “liều mạng” đem đặt lên bàn thờ Nhà thơ. Suốt từ đó cho đến lúc chị Bội Trâm ra đi theo Anh, bài thơ này luôn được treo trang trọng bên bàn thờ anh Phùng Quán.

“Tôi yêu Anh!

Tôi yêu Anh không vì “Lời mẹ dặn”;
 Tôi yêu Anh chẳng vì “Trăng hoàng cung”;
 Tôi yêu Anh – một tâm hồn thanh khiết,
 Lao khổ một đời lắng đọng thành thơ”.



Đỗ Long Vân.

Tôi đã mạn phép GS. Đỗ Long Vân bình luận về bài viết đó của anh: “Cảm ơn GS. Đỗ Long Vân! Rất hay, chân thành và sâu sắc. Nhà thơ Phùng Quán và cố GS. Nguyễn Xuân Tấn đã xuất khẩu thành định nghĩa về toán và thơ, không thể hay hơn và chính xác hơn, như anh Vân đã nói. Sau khi đọc xong bình luận cùng bài thơ “Tôi yêu Anh!” của anh Vân, tôi thêm khâm phục Phùng Quán và quý trọng các nhà toán học Nguyễn Xuân Tấn và Đỗ Long Vân. Chỉ cần hai câu thơ (cuối, trong 4 câu), anh Vân đã phác thảo hoàn chỉnh chân dung Phùng Quán.”

Có một số đồng nghiệp toán học của chúng tôi đã trở thành các nhà thơ được bạn đọc hâm mộ và quý trọng, ví dụ như Vương Trọng, Đặng Hấn, Thạch Quý, Lê Quốc Hân, ... và một số người khác mà tôi xin lỗi chưa kể đủ.



Nguyễn Xuân Tấn (1950 – 2022) (bên phải).

GS. Nguyễn Bá, nguyên Chủ nhiệm Khoa Sinh học, ĐH TH HN/ Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐH QG HN (con rể của Nhà thơ Khương Hữu Dụng), một nhà khoa học rất ham thích văn thơ và toán học đã nói với tôi: “Nay ở trong thơ luôn có toán”.

Một lời khuyên

Của GS. Darriulat: “Chúng ta hãy dạy trẻ em yêu cả hai, các môn nhân văn và các môn khoa học, kỹ thuật và nghệ thuật, thơ và toán! Điều đó sẽ trang bị tốt hơn cho các em để có thể đối diện với những khó khăn mà thế giới toàn cầu hóa không ngừng biến động mang lại. Điều đó cũng sẽ giúp tạo nên một thế giới thân ái hơn”.

Tài liệu tham khảo

- [1] <http://www.tudiendanhngon.vn/danhnh/an/dnct/itemid/12254/search/henri-poincare>
- [2] <https://news.zing.vn/bai-tho-do-tuoi-tren-mo-nha-toan-hoc-noi-tieng-post60576.html>



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục “Thách thức kỳ này” cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ *B*, *A*, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ *B* không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ *A* không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm Latex, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P821–P830: trước ngày 15/9/2024.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P821. (Mức *B*) Có bảy số tự nhiên khác nhau, biết rằng : tích của số lớn nhất và số bé nhất là 2024 và tích của năm số còn lại là 2310. Hỏi, tổng của cả bảy số đó bằng bao nhiêu?

Nguyễn Hải An, Bắc Giang

P822. (Mức *B*) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\frac{a}{a+\sqrt{bc}} + \frac{b}{b+\sqrt{ca}} + \frac{c}{c+\sqrt{ab}} = \frac{3}{2}.$$

Chứng minh rằng $ab + bc + ca$ chia hết cho $a + b + c$.

Duy Minh, Hà Nội

P823. (Mức *B*) Giải phương trình sau trên tập số thực

$$x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 32x - 16 = 0.$$

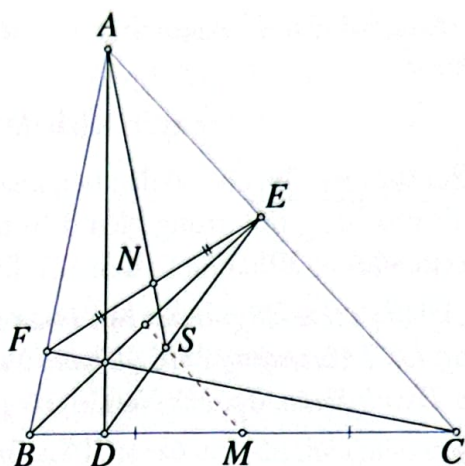
Nguyễn Đức Tường, Gia Lai

P824. (Mức *B*) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{b^3+a} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{4}{(a+b)^3}.$$

Hoàng Ngọc Minh, Hà Nội

P825. (Mức *B*) Cho tam giác không cân, không vuông ABC , với ba đường cao AD, BE, CF . Ký hiệu M, N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF . AN cắt DE tại S . Chứng minh rằng MS đi qua trung điểm của đoạn thẳng BE .



Bùi Hoàng Nam, Hải Phòng

P826. (Mức B) Xét một bảng kẻ ô vuông kích thước $3n \times 3n$, với n là một số nguyên dương lẻ. Điền $9n^2$ số nguyên dương đầu tiên vào mỗi ô của bảng sao cho mỗi ô được điền đúng một số, mỗi số chỉ được điền vào đúng một ô, và hai số bất kỳ sai khác nhau 3 đơn vị phải được điền ở hai ô cạnh nhau (hai ô cạnh nhau là hai ô có chung cạnh). Chứng minh rằng tồn tại hai ô nằm ở hai góc của bảng đó sao cho hiệu của hai số được điền trong hai ô đó chia hết cho 6.

Tô Trung Hiếu, Nghệ An

P827. (Mức A) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(2y + f(xy)) + 2x = f(x)f(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$.

($\mathbb{R}^+$ là tập tất cả các số thực dương.)

Hồ Thanh Lai, Bình Định

P828. (Mức A) Tìm tất cả các số dương a sao cho: nếu (x_n) là dãy số dương thỏa mãn $x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^a}$ với mọi $n \geq 1$ thì (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Trần Nhật Quang, Tp. Hồ Chí Minh (st)

P829. (Mức A) Cho các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn $x > y$ và

$$P = \frac{(x+y)^2}{4+4x(x-y)^n}$$

là số nguyên. Chứng minh rằng, P là số chính phương.

Hà Duy Hưng, Hà Nội

P830. (Mức A) Cho tam giác không vuông ABC , với trực tâm H . Gọi N là tâm đường tròn Euler và L là điểm Lemoine của tam giác ABC . AH, BH, CH theo thứ tự cắt BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F . X, Y, Z theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB . Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy tại một điểm thuộc đường thẳng NL .

Nguyễn Minh Hà, Hà Nội

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P791. (Mức B) Cho một nhóm 21 thành phố, mỗi thành phố đều có đường bay hai chiều tới ít nhất ba thành phố khác. Chứng minh rằng, có một thành phố, mà từ đó có thể bay tới bốn thành phố khác.

Lời giải (phỏng theo ý giải của bạn Nguyễn Anh Minh, lớp 10 Toán 1, trường THPT chuyên Quốc học, tỉnh Thừa Thiên - Huế).

Dưới đây, ta sẽ gọi mỗi đường bay hai chiều, từ thành phố n đến thành phố k kia, một cách đơn giản, là *đường bay*.

Ta sẽ giải bài đã ra bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử ngược lại, *không* có thành phố nào có đường bay tới ít nhất 4 thành phố khác.

Khi đó, mỗi thành phố chỉ có đường bay tới tối đa 3 thành phố khác. Kết hợp điều này với giả thiết "mỗi thành phố đều có đường bay tới ít nhất 3 thành phố khác", suy ra, mỗi thành phố có đường bay tới đúng 3 thành phố khác. Do đó, tổng số đường bay của

nhóm 21 thành phố đã cho là:

$$\frac{3 \cdot 21}{2} = 31,5 \text{ (đường bay),}$$

là điều vô lý (vì số đường bay phải là một số tự nhiên).

Điều vô lý nhận được cho thấy, giả sử ở trên là sai; do đó, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Để tránh gây hiểu nhầm, khái niệm “đường bay”, trong phát biểu của đề bài, nên được thay bằng khái niệm “đường bay thẳng”.

2. Bài đã ra là một kết quả, được suy ra, một cách dễ dàng, đơn giản, từ một kết quả cơ bản, rất nổi tiếng, trong Toán học, thường được gọi là **Bổ đề “bắt tay”**. Bằng ngôn từ hàng không, có thể phát biểu Bổ đề đó như sau:

Bổ đề “bay”. Cho số nguyên dương $n > 1$. Giả sử có n thành phố, mà từ mỗi thành phố đều có đường bay thẳng, hai chiều, tới một số thành phố khác trong chúng (có thể có thành phố, mà từ thành phố này có đường bay thẳng, hai chiều, tới 0 thành phố khác). Khi đó, số thành phố, có đường bay thẳng, hai chiều, tới một số lẻ thành phố khác, là một số chẵn.

Với các bạn đọc chưa biết Bổ đề nêu trên, các bạn hãy tự chứng minh Bổ đề đó, xem như một “bài tập về nhà”.

3. Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

- Hiểu sai điều phải chứng minh thành “chứng minh rằng, tồn tại một hệ thống đường bay, thỏa mãn các yêu cầu của đề bài, mà ở hệ thống đó, có một thành phố có đường bay tới bốn thành phố khác”;
- Hiểu nhầm khái niệm “đường bay”, được đề cập ở đề bài.

Cùng với hai lời giải sai nêu trên, có một lời giải không được chấp nhận là lời giải hoàn chỉnh (tuy có ý giải đúng), do các lập

luận trong lời giải đó chưa chặt chẽ, thiếu chính xác.

Nguyễn Khắc Minh

P792. (Mức B) Tìm chữ số đầu tiên khác 0, tính từ phải sang trái, trong biểu diễn thập phân của số $A = 30!$.

Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Doãn Hải Dương, lớp 7A6, trường THCS Thanh Xuân, Quận Thanh Xuân, Tp. Hà Nội).

Ta có:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 10, \quad (1)$$

$$10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 30 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 10^4, \quad (2)$$

$$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19, \quad (3)$$

$$21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 29. \quad (4)$$

Nhân bốn đẳng thức (1), (2), (3), (4) với nhau, về theo về, ta được:

$$A = 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 10^7.$$

Đặt

$$B = 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29. \quad (5)$$

$$\text{Ta có: } A = B \cdot 10^7. \quad (6)$$

Để thấy, B không chia hết cho 5; do đó, B không chia hết cho 10. Vì thế, từ (6) suy ra, chữ số tận cùng của B là chữ số đầu tiên khác 0, tính từ phải sang trái, trong biểu diễn thập phân của A .

Từ (5), ta có:

$$\begin{aligned} B &\equiv 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 7^4 \cdot 1^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \\ &\equiv 2^{19} \cdot 3^{21} \cdot 7^5 \equiv (2^5)^3 \cdot 2^4 \cdot (3^4)^5 \cdot 3 \cdot 7^4 \cdot 7 \\ &\equiv 2^3 \cdot 6 \cdot 1^5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 7 \equiv 48 \equiv 8 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Do đó, chữ số tận cùng của B là 8.

Vì vậy, chữ số đầu tiên khác 0, tính từ phải sang trái, trong biểu diễn thập phân của A là 8.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tập chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Lưu Thị Thanh Hà

P793. (Mức B) Tìm tất cả các số nguyên a, b , sao cho $(ax + by)^2$ chia hết cho $x^2 + y^2$, với mọi số nguyên dương x, y .

Lời giải (của người chấm bài).

Giả sử a, b là các số nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Khi đó, do $(ax + by)^2$ chia hết cho $x^2 + y^2$, với mọi $x, y \in \mathbb{N}^*$, nên với mọi $t \in \mathbb{N}^*$, $(at + b)^2$ và $(a + bt)^2$ cùng chia hết cho $t^2 + 1$. (1)

Do đó

$$(at + b)^2 - (a + bt)^2 = (a^2 - b^2)(t^2 - 1)$$

chia hết cho $t^2 + 1$, với mọi $t \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra

$$(a^2 - b^2)(t^2 - 1) + (a^2 - b^2)(t^2 + 1) = 2t^2(a^2 - b^2)$$

chia hết cho $t^2 + 1$, với mọi $t \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó, do $(t^2, t^2 + 1) = 1$ với mọi $t \in \mathbb{N}^*$, nên $2(a^2 - b^2)$ chia hết cho $t^2 + 1$, với mọi $t \in \mathbb{N}^*$. Điều này cho thấy, $2(a^2 - b^2)$ có vô số ước nguyên dương. Do đó

$$2(a^2 - b^2) = 0, \text{ hay } a^2 = b^2. \quad (2)$$

Vì thế, $(a + bt)^2 = a^2(t^2 + 1) \pm 2a^2t$. (3)

Từ (1) và (3), suy ra, $2a^2t$ chia hết cho $t^2 + 1$, với mọi $t \in \mathbb{N}^*$. Mà $(t, t^2 + 1) = 1$ với mọi $t \in \mathbb{N}^*$, nên $2a^2$ chia hết cho $t^2 + 1$ với mọi $t \in \mathbb{N}^*$. Vì vậy

$$2a^2 = 0, \text{ hay } a = 0. \quad (4)$$

Từ (2) và (4), suy ra $a = b = 0$.

Như vậy, nếu a, b là các số nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài, thì $a = b = 0$.

Ngược lại, với $a = b = 0$, ta có

$$(ax + by)^2 = 0,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{N}^*$; do đó, $(ax + by)^2$ chia hết cho $x^2 + y^2$, với mọi $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Vậy, tất cả các số nguyên a, b thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $a = b = 0$.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc:

– Rất tiếc, có một lời giải sai, do người giải bài “quên” 0 là số nguyên;

– Hầu hết các lời giải đúng đều là lời giải “nặng nề”, trừu tượng, do người giải bài đã sử dụng các kết quả lý thuyết quá mạnh để giải bài.

Lưu Thị Thanh Hà

P794. (Mức B) Xét các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $2a + 3b + 5c = 100$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc$.

Lời giải (dựa theo ý giải của Đáp án do BBT cung cấp).

Từ ràng buộc đối với a, b, c , suy ra

$$1 \leq a, b, c \leq 46. \quad (1)$$

• Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= (ab - 1)(c - 1) + (a - 1)(b - 1) \\ &\quad + a + b + c - 2 \\ &\geq a + b + c - 2 \quad (\text{do (1)}). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 5P &\geq 5(a + b + c) - 10 \\ &= (2a + 3b + 5c) + 3a + 2b - 10 \\ &\geq 100 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 10 = 95. \end{aligned}$$

Do đó, $P \geq 19$.

Hơn nữa, với $a = b = 1, c = 19$, ta có

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 19 = 100$$

và $P = 1 \cdot 1 \cdot 19 = 19$.

Vì vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng 19.

• Tìm giá trị lớn nhất của P .

Theo bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân, ta có:

$$P = \frac{2a \cdot 3b \cdot 5c}{30} \leq \frac{1}{30} \left(\frac{2a + 3b + 5c}{3} \right)^3$$

$$= \frac{1}{30} \cdot \left(\frac{100}{3} \right)^3 < 1235.$$

Từ đó, do $abc \in \mathbb{N}^*$, nên $P \leq 1234$. (2)

Nếu $P = 1234$, thì do $1234 = 2 \cdot 617$ và $2, 617$ là các số nguyên tố, nên $P = 1 \cdot 2 \cdot 617$ là biểu diễn duy nhất của P dưới dạng tích của ba số nguyên dương (tính đến thứ tự của các thừa số). Suy ra, nếu $P = abc = 1234$ thì (a, b, c) là một hoán vị của $1, 2, 617$. Điều này mâu thuẫn với (1) (do trong ba số a, b, c có một số lớn hơn 46). Vì vậy, $P \neq 1234$. Từ đây và (2), suy ra $P \leq 1233$. (3)

Nếu $P = 1233$, thì do $1233 = 3^2 \cdot 317$ và $3, 137$ là các số nguyên tố, nên $P = 3 \cdot 3 \cdot 137$ là biểu diễn duy nhất của P dưới dạng tích của ba số nguyên dương (tính đến thứ tự của các thừa số). Suy ra, nếu $P = abc = 1233$ thì (a, b, c) là một hoán vị của $3, 3, 137$. Điều này mâu thuẫn với (1) (do trong ba số a, b, c có một số lớn hơn 46). Vì vậy, $P \neq 1233$. Từ đây và (3), suy ra $P \leq 1232$.

Để thấy, với $a = 16, b = 11, c = 7$, ta có

$$2 \cdot 16 + 3 \cdot 11 + 5 \cdot 7 = 100$$

và $P = 16 \cdot 11 \cdot 7 = 1232$.

Vì vậy, giá trị lớn nhất của P bằng 1232.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, trong số các lời giải Tập chí nhận được từ bạn đọc, có một lời giải sai, do người giải bài đã có những nhầm lẫn trong các lập luận logic.

Nguyễn Khắc Minh

P795. (Mức B) Hai bạn Vinh và Tùng, mỗi bạn có n tấm thẻ, trên mỗi tấm thẻ có ghi một số nguyên dương, trong phạm vi từ 1 đến n (trên hai thẻ khác nhau, ghi hai số khác nhau). Bạn Hưng có n cái hộp trống. Hưng bảo Vinh và Tùng lần lượt bỏ ngẫu nhiên vào

mỗi hộp một thẻ của mình. Sau đó, Hưng ghi lên mỗi hộp giá trị tuyệt đối của hiệu hai số được ghi ở hai tấm thẻ có trong hộp. Tùng khẳng định: Chắc chắn có hai hộp sẽ được Hưng ghi cùng một số. Hỏi, bạn Tùng nói đúng hay sai, trong mỗi trường hợp dưới đây:

a) $n = 99$.

b) $n = 100$.

Lời giải (dựa theo Đáp án do BBT cung cấp).

Theo một thứ tự tùy ý, lần lượt đánh số n cái hộp bởi $1, 2, \dots, n$.

Với mỗi $i \in \{1; 2; \dots; n\}$, ta gọi hộp được đánh số i là hộp thứ i .

Tiếp theo, ta gọi tấm thẻ có ghi số k là *thẻ* k .

Với mỗi $k \in \{1; 2; \dots; n\}$, ta gọi thẻ k là *thẻ chẵn*, nếu k là số chẵn; và gọi là *thẻ lẻ*, nếu k là số lẻ.

a) Với $n = 99$, do từ 1 đến 99 có 49 số nguyên dương chẵn và 50 số nguyên dương lẻ, nên mỗi bạn, Vinh và Tùng, đều có 49 thẻ chẵn và 50 thẻ lẻ. (1)

Từ các giả thiết của bài toán, dễ dàng suy ra, số được Hưng ghi ở mỗi hộp là một số tự nhiên, nằm trong phạm vi từ 0 đến $98 (= 99 - 1)$. (2)

Giả sử bạn Tùng nói sai. (3)

Khi đó, do (2), các số được Hưng ghi lên 99 cái hộp sẽ là tất cả 99 số tự nhiên, từ 0 đến 98. (4)

Ta gọi một chiếc hộp là *hộp loại 1*, nếu số Hưng ghi lên hộp đó là một số chẵn; và gọi là *hộp loại 2*, nếu số Hưng ghi lên hộp đó là một số lẻ.

Khi đó, do từ 0 đến 98 có 50 số tự nhiên chẵn và 49 số tự nhiên lẻ, nên theo (4), có 50 hộp loại 1 và 49 hộp loại 2. (5)

Để thấy, một hộp là hộp loại 1 khi và chỉ khi hai thẻ được bỏ vào hộp đó cùng là thẻ chẵn, hoặc cùng là thẻ lẻ; và một hộp là hộp loại 2 khi và chỉ khi hai thẻ, được bỏ vào hộp đó, gồm một thẻ chẵn và một thẻ lẻ. (6)

Gọi x và y , tương ứng, là số thẻ chẵn và số

thẻ lẻ, mà Vinh đã bỏ vào các hộp loại 1; ta có, $x, y \in \mathbb{N}$ và

$$x + y = 50 \text{ (do (5)).} \quad (7)$$

Do (6) nên số thẻ lẻ mà Tùng đã bỏ vào các hộp loại 1 cũng là y . Vì thế, từ (1) suy ra, số thẻ lẻ mà Tùng đã bỏ vào các hộp loại 2 là $50 - y$. (8)

Do (1) nên số thẻ chẵn Vinh đã bỏ vào các hộp loại 2 là $49 - x$. Vì thế, từ (6) suy ra, số thẻ lẻ mà Tùng đã bỏ vào các hộp loại 2 là $49 - x$. (9)

Từ (8) và (9), ta được

$$50 - y = 49 - x;$$

suy ra, $y = x + 1$. Vì thế

$$x + y = 2x + 1,$$

mâu thuẫn với (7) (do 50 là số chẵn, còn $2x + 1$ là số lẻ).

Mâu thuẫn nhận được cho thấy, giả sử (3) là một khẳng định sai. Vì vậy, bạn Tùng đã nói đúng.

b) Xét tình huống bỏ thẻ vào hộp như sau, của Vinh và Tùng:

• Vinh: Với mỗi $k \in \{1; 2; \dots; 100\}$, bỏ thẻ k vào hộp thứ k .

• Tùng:

– Với mỗi $k = \overline{1, 25}$, bỏ vào hộp thứ k thẻ $101 - k$;

– Với mỗi $k = \overline{26, 49}$, bỏ vào hộp thứ k thẻ $100 - k$;

– Bỏ vào hộp thứ 50 thẻ 1;

– Với mỗi $k = \overline{51, 74}$, bỏ vào hộp thứ k thẻ $101 - k$;

– Bỏ vào hộp thứ 75 thẻ 75;

– Với mỗi $k = \overline{76, 100}$, bỏ vào hộp thứ k thẻ $102 - k$.

Bằng tính toán trực tiếp, dễ thấy, với tình huống bỏ thẻ vào hộp nêu trên, của Vinh và Tùng, các số được Hưng ghi lên 100 cái hộp là tất cả 100 số tự nhiên, từ 0 đến 99.

Do đó, ở tình huống nêu trên, không có hai hộp nào được Hưng ghi cùng một số.

Vì vậy, trong trường hợp $n = 100$, điều bạn Tùng đã nói là một điều sai.

Bình luận và Nhận xét

1. Để thấy, có thể phát biểu lại bài đã ra, một cách đơn giản hơn, như sau:

Bài P795' (dạng phát biểu khác của P795).

Cho số nguyên dương $n > 1$. Bạn Vinh có n tấm thẻ, trên mỗi thẻ có ghi một số nguyên dương, trong phạm vi từ 1 đến n , và trên hai thẻ khác nhau được ghi hai số khác nhau. Bạn Hưng có n cái hộp rỗng, được đánh số thứ tự bởi $1, 2, \dots, n$. Hưng bảo Vinh bỏ ngẫu nhiên vào mỗi hộp một thẻ của mình. Sau đó, Hưng ghi lên mỗi hộp giá trị tuyệt đối của hiệu của số được ghi ở tấm thẻ, mà Vinh đã bỏ vào hộp, và số thứ tự của hộp đó. Hỏi, có thể khẳng định “chắc chắn có hai hộp sẽ được Hưng ghi cùng một số” hay không, trong mỗi trường hợp sau:

a) $n = 99$.

b) $n = 100$.

Bằng ngôn ngữ toán học thuần túy, có thể phát biểu bài toán trên như sau:

Bài P795" (dạng phát biểu khác của P795').

Cho số nguyên dương $n > 1$. Cho $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là một hoán vị tùy ý của n số nguyên dương đầu tiên. Hỏi, có thể khẳng định “tồn tại $i, j \in \{1; 2; \dots; n\}, i \neq j$, sao cho $|a_i - i| = |a_j - j|$ ” hay không, trong mỗi trường hợp sau:

a) $n = 99$.

b) $n = 100$.

2. Bài toán dưới đây là một khái quát của bài P795'':

Bài toán khái quát. Tìm tất cả các số nguyên dương $n > 1$, có tính chất: Với mọi hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ của n số nguyên dương đầu tiên, luôn tồn tại $i, j \in \{1; 2; \dots; n\}, i \neq j$, sao cho

$$|a_i - i| = |a_j - j|.$$

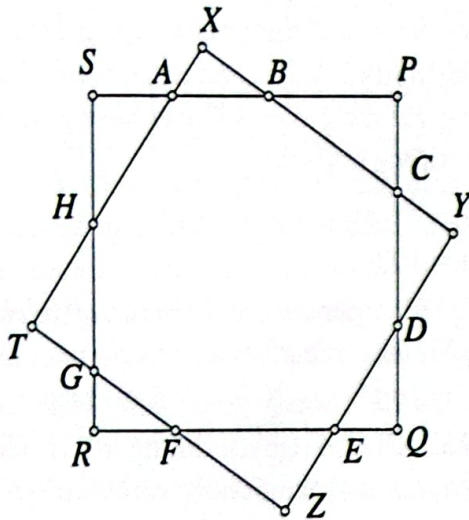
Bài toán khái quát nêu trên là một bài toán đã có và đã được giải quyết trọn vẹn.

3. Rất tiếc, tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, đều là lời giải hoặc sai (do người giải bài đã vận dụng sai nguyên lý Dirichlet), hoặc chưa đầy đủ (do thiếu lời giải cho ý b)).

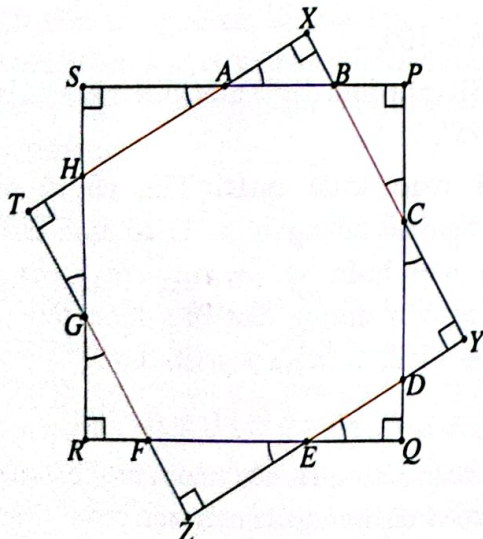
Nguyễn Khắc Minh

P796. (Mức B) Cho hai hình vuông, $XYZT$ và $PQRS$, có cạnh bằng nhau. Các cạnh của chúng cắt nhau, tạo thành bát giác lồi $ABCDEFGH$, như ở hình vẽ dưới đây. Chứng minh rằng

$$AB + CD + EF + GH = BC + DE + FG + HA.$$



Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Đặng Ngọc Anh Thơ, lớp 7C trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Tp. Hà Nội).



Từ các giả thiết của bài toán, dễ dàng suy ra, các tam giác vuông $XAB, YCD, ZEF, TGH, PCB, QED, RGF, SAH$ đôi một đồng dạng. Do đó

$$\begin{aligned} \frac{AB}{XA+XB} &= \frac{CD}{YC+YD} = \frac{EF}{ZE+ZF} \\ &= \frac{GH}{TG+TH} = \frac{BC}{PB+PC} \\ &= \frac{DE}{QD+QE} = \frac{FG}{RF+RG} \\ &= \frac{HA}{SH+SA}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{AB+CD+EF+GH}{XA+XB+YC+YD+ZE+ZF+TG+TH} = \frac{BC+DE+FG+HA}{PB+PC+QD+QE+RF+RG+SH+SA} \quad (1)$$

(theo tính chất của dãy tỷ số bằng nhau).

Không mất tính tổng quát, giả sử cạnh của hai hình vuông có độ dài bằng 1.

Đặt $a = AB + CD + EF + GH$, và $b = BC + DE + FG + HA$.

Khi đó, do

$$\begin{aligned} XA+XB+YC+YD+ZE+ZF+TG+TH &= (XY+YZ+ZT+TX) \\ &\quad - (BC+DE+FG+HA) = 4 - b, \\ PB+PC+QD+QE+RF+RG+SH+SA &= (PQ+QR+RS+SP) \\ &\quad - (AB+CD+EF+GH) \\ &= 4 - a, \end{aligned} \quad (2)$$

nên (1) được viết lại thành:

$$\frac{a}{4-b} = \frac{b}{4-a}. \quad (3)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 4a - a^2 = 4b - b^2 \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a+b-4) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (2), theo bất đẳng thức tam giác, suy ra

$$4 - a > BC + DE + FG + HA = b;$$

do đó, $a + b - 4 \neq 0$. Vì thế, từ (4) ta có

$a = b$, hay

$$AB + CD + EF + GH = BC + DE + FG + HA.$$

Đây là điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải, Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Hạ Vũ Anh

P797. (Mức A) Có bao nhiêu bộ sắp thứ tự các số nguyên dương (a, b, c) , thỏa mãn $abc = 2023^{2024}$?

Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Tấn Nguyên Chương, lớp 11T1, trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) kết quả rất quen biết sau:

Bổ đề. Với n và k là các số nguyên dương, phương trình (ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n$)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

có tất cả C_{n+k-1}^k nghiệm tự nhiên.

Trở lại bài toán.

Vì phân tích chuẩn của 2023 là

$$2023 = 7 \cdot 17^2,$$

nên phân tích chuẩn của 2023^{2024} là:

$$2023^{2024} = 7^{2024} \cdot 17^{4048}.$$

Do đó, với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$abc = 2023^{2024} \text{ khi và chỉ khi}$$

$$(a, b, c) = (7^{\alpha_1} \cdot 17^{\beta_1}, 7^{\alpha_2} \cdot 17^{\beta_2}, 7^{\alpha_3} \cdot 17^{\beta_3}),$$

với $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ là các số tự nhiên, thỏa mãn

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2024, \quad (1)$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 4048. \quad (2)$$

Vì thế, số bộ sắp thứ tự các số nguyên dương (a, b, c) thỏa mãn yêu cầu đề bài chính bằng số bộ sắp thứ tự các số tự nhiên

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

thỏa mãn (1) và (2). (3)

Gọi s là số các bộ sắp thứ tự các số tự nhiên $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, thỏa mãn (1) và (2); và ký hiệu S_1, S_2 , tương ứng, là tập hợp tất cả các bộ sắp thứ tự các số tự nhiên $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ thỏa mãn (1), tập hợp tất cả các bộ sắp thứ tự các số tự nhiên $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ thỏa mãn (2). Ta có:

$$s = |S_1| \cdot |S_2|.$$

Theo Bổ đề nêu trên, $|S_1| = C_{2024}^{2024} = C_{2026}^{2026}$ và $|S_2| = C_{4048}^{4048} = C_{4050}^{4050}$. Do đó

$$s = C_{2026}^2 \cdot C_{4050}^2.$$

Vì vậy, theo (3), có tất cả $C_{2026}^2 \cdot C_{4050}^2$ bộ sắp thứ tự các số nguyên dương (a, b, c) thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Lời giải của bạn Nguyễn Tấn Nguyên Chương là lời giải duy nhất đúng, trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc; các lời giải còn lại không được chấp nhận là lời giải đúng (tuy có ý giải đúng), do các lập luận trong các lời giải đó rất thiếu chính xác, rất thiếu chặt chẽ.

Nguyễn Khắc Minh

P798. (Mức A) Cho $f(x)$ là một đa thức hệ số thực, có bậc $n \geq 2$. Giả sử rằng, $f(x)$ có n nghiệm thực, là $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, và $f'(x)$ có $n-1$ nghiệm thực, là $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}$. Chứng minh rằng

$$\prod_{\substack{1 \leq k, l \leq n \\ k \neq l}} (\alpha_k - \alpha_l) = n^n \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1}} (\alpha_i - \alpha'_j).$$

(Chú ý: Các nghiệm của $f(x)$ và $f'(x)$ không nhất thiết đôi một phân biệt.)

Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Đỗ Viết Hoàng Long, lớp 11A, trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước).

Gọi a là hệ số cao nhất của đa thức $f(x)$.

Khi đó, do $f(x)$ có bậc n và có n nghiệm thực $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, nên

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n). \quad (1)$$

Vì $f(x)$ có bậc n và có hệ số cao nhất là a , nên $f'(x)$ có bậc $n-1$ và có hệ số cao nhất là na . Vì thế, từ giả thiết về nghiệm của $f'(x)$, suy ra

$$f'(x) = na(x - \alpha'_1)(x - \alpha'_2) \cdots (x - \alpha'_{n-1}).$$

Do đó

$$f'(\alpha_i) = na \cdot \prod_{j=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha'_j), \quad (2)$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Mặt khác, từ (1), theo công thức tính đạo hàm của hàm tích, ta có:

$$f'(x) = a \cdot \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i}^n (x - \alpha_j).$$

Do đó

$$f'(\alpha_i) = a \cdot \prod_{j=1, j \neq i}^n (\alpha_i - \alpha_j), \quad (3)$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Từ (2) và (3), suy ra

$$\prod_{j=1, j \neq i}^n (\alpha_i - \alpha_j) = n \cdot \prod_{j=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha'_j), \quad (4)$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Ở (4), cho i lần lượt nhận các giá trị từ 1 đến n , rồi nhân n đẳng thức thu được với nhau, về theo về, ta có đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Đề bài không yêu cầu các nghiệm của $f(x)$ đôi một phân biệt. Tuy nhiên, để thấy, trong trường hợp $f(x)$ có nghiệm bội, kết quả của bài ra là tầm thường (vì khi đó, cả hai vế của đẳng thức cần chứng minh đều bằng 0).

2. Tất cả các lời giải Tập chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và hoàn chỉnh.

Trần Nam Dũng

P799. (Mức A) Tìm tất cả các số nguyên tố

p , thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} i \cdot C_p^i \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Nguyễn Thành Trung, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Phú Thọ).

Trước hết, ta nhắc lại (không chứng minh) kết quả quen thuộc sau:

Bổ đề. Với mọi số nguyên tố p , luôn có

$$C_{p-1}^k \equiv (-1)^k \pmod{p},$$

với mọi số nguyên dương $k < p$.

Trở lại bài toán.

Với i là số nguyên dương tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned} i \cdot C_p^i &= i \cdot \frac{p!}{i!(p-i)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{(i-1)!(p-i)!} \\ &= p \cdot C_{p-1}^{i-1}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} i \cdot C_p^i = p \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} C_{p-1}^{i-1}.$$

Vì thế

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} i \cdot C_p^i &\equiv 0 \pmod{p^2} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} C_{p-1}^{i-1} &\equiv 0 \pmod{p} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^{i-1} &\equiv 0 \pmod{p} \text{ (theo Bổ đề)} \\ \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor &\equiv 0 \pmod{2} \\ \Leftrightarrow p &\equiv 1 \pmod{4} \text{ (do } p \text{ là số nguyên tố).} \end{aligned}$$

Vậy, các số nguyên tố có dạng $4k+1, k \in \mathbb{N}^*$, là tất cả các số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Với các bạn đọc chưa biết Bổ đề, nêu trong Lời giải trên, các bạn hãy tự chứng minh Bổ đề đó, xem như một "bài tập về nhà". (Gợi ý: Sử dụng phương pháp qui nạp theo $k < p$.)

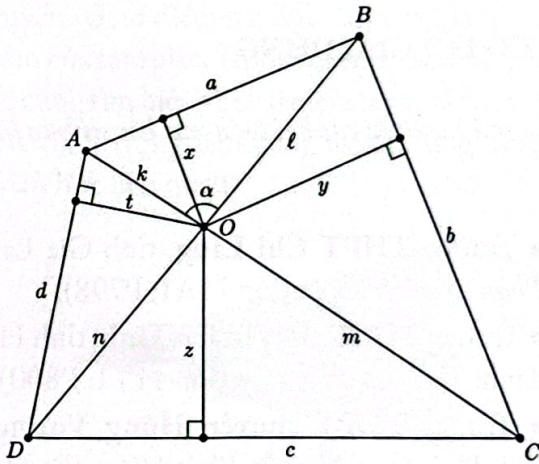
2. Rất tiếc, trong số các lời giải Tạp chí nhận được từ bạn đọc, có một lời giải không đúng, do người giải bài đã xét sai trường hợp $p = 2$.

Nguyễn Khắc Minh

P800. (Mức A) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB + CD > BC + DA$. Các đường chéo AC, BD cắt nhau tại O . Gọi x, y, z, t , tương ứng, là khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} > \frac{1}{y} + \frac{1}{t}.$$

Lời giải (dựa theo Đáp án do BBT cung cấp).



Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$, $OA = k, OB = l, OC = m, OD = n$, và $\angle AOB = \alpha$.

Gọi S_a, S_b, S_c, S_d , tương ứng, là diện tích của tam giác AOB, BOC, COD, DOA .

Khi đó, dễ thấy, bất đẳng thức, cần chứng minh theo yêu cầu đề bài, có thể được viết lại dưới dạng:

$$\frac{a}{S_a} + \frac{c}{S_c} > \frac{b}{S_b} + \frac{d}{S_d}. \quad (1)$$

Dễ thấy, ta có:

$$\frac{S_a}{S_d} = \frac{l}{n} = \frac{S_b}{S_c}, \quad \frac{S_a}{S_b} = \frac{k}{m} = \frac{S_d}{S_c}. \quad (2)$$

$$\text{Suy ra, } \frac{S_a}{S_c} = \frac{kl}{mn} \text{ và } \frac{S_d}{S_b} = \frac{kn}{lm}. \quad (3)$$

Áp dụng định lý cosin lần lượt cho các tam giác AOB, BOC, COD, DOA , ta được:

$$a^2 = k^2 + l^2 - 2kl \cos \alpha = k^2 + l^2 - 4S_a \cot \alpha,$$

$$b^2 = l^2 + m^2 + 2lm \cos \alpha = l^2 + m^2 + 4S_b \cot \alpha,$$

$$c^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \alpha = m^2 + n^2 - 4S_c \cot \alpha,$$

$$d^2 = n^2 + k^2 + 2nk \cos \alpha = n^2 + k^2 + 4S_d \cot \alpha.$$

Suy ra

$$4(S_a + S_b + S_c + S_d) \cot \alpha = -a^2 + b^2 - c^2 + d^2.$$

Tiếp theo, ta có:

$$\begin{aligned} & S_a S_c \left(\frac{a}{S_a} + \frac{c}{S_c} \right)^2 - S_b S_d \left(\frac{b}{S_b} + \frac{d}{S_d} \right)^2 \\ &= \frac{S_c}{S_a} a^2 + \frac{S_a}{S_c} c^2 + 2ac - \frac{S_d}{S_b} b^2 - \frac{S_b}{S_d} d^2 - 2bd \\ &= \frac{S_c}{S_a} (k^2 + l^2 - 4S_a \cot \alpha) \\ & \quad + \frac{S_a}{S_c} (m^2 + n^2 - 4S_c \cot \alpha) \\ & \quad - \frac{S_d}{S_b} (l^2 + m^2 + 4S_b \cot \alpha) \\ & \quad - \frac{S_b}{S_d} (n^2 + k^2 + 4S_d \cot \alpha) + 2(ac - bd) \\ &= \left(\frac{S_c \cdot k^2}{S_a} - \frac{S_d \cdot m^2}{S_b} \right) + \left(\frac{S_c \cdot l^2}{S_a} - \frac{S_b \cdot n^2}{S_d} \right) \\ & \quad + \left(\frac{S_a \cdot m^2}{S_c} - \frac{S_b \cdot k^2}{S_d} \right) + \left(\frac{S_a \cdot n^2}{S_c} - \frac{S_d \cdot l^2}{S_b} \right) \\ & \quad - 4(S_c + S_a + S_d + S_b) \cot \alpha + 2(ac - bd) \\ &= -4(S_c + S_a + S_d + S_b) \cot \alpha \\ & \quad + 2(ac - bd) \text{ (do (3))} \\ &= (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + 2(ac - bd) \text{ (theo (4))} \\ &= (a + c)^2 - (b + d)^2. \end{aligned}$$

Từ đó, do $a + c > b + d$ (giả thiết) và

$$S_a S_c = S_b S_d > 0 \text{ (theo (2))},$$

suy ra

$$\left(\frac{a}{S_a} + \frac{c}{S_c} \right)^2 > \left(\frac{b}{S_b} + \frac{d}{S_d} \right)^2.$$

Do đó

$$\frac{a}{S_a} + \frac{c}{S_c} > \frac{b}{S_b} + \frac{d}{S_d}.$$

(1) được chứng minh; và vì thế, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Theo thầy *Trần Quang Hùng* (giáo viên trường THPT chuyên KHTN, Đại học KHTN – ĐHQG Hà Nội), bài đã ra là một hệ quả trực tiếp của một hệ thức giữa độ dài cạnh và độ dài đường chéo của một tứ giác lồi, được *Larry Hoehn* đưa ra trong bài báo “A New Formula Concerning the Diagonals and Sides of a Quadrilateral” (Tập chí Forum Geometricorum, Vol.11 (2011), trang 211 –

212). Hệ thức đó như sau:

“Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi P là giao điểm của AC và BD . Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, PA = e, PB = f, PC = g, PD = h$. Ta có:

$$\begin{aligned} &efgh(a+b+c+d)(a+c-b-d) \\ &= (agh + cef + beh + dfg) \\ &\quad \times (agh + cef - beh - dfg).” \end{aligned}$$

2. Lời giải của bạn *Trần Minh Hoàng* (lớp 11T1, trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh) là lời giải duy nhất, Tập chí nhận được từ bạn đọc, và là một lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI ĐÚNG

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải đúng.

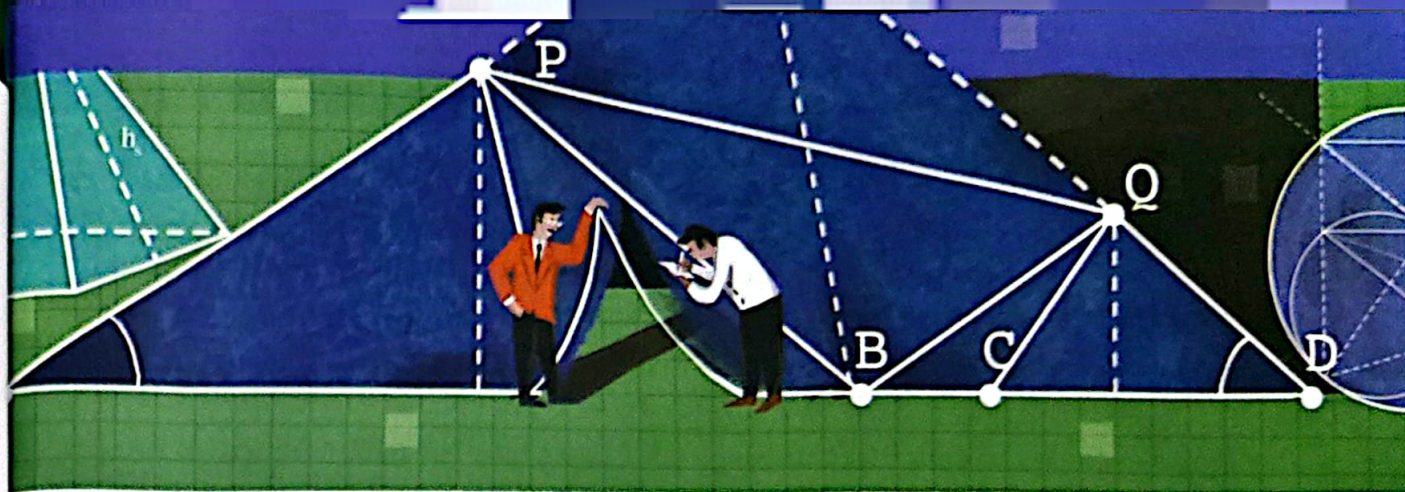
KHOİ THCS

- Trường THCS Nguyễn Thái Bình, Tp. Cà Mau, tỉnh Cà Mau: *Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình* (lớp 9C; P792).
- Trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, Tp. Hà Nội: *Đặng Ngọc Anh Thơ* (lớp 7C; P796).
- Trường THCS Thanh Xuân, Quận Thanh Xuân, Tp. Hà Nội: *Doãn Hải Dương* (lớp 7A6; P792, P793).

KHOİ THPT

- Trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước: *Đỗ Việt Hoàng Long* (lớp 11A; P792, P793, P794, P798, P799).
- Trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp: *Trần Thị Phương Thảo* (lớp 10T1; P796).

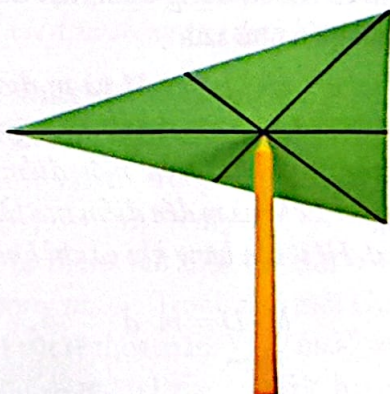
- Trường THPT Chi Lăng, tỉnh Gia Lai: *Phan Trịnh Nguyên* (lớp 11A1; P798).
- Trường THPT chuyên Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh: *Trần Minh Hoàng* (lớp 11T1; P800).
- Trường THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Phú Thọ: *Nguyễn Phúc Hưng* (lớp 11 chuyên Toán; P798), *Nguyễn Thành Trung* (lớp 11 chuyên Toán; P794, P799).
- Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên: *Nguyễn Tấn Nguyễn Chương* (lớp 11T1; P797, P799).
- Trường THPT chuyên Quốc học Huế, tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Nguyễn Anh Minh* (lớp 10 Toán 1; P791, P799).
- Trường THPT chuyên Tự nhiên, ĐH Khoa học Tự nhiên – ĐHQG Hà Nội: *Vương Khánh Toàn* (lớp 11A1 Toán; P798, P799).



THẾ NÀO LÀ TRỌNG TÂM

NGUYỄN HOÀNG VŨ¹

Ta có thể cân bằng một miếng bìa hình tam giác trên đầu một chiếc bút chì nếu điểm tiếp xúc chính là giao điểm của ba đường trung tuyến. Giao điểm này vẫn được gọi là trọng tâm của tam giác. Trong bài viết này, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu về khái niệm trọng tâm, cách xác định trọng tâm cùng một số ứng dụng toán học liên quan.



Hình 1. Trọng tâm cơ học của tam giác.

1. Trọng tâm và cân bằng tĩnh học

Ta hãy xét một hệ gồm n chất điểm có khối lượng $m_1, m_2, \dots, m_n$. Tại một thời điểm, chúng có vector tọa độ lần lượt là $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Trong cơ học, trọng tâm của hệ chất điểm này được định nghĩa là điểm có vector tọa độ:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (1)$$

với $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Chuyển động của hệ này có thể được mô tả dưới dạng kết hợp của hai chuyển động: chuyển động tịnh tiến của trọng tâm và chuyển động quay của các chất điểm trong hệ quanh trọng tâm. Các chi tiết toán học liên quan đến vấn đề này tương đối phức tạp nên chúng ta sẽ không đề cập toàn bộ ở đây mà chỉ nêu một số điểm đáng chú ý.

Thứ nhất, theo định luật 2 Newton, với mỗi vật trong hệ ta có phương trình $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i'$. Ở đây, $\vec{a}_i$ là gia tốc chuyển động của chất điểm thứ i , $\vec{F}_i$ là hợp lực của tất cả các lực bên ngoài hệ còn $\vec{F}_i'$ là hợp lực của tất cả các lực bên trong hệ chất điểm tác động lên nó. Đồng thời, lấy đạo hàm hai lần của (1) theo thời gian ta được $M \vec{a}_G = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$ với $\vec{a}_G$ là gia tốc chuyển động của trọng tâm. Do các lực bên trong hệ tồn tại dưới dạng các cặp lực trực đối (theo định luật 3 Newton) nên $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i' = \vec{0}$ và ta có $M \vec{a}_G = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$. Tức là định luật 2 Newton hoàn toàn có thể được áp dụng trực tiếp cho cả hệ chất điểm với tổng khối lượng M đặt tại G .

Mặt khác, tổng mômen lực đối với G của các trọng lực tác dụng lên các vật m_i sẽ bằng $\vec{0}$ (do $\sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \times \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \vec{g} \times (m_i \vec{r}_i) = \vec{0}$). Mỗi cặp lực trực đối bên trong hệ có cùng phương và ngược chiều nên tổng mômen của chúng đối với G cũng bằng

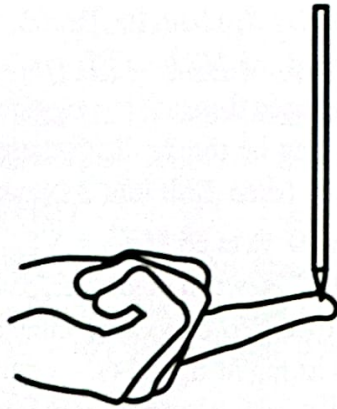
¹ Hà Nội.

$\vec{O}$. Do đó, chuyển động quay quanh trọng tâm của hệ vật chỉ phụ thuộc vào các mômen lực của các ngoại lực còn lại (trừ trọng lực). Từ những nhận xét trên ta thấy hệ vật sẽ cân bằng (không tịnh tiến cũng như không quay) khi:

- Tổng các ngoại lực tác dụng lên hệ cân bằng với tổng trọng lực của hệ;
- Tổng các mômen lực của các ngoại lực đối với G bằng $\vec{0}$.

Trong trường hợp vật cân bằng chỉ có một điểm tựa, điều kiện thứ nhất tương đương với phản lực $\vec{N}$ tác dụng lên vật tại điểm tiếp xúc sẽ phải cùng phương và ngược chiều với trọng lực $\vec{P}$. Mà theo điều kiện thứ hai, mômen lực của nó đối với G phải bằng 0 nên việc này chỉ xảy ra khi điểm tiếp xúc và G cùng nằm trên một đường có phương thẳng đứng.

Trong trường hợp miếng bìa tam giác trong Hình 1, điều kiện cân bằng này ứng với điểm tiếp xúc chính là G , còn trong trường hợp khác, ví dụ như cân bằng của một cái bút chì trên đầu ngón tay, điểm tiếp xúc và trọng tâm của bút chì phải nằm trên một đường thẳng đứng.



Hình 2. Cân bằng cái bút chì trên ngón tay.

2. Một số phương pháp xác định trọng tâm

2.1 Trọng tâm và tâm đối xứng

Với những hình có tâm đối xứng, ta có thể coi chúng như những tập hợp vô hạn các cặp

điểm có cùng một trung điểm chính là tâm đối xứng. Do đó, theo công thức (1), có thể nhận thấy tâm đối xứng chính là trọng tâm của các hình dạng này, ví dụ:

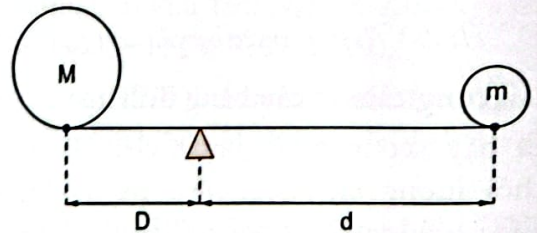
- Trọng tâm của một đoạn thẳng là trung điểm của nó.
- Đường tròn hay hình tròn đều có trọng tâm chính là tâm của chúng.
- Hình bình hành có trọng tâm là giao điểm của hai đường chéo.
- Trọng tâm của một mặt cầu hoặc hình cầu đặc là tâm của nó
- Trọng tâm của hình hộp chữ nhật chính là giao của các đường chéo chính.

2.2 Định luật đòn bẩy

Với những trường hợp phức tạp hơn, ta có thể chia đối tượng hình học thành các phần có trọng tâm đã biết rồi xác định trọng tâm của cả hệ. Thay vì sử dụng công thức dạng vector, ta có thể sử dụng định luật đòn bẩy được phát biểu như sau:

Giả sử hai vật khối lượng M và m được đặt trên một đòn bẩy (một thanh ngang không khối lượng được đặt trên một điểm tựa). Khoảng cách từ M và m đến điểm tựa lần lượt là D và d . Hệ sẽ cân bằng khi và chỉ khi:

$$M \cdot D = m \cdot d$$

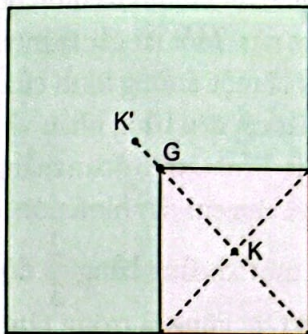


Hình 3. Định luật đòn bẩy.

Điểm tựa để cho hệ cân bằng trong định luật trên cũng chính là trọng tâm G của hệ hai vật. Thật vậy, điểm tựa này sẽ thỏa mãn (1) tức là $M\vec{r}_M = m\vec{r}_m$.

Ta hãy xét trường hợp một hình vuông bị cắt đi một phần tư. Hình vuông ban đầu có

trọng tâm là giao điểm G của hai đường chéo. Phần bị cắt đi (màu cam) có trọng tâm K cũng là giao điểm của hai đường chéo của nó. Trọng tâm của phần còn lại (màu xanh) phải thỏa mãn định luật đòn bẩy sao cho trọng tâm của hệ gồm cả hai (tức hình vuông ban đầu) là G . Do phần còn lại có diện tích gấp 3 phần bị cắt đi nên trọng tâm K' của nó phải nằm trên đường thẳng GK , khác phía với K và có $GK' = \frac{1}{3}GK$.

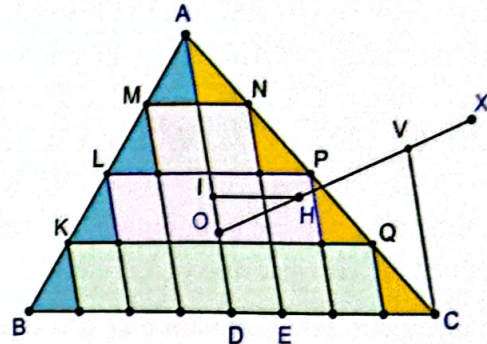


Hình 4. Trọng tâm của phần màu xanh có thể được xác định thông qua định luật đòn bẩy.

Ta hãy thiết lập cách áp dụng định luật đòn bẩy cho hệ có nhiều vật. Giả sử rằng hệ gồm n vật có trọng tâm ở G_n . Khi đó: $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \vec{r}_{G_n}$. Giả sử ta thêm vào một vật thứ $n+1$ với khối lượng m_{n+1} . Trọng tâm mới G_{n+1} của hệ $n+1$ vật sẽ thỏa mãn: $\sum_{i=1}^{n+1} m_i \vec{r}_i = (m_1 + m_2 + \dots + m_{n+1}) \vec{r}_{G_{n+1}}$. Trừ hai vế của phương trình đầu khỏi hai vế của phương trình sau ta có $m_{n+1} \vec{r}_{n+1} = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) (\vec{r}_{G_{n+1}} - \vec{r}_{G_n}) + m_{n+1} \vec{r}_{G_{n+1}}$ hay $m_{n+1} (\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_{G_{n+1}}) = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) (\vec{r}_{G_{n+1}} - \vec{r}_{G_n})$. Phương trình cuối này cho thấy ta có thể xác định G_{n+1} bằng cách áp dụng định luật đòn bẩy cho vật thứ $n+1$ và một vật tương đương đặt tại G_n có khối lượng bằng tổng n vật ban đầu.

Tương tự như việc cuốn sách *Cơ sở* của Euclid liệt kê các tiên đề cho hình học cùng các định lý được xây dựng từ những tiên đề này, cuốn *Về sự cân bằng của các mặt phẳng* của Archimedes lại liệt kê các tiên đề liên

quan đến sự cân bằng của đòn bẩy, vị trí của trọng tâm cùng các định lý liên quan. Định luật đòn bẩy đã được Archimedes sử dụng để chứng minh rằng giao điểm của ba đường trung tuyến của tam giác chính là trọng tâm cơ học của nó.



Hình 5. Chứng minh của Archimedes cho trọng tâm tam giác.

Chứng minh của này được thực hiện bằng phản chứng. Giả sử rằng trọng tâm (cơ học) H của tam giác ABC không nằm trên trung tuyến AD . Đường thẳng qua H song song với BC cắt AD tại I .

Chia đôi đoạn thẳng BC tại D , rồi lại chia đôi liên tiếp hai nửa thu được, lặp lại cho đến khi được đoạn thẳng DE ngắn hơn HI (việc chia đôi đoạn thẳng có thể được thực hiện chỉ với các công cụ là thước thẳng và compa). Ta chia các đoạn thẳng BD và DC thành các đoạn thẳng liên tiếp nhau có độ dài bằng DE như trong hình rồi kẻ các đường thẳng song song với AD qua các điểm đầu của chúng, cắt AB tại các điểm như $K, L, M, \dots$ và cắt AC tại các điểm như $N, P, Q, \dots$

Nối $MN, LP, KQ, \dots$ ta được các hình bình hành (được tô màu khác nhau) như trong hình vẽ. AD sẽ đi qua giao điểm của hai đường chéo, cũng là trọng tâm cơ học của các hình bình hành này. Do trọng tâm của tất cả các hình bình hành đều nằm trên AD nên trọng tâm O của hình tạo bởi các hình bình hành này gộp lại cũng nằm trên AD .

Qua C kẻ đường thẳng song song với AD , cắt đường thẳng OH tại V . Đặt $n = \frac{DC}{DE}$.

Tam giác ADC và các tam giác màu vàng đồng dạng nên diện tích tam giác ADC : tổng diện tích các tam giác màu vàng $= AC^2 : (AN^2 + NP^2 + \dots) = n^2 : n = n : 1 = AC : AN$ (1)

Tương tự, diện tích tam giác ABD : tổng diện tích các tam giác màu xanh $= AB : AM$ (2)

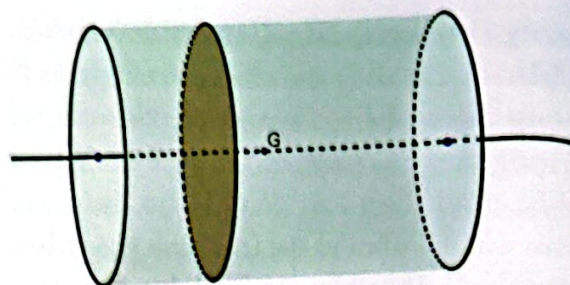
Mà $AC : AN = AB : AM$ nên từ (1) và (2) ta có diện tích tam giác ABC : tổng diện tích các tam giác nhỏ $= CA : AN$. Do $DE < HI$ nên dễ thấy $CA : AN > VO : OH$. Gọi X là điểm trên OV sao cho $CA : AN = XO : OH$. Khi đó, tổng diện tích các hình bình hành: tổng diện tích các tam giác nhỏ $= XH : HO$.

Do trọng tâm tam giác nằm ở H còn trọng tâm các hình bình hành nằm ở O nên theo định luật đòn bẩy, X chính là trọng tâm của hình do các tam giác nhỏ (cả màu vàng lẫn màu xanh) gộp lại. Mặt khác, tất cả các tam giác này nằm cùng một phía của đường thẳng qua X và song song với AD ($XO > VO$ do $XO : OH = CA : AN > VO : OH$). Hai điều này không thể cùng xảy ra nên X không phải là trọng tâm của các tam giác nhỏ.

Do đó, theo phản chứng thì giả định trọng tâm cơ học H không nằm trên AD là sai. Làm tương tự với hai đỉnh còn lại của tam giác, ta sẽ được giao điểm của ba đường trung tuyến là trọng tâm cơ học của tam giác.

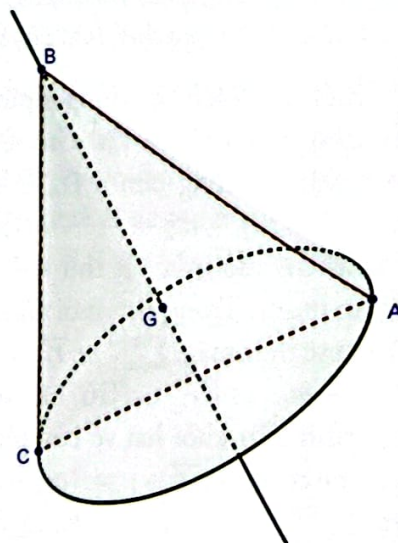
2.3 Lát cắt và các khối trong không gian ba chiều

Với các khối trong không gian ba chiều, trong một số trường hợp, ta có thể tiến hành cắt vật thể bằng các mặt phẳng khác nhau và xem xét trọng tâm của các lát cắt. Ví dụ với hình trụ, ta có thể cắt nó bằng các mặt phẳng vuông góc với trục chính của nó. Các lát cắt sẽ là các hình tròn có cùng bán kính với đáy hình trụ và có tâm nằm trên trục chính của hình trụ. Tập hợp quỹ tích các trọng tâm của các lát cắt sẽ là đoạn thẳng nối tâm hai đáy của hình trụ. Các lát cắt cũng có khối lượng bằng nhau nên trọng tâm của chúng cũng chính là trọng tâm của đoạn thẳng này tức trung điểm G của nó.



Hình 6. Sử dụng lát cắt để tìm trọng tâm hình trụ.

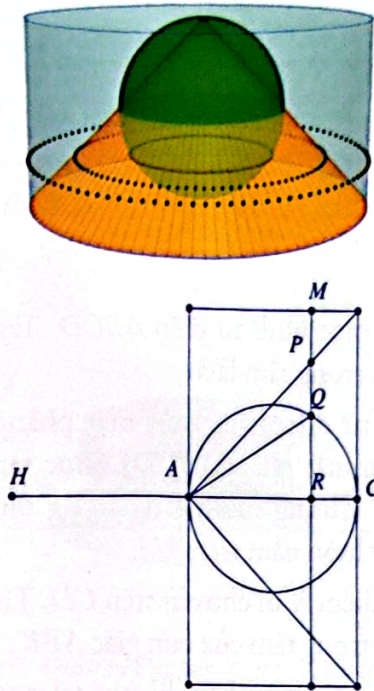
Với hình nón, ta có thể cắt nó bằng các mặt phẳng đi qua trục chính của hình nón và xoay quanh trục này. Mỗi lát cắt là một tam giác cân có đáy là một đường kính của đáy hình nón. Các lát cắt đều bằng nhau và có chung trọng tâm là điểm G trên đoạn thẳng nối đỉnh hình nón và tâm của đáy hình nón, cách đỉnh hình nón một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đoạn thẳng này. Đây cũng là trọng tâm của hình nón.



Hình 7. Sử dụng lát cắt để tìm trọng tâm hình nón.

Lát cắt cũng có thể được kết hợp với định luật đòn bẩy để tính thể tích. Archimedes đã dùng cách này để tính thể tích hình cầu mà không cần tích phân. Ông lồng hình cầu vào trong một hình trụ có bán kính đáy và chiều cao bằng với đường kính của hình cầu. Trục chính của hình trụ đi qua tâm hình cầu. Hình cầu tiếp xúc với hai đáy hình trụ tại tâm

của hai đáy này. Sau đó, ta dựng một hình nón có đáy là một đáy của hình trụ và đỉnh nón là tâm của đáy còn lại. Các hình khối ở đây được coi như làm từ cùng một vật liệu.



Hình 8. Tính thể tích hình cầu sử dụng định luật đòn bẩy.

Khi dùng một mặt phẳng vuông góc với trục chính của hình trụ để cắt hình nón, hình cầu và hình trụ, ta được các hình tròn đồng tâm như trong Hình 8.

Ta hãy xoay các hình lồng nhau ở trên để cho trục chính của hình trụ trùng với phương nằm ngang. Tại điểm R trên trục chính AC của hình trụ, khi cắt bằng một mặt phẳng vuông góc trục chính, ta được các hình tròn bán kính RQ , RP và RM . Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{RA} &= \frac{AC^2}{RA \cdot AC} = \frac{AC^2}{QA^2} \quad (QR \text{ là đường cao của tam giác vuông } AQC) \\ &= \frac{AC^2}{AR^2 + QR^2} \quad (\text{định lý Pythagoras}) \\ &= \frac{MR^2}{PR^2 + QR^2} \quad (MR = AC \text{ và tam giác } APR \text{ vuông cân}) \end{aligned}$$

Do đó:

$$MR^2 \cdot RA = (PR^2 + QR^2) \cdot AH$$

với H là điểm đối xứng với C qua A .

Khi dùng một mặt phẳng cắt vuông góc trục chính hình trụ, diện tích của các thiết diện tròn sẽ tỷ lệ với bình phương bán kính. Do đó công thức trên tương đương với việc khi ta dời lát cắt hình cầu và lát cắt hình nón tới điểm H còn lát cắt hình trụ giữ nguyên thì hệ 3 lát cắt sẽ cân bằng theo định luật đòn bẩy. Ta có thể cắt vô số lát cắt khi R chạy từ A đến C . Khi ta dời tất cả lát cắt của hình cầu và hình nón về H còn các lát cắt hình trụ giữ nguyên vị trí (tức giữ nguyên hình trụ) thì hệ vẫn cân bằng. Trọng tâm của hình trụ là trung điểm AC nên theo định luật của đòn bẩy:

$$(m_{\text{nón}} + m_{\text{cầu}}) \cdot AH = m_{\text{trụ}} \cdot \left(\frac{1}{2}AC\right)$$

Vì $AH = AC$ và khối lượng của các vật đồng chất tỷ lệ thuận với thể tích nên:

$$V_{\text{nón}} + V_{\text{cầu}} = \frac{1}{2}V_{\text{trụ}}$$

Công thức tính diện tích hình nón đã được được nhà toán học Hy Lạp Eudoxus chứng minh trước đó. Bản thân Archimedes cũng đã chứng minh được công thức thể tích hình trụ. Gọi S là diện tích đáy hình trụ, ta có:

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3}S \cdot AC; V_{\text{trụ}} = S \cdot AC.$$

$$V_{\text{cầu}} = \frac{1}{2}S \cdot AC - \frac{1}{3}S \cdot AC = \frac{1}{6}S \cdot AC$$

Gọi R là bán kính hình cầu. Vì $S = \pi(2R)^2$, $AC = 2R$ nên:

$$V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Xác định trọng tâm bằng tích phân

Công thức (1) có thể được viết thành dạng tọa độ trong trường hợp không gian một chiều $x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}$. Dạng liên tục của

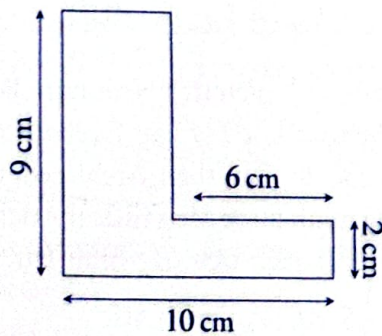
công thức này có dạng: $x_G = \frac{1}{M} \int_a^b \rho x dx$ với ρ là hàm mật độ trong khoảng $[a, b]$. Tích phân này cho ta tọa độ trọng tâm của một thanh không đồng chất khối lượng M . Để tìm trọng tâm trong những trường hợp phức tạp hơn, chúng ta sẽ cần sử dụng tích phân 2 lớp cho hình phẳng, tích phân 3 lớp cho khối ba chiều, tích phân đường cho đường cong (trong mặt phẳng và không gian), và tích phân mặt cho mặt cong. Bạn đọc có thể tham khảo các công thức tương ứng trong các giáo trình giải tích.

Bài tập

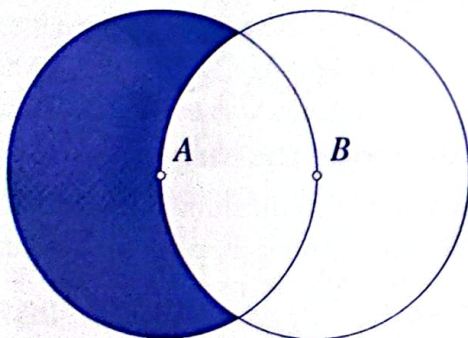
1. a) Cho tam giác ABC . Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $DE \parallel BC$ và $\frac{AD}{AB} = k$. Hãy xác định trọng tâm của hình thang $DBCE$.

b) Hãy tìm trọng tâm của hình thang cân có độ dài hai đáy lần lượt là a và b ($a < b$) và độ dài cạnh bên là d .

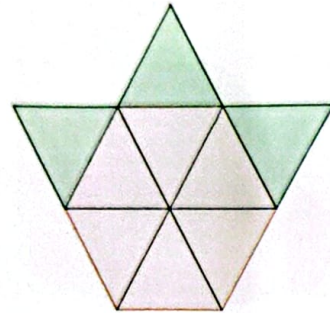
2. a) Hãy xác định trọng tâm của miếng bìa hình chữ L dưới đây.



b) Hãy tìm trọng tâm của phần được tô màu biết đường tròn tâm A và đường tròn tâm B có bán kính bằng nhau.



3. Trên ba cạnh kế tiếp nhau của một lục giác đều, dựng thêm các tam giác đều như hình vẽ. Hãy tìm trọng tâm của hình này.



4. Cho một hình tứ diện $ABCD$. Tam giác BCD có trọng tâm là M .

a) Cắt tứ diện bằng một mặt phẳng song song với mặt phẳng (BCD) được tam giác $B'C'D'$. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác này luôn nằm trên AM .

b) Lấy điểm K di chuyển trên CD . Tìm quỹ tích các trọng tâm của tam giác ABK .

c) Từ hai câu trên, hãy chỉ ra vị trí trọng tâm của hình tứ diện.

5. a) Từ kết quả câu 4, hãy nêu cách tìm trọng tâm của hình chóp có đáy là một đa giác n cạnh.

b) Hãy nêu cách xác định trọng tâm của hình chóp cụt và hình nón cụt.

6. Cho một hình cầu và khoét khỏi nó một hình cầu có đường kính chính là một bán kính của hình cầu ban đầu. Hãy tìm trọng tâm phần còn lại.

3. Định lý Pappus – Guldin

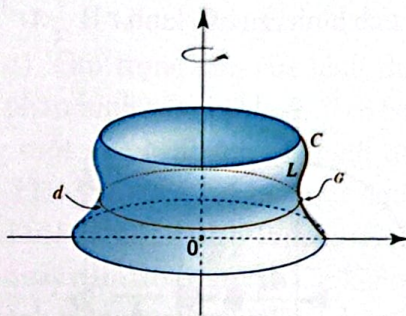
Các liên hệ giữa trọng tâm và việc tính diện tích của mặt tròn xoay hay thể tích của khối tròn xoay được nhà toán học Hy Lạp cổ đại Pappus phát biểu vào thế kỷ thứ 4. Chúng cũng được nhà toán học Thụy Sĩ Paul Guldin nêu và chứng minh vào thế kỷ 17. Ngày nay, chúng ta biết đến các công thức này dưới tên gọi định lý Pappus – Guldin.

Định lý Pappus – Guldin bao gồm hai công thức để tính diện tích bề mặt và thể tích của các vật thể tròn xoay:

- Cho một đường cong C độ dài L với trọng tâm tại G và một trục quay đồng phẳng, không cắt đường cong. Khi quay đường cong C quanh trục quay thì diện tích bề mặt của mặt tròn xoay được tạo thành sẽ là:

$$A = L \cdot d$$

với d là độ dài cung tròn mà G đã di chuyển trong quá trình quay (nếu C quay hết vòng tròn thì d là chu vi của cả vòng tròn) (Hình 9).

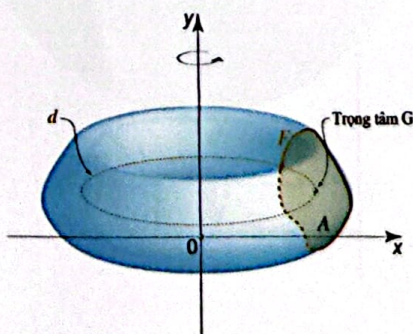


Hình 9. Định lý Pappus-Guldin cho diện tích bề mặt khối tròn xoay.

Cho một hình phẳng diện tích A , trọng tâm tại G quay quanh một trục quay đồng phẳng và không cắt nó. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành sẽ là:

$$V = A \cdot d$$

với d là độ dài cung tròn mà G đã di chuyển (Hình 10).

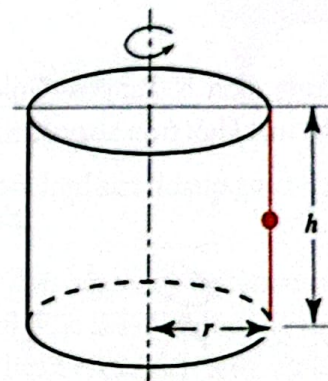


Hình 10. Định lý Pappus-Guldin cho thể tích khối tròn xoay.

Trong khi chứng minh của Guldin cho định lý này rất phức tạp thì một cách chứng

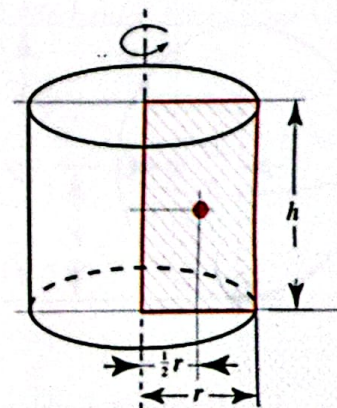
minh khác sử dụng khái niệm các đại lượng không thể chia của Cavalieri đã được John Roccha thực hiện. Cách chứng minh này xuất hiện trong cuốn sách hình học *Opera Geometrica* của Torricelli. Nó cũng rất gần với cách chứng minh sử dụng giải tích ngày nay.

Để hiểu cách áp dụng định lý Pappus-Guldin, ta hãy dùng nó cho trường hợp diện tích mặt trụ và thể tích hình trụ.



Hình 11. Áp dụng định lý Pappus-Guldin để tính diện tích mặt trụ.

Khi quay một đoạn thẳng quanh một trục quay đồng phẳng và song song với nó (Hình 10), ta thu được một mặt trụ. Gọi độ dài đoạn thẳng là h và khoảng cách từ đoạn thẳng đến trục quay là r . Quỹ đạo trọng tâm của đoạn thẳng (tức trung điểm của nó) đi được sẽ là $2\pi r$. Do đó diện tích của mặt trụ là $2\pi rh$.



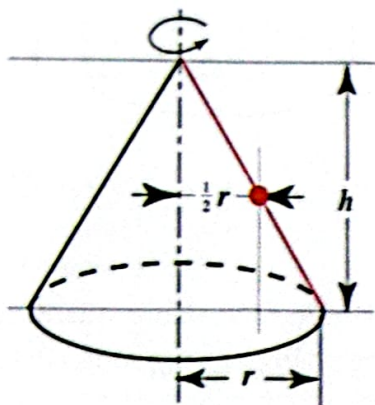
Hình 12. Áp dụng định lý Pappus-Guldin để tính thể tích hình trụ.

Khi quay một hình chữ nhật quanh một cạnh của nó, ta thu được một hình trụ. Gọi độ dài cạnh song song với trục quay là h còn độ dài cạnh còn lại là r . Trọng tâm của hình chữ nhật (tức giao điểm của hai đường chéo) có khoảng cách đến trục quay là $\frac{r}{2}$ và quãng đường di chuyển của trọng tâm là $\frac{3\pi r}{2} = \pi r$. Diện tích hình chữ nhật là rh . Theo định lý Pappus–Guldin, ta được thể tích hình trụ là $V = rh \cdot \pi r = \pi r^2 h$.

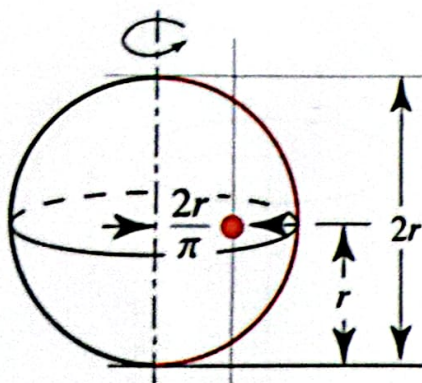
Bài tập

7. Hãy dùng định lý Pappus–Guldin cho diện tích bề mặt khối tròn xoay để tìm:

a) diện tích xung quanh của hình nón.

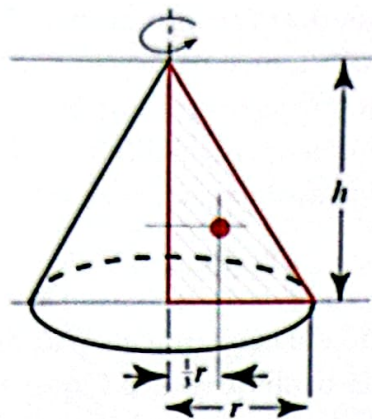


b) trọng tâm của cung bán nguyệt biết diện tích xung quanh của hình cầu bán kính r là $4\pi r^2$.

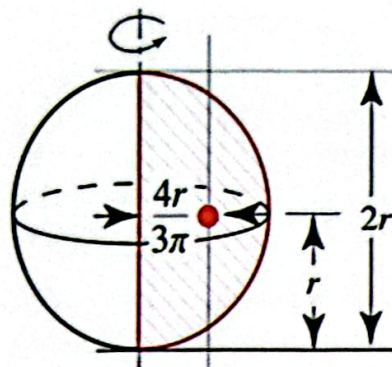


8. Hãy dùng định lý Pappus–Guldin cho thể tích khối tròn xoay để tìm:

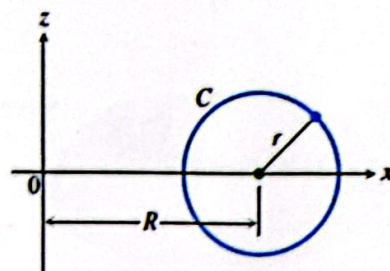
a) thể tích hình nón.



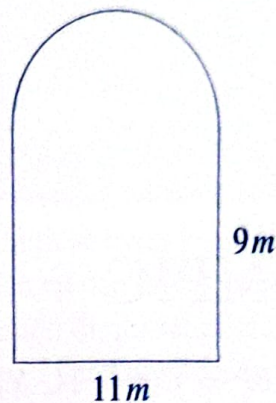
b) trọng tâm của miền có hình bán nguyệt biết thể tích hình cầu bán kính r là $\frac{4}{3}\pi r^3$.



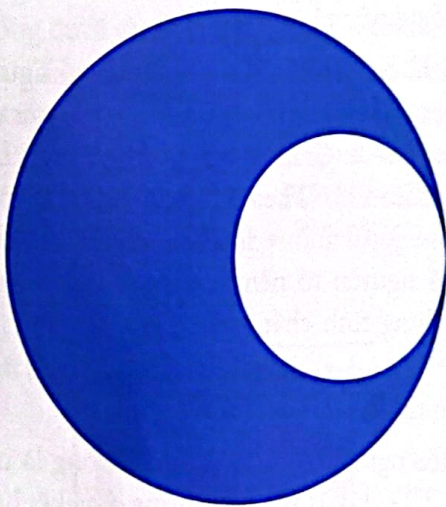
9. Khối torus (xuyến) là hình thu được bằng cách quay một hình tròn bán kính r quanh một trục đồng phẳng không cắt nó, với khoảng cách từ tâm đường tròn đến trục quay là R . Hãy dùng các định lý Pappus–Guldin để chỉ ra rằng nó có diện tích xung quanh là $A = 4\pi^2 Rr$ và thể tích là $V = 2\pi^2 Rr^2$.



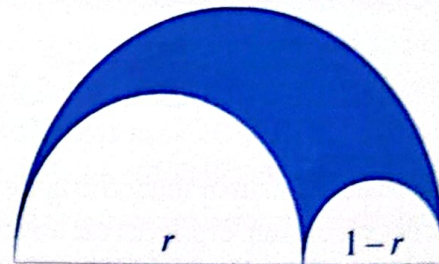
10. Dùng kết quả từ các bài trước để tìm trọng tâm của hình dưới đây biết phần cung tròn có hình bán nguyệt:



11. a) Tìm trọng tâm của hình dưới đây biết phần hình tròn bị khoét đi có bán kính bằng một nửa bán kính của hình tròn ban đầu. Hãy giải theo hai cách: sử dụng định luật đòn bẩy hoặc định lý Pappus–Guldin với trục quay nằm trong mặt phẳng, không cắt cả hai hình tròn và vuông góc với đường thẳng nối tâm của chúng (cách này cần sử dụng công thức về thể tích khối torus).



b) Hình arbelos (“lưỡi dao của thợ giày”) xuất hiện từ toán học Hy Lạp cổ đại. Nó được tạo thành từ việc khoét hai hình bán nguyệt khỏi một hình bán nguyệt ban đầu như trong hình dưới. Hãy xác định trọng tâm của hình arbelos theo hai cách.



5. Lời kết

Sử dụng đòn bẩy và trọng tâm trong chứng minh hình học là một nội dung thú vị giúp học sinh liên kết các kiến thức vật lý với toán học. Tác giả hy vọng rằng bài viết này có thể giúp ích cho việc dạy và học toán ở các chủ đề có liên quan.

Tài liệu tham khảo

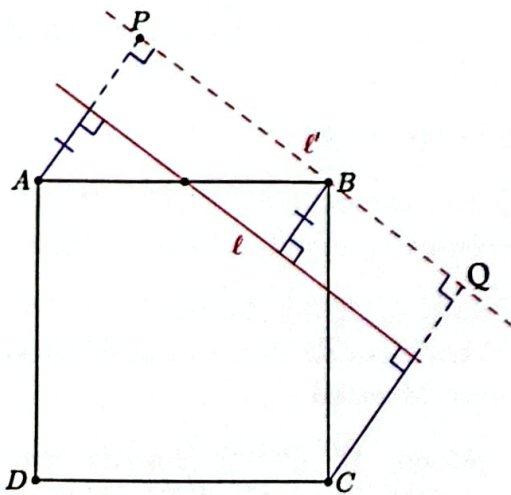
- [1] Archimedes. (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press.
- [2] Koch, A. (2008). *Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics*. Apeiron Montreal.
- [3] Morin, D. (2008). *Introduction to Classical Mechanics*. Cambridge University Press.



GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải của các bài toán trong Kỳ thi Toán Harvard-MIT 2/2024, đăng trong số báo 4/2024.

OC67. Cho $ABCD$ là hình vuông và ℓ là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và cắt đoạn BC . Cho khoảng cách từ A và C đến ℓ lần lượt là 4 và 7, hãy tính diện tích của $ABCD$.



Lời giải. Xét đường thẳng ℓ' qua B song song với ℓ và hạ các đường vuông góc từ A và C đến ℓ' . Chú ý rằng vì ℓ đi qua trung điểm đoạn AB nên khoảng cách từ B đến ℓ bằng 4. Như vậy, khoảng cách từ A và C đến ℓ' lần lượt là $4 + 4 = 8$ và $4 + 7 = 11$.

Gọi P và Q lần lượt là chân đường vuông góc từ A và C đến ℓ' . Do $\angle PBA + \angle QBC = 90^\circ$, ta suy ra $\angle PAB = \angle QBC$. Như vậy hai tam giác vuông PAB và QBC bằng nhau vì có cạnh huyền và góc nhọn bằng nhau.

Ta suy ra $BP = CQ = 11$. Vậy độ dài cạnh của hình vuông là $\sqrt{AP^2 + BQ^2} = \sqrt{8^2 + 11^2} = \sqrt{185}$. Ta có diện tích hình vuông là 185.

OC68. Tính tổng của tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $50 \leq n \leq 100$ và $2n + 3$ không là ước của $2^{n!} - 1$.

Lời giải. Trước tiên ta chứng minh khẳng định: nếu $n \geq 10$ thì $2n + 3$ không là ước của $2^{n!} - 1$ khi và chỉ nếu cả $n + 1$ và $2n + 3$ đều là số nguyên tố.

Giả sử cả $n + 1$ và $2n + 3$ đều là số nguyên tố, ta cần chứng minh $2n + 3$ không là ước của $2^{n!} - 1$. Giả sử phản chứng rằng $(2n + 3) | (2^{n!} - 1)$. Theo Định lý nhỏ Fermat, $(2n + 3) | (2^{2n+2} - 1)$. Tuy nhiên, vì $n + 1$ là số nguyên tố nên $\gcd(2n + 2, n!) = 2$. Sử dụng tính chất $\gcd(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\gcd(a, b)} - 1$, ta suy ra $(2n + 3) | (2^2 - 1) = 3$, mâu thuẫn.

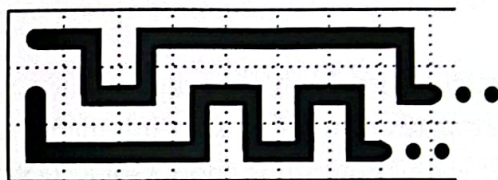
Chiều ngược lại, ta có $2n + 3$ không là ước của $2^{n!} - 1$. Giả sử phản chứng rằng kết luận bài toán không đúng, ta xét 2 trường hợp như sau.

Trường hợp 1: $2n + 3$ là hợp số thì $\varphi(2n + 3)$ là số chẵn và không quá là $2n$, vì vậy $\varphi(2n + 3) | n!$, theo định lý Euler ta suy ra điều mâu thuẫn rằng $2n + 3$ là ước của $2^{n!} - 1$.

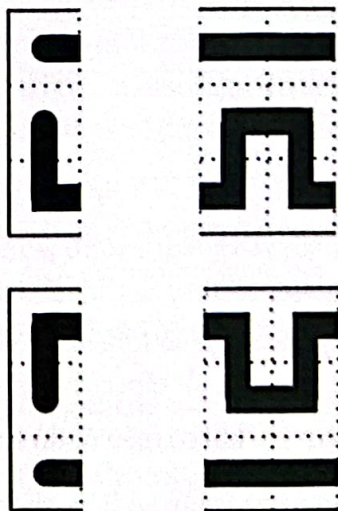
Trường hợp 2: $2n + 3$ là số nguyên tố nhưng $n + 1$ là hợp số. Khi đó $2n + 2 | n!$, vậy $2n + 3 | (2^{n!} - 1)$, mâu thuẫn. Như vậy khẳng định được chứng minh.

Các số nguyên tố từ 50 đến 100 là 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97. Nếu một trong số này là $n + 1$, thì những số thỏa mãn $2n + 3$ nguyên tố là 53, 83 và 89. Vậy có 3 giá trị của n thỏa mãn đầu bài: 52, 82 và 88. Tổng các số này là 222.

OC69. Một con ốc sên bò trong các ô của một bảng ô vuông cỡ 3×24 (3 hàng và 24 cột) như hình vẽ minh họa. Mỗi lần ốc sên đi từ ô hiện tại đến một ô kề bên có chung cạnh và muốn đi qua tất cả các ô của bảng, mỗi ô đúng 1 lần. Giả sử ốc sên xuất phát từ ô ở hàng thứ 2 cột thứ nhất như trong hình, hỏi có bao nhiêu đường đi khác nhau mà ốc sên có thể đi.



Lời giải. Ta đánh số các hàng 1, 2, 3 từ trên xuống dưới và các cột 1, 2, ..., 24 từ trái qua phải. Ta gọi ô vuông ở hàng i cột j là ô (i, j) . Ở lượt đầu tiên, ốc sên không thể tiếp tục di chuyển trên hàng 2 vì như vậy sẽ tạo ra hai đường cụt ở hàng 1 và 3. Nó có 2 cách là di chuyển lên hàng 1 hoặc xuống hàng 3 (xem hình vẽ bên dưới).



Tiếp tục mở rộng đường đi, ta thấy có 2 cách đi trong hai cột 2 và 3 như hình vẽ. Như vậy với mỗi cặp 2 cột tiếp theo ta có 2 cách mở rộng đường đi và ở cột cuối cùng hai đầu của đường đi nối với nhau theo một cách duy nhất. Như vậy có tất cả $2^{12} = 4096$ đường đi khác nhau.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong Cuộc thi Phần thưởng Toán học cho Nữ sinh năm 2023. Đây là cuộc thi dành cho nữ sinh cấp THPT được tổ chức bởi các công ty Advantage Testing Foundation/Jane Street tại Hoa Kỳ. Các bài toán sau phù hợp với các học sinh lớp 8 – 10.

OC76. Giả sử có 5000 tập hợp hữu hạn phân biệt mà giao của tất cả các tập này là rỗng. Tuy nhiên, giao điểm của hai tập hợp bất kỳ trong đó là khác rỗng. Hỏi hợp của tất cả các tập này có tối thiểu bao nhiêu phần tử?

OC77. Tìm x biết:

$$v - w + x - y + z = 79$$

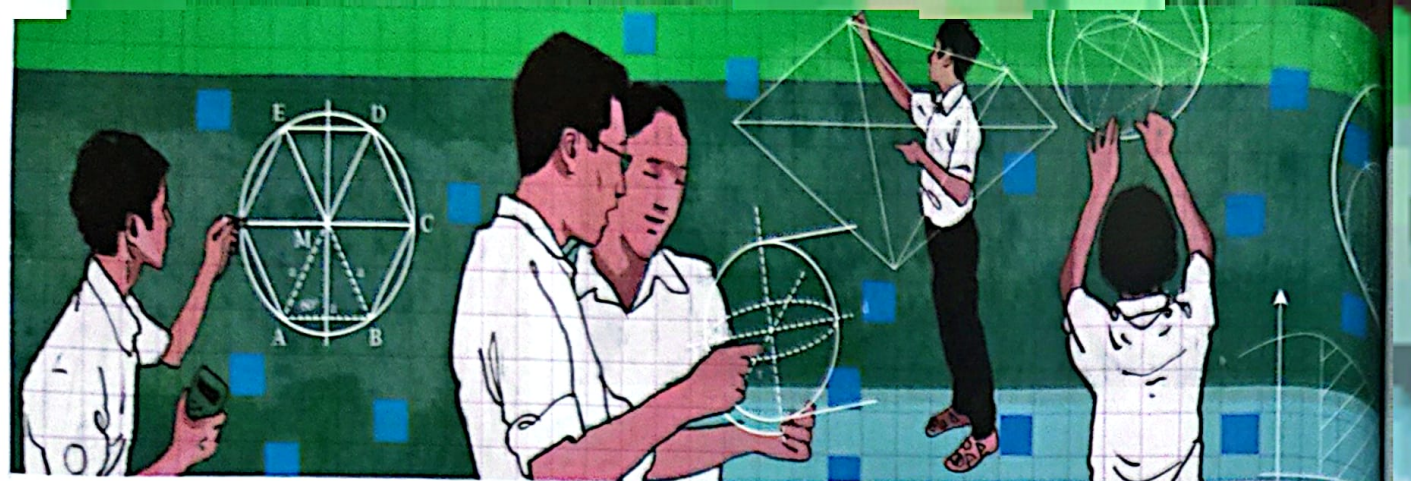
$$v + w + x + y + z = -1$$

$$v + 2w + 4x + 8y + 16z = -2$$

$$v + 3w + 9x + 27y + 81z = -1$$

$$v + 5w + 25x + 125y + 625z = 79.$$

OC78. Một tam giác được tạo ra một cách ngẫu nhiên như sau. Tung một cặp xúc xắc tiêu chuẩn ba lần để có được ba số ngẫu nhiên từ 2 đến 12, bằng cách cộng hai số xuất hiện trên mỗi cặp được tung ra. Gọi ba số này lần lượt là a , b và t . Xét tam giác có hai cạnh có độ dài a và b với góc xen giữa chúng bằng $15(t - 1)$ độ. Hỏi xác suất để tam giác này là tam giác vuông là bao nhiêu? Viết câu trả lời của bạn dưới dạng phân số tối giản.



PHƯƠNG PHÁP ƯỚC LƯỢNG MỘT SỐ SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

NGÔ HOÀNG LONG¹

Nội dung Thống kê ở các lớp 11 và 12 trong Chương trình phổ thông môn Toán năm 2018 tập trung vào việc xác định các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Thực tế khi triển khai chương trình cho thấy giáo viên gặp nhiều khó khăn khi giảng dạy các công thức tính số đặc trưng do chưa được làm quen với việc xây dựng các công thức này.

Trong bài viết ngắn này, chúng ta sẽ tìm hiểu một cách tiếp cận để xây dựng công thức ước lượng một số số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm. Trước tiên, chúng ta sẽ nhắc lại một số kết quả của lý thuyết xác suất. Sau đó, chúng ta sẽ xây dựng lại hai công thức được quan tâm nhất là công thức ước lượng các tứ phân vị và công thức ước lượng mốt của mẫu số liệu ghép nhóm.

1. Mẫu ngẫu nhiên

Trong thực tế, người ta thường quan tâm đến một đại lượng X nào đó của các cá thể trong một quần thể. Ví dụ X là cân nặng của trẻ sơ sinh ở một địa phương hay X là tuổi thọ của một thiết bị điện tử do một nhà máy sản xuất. Để tìm hiểu quy luật của đại lượng

X , người ta tiến hành chọn ngẫu nhiên N đối tượng từ quần thể và xác định giá trị X của từng đối tượng được chọn. Gọi X_i là giá trị xác định được của đối tượng thứ i . Dãy $X_1, X_2, \dots, X_N$ được gọi là **mẫu ngẫu nhiên** quan sát được từ X .

Khi cỡ mẫu N rất lớn, để thuận tiện cho việc lưu trữ và xử lý số liệu, người ta biểu diễn lại mẫu số liệu $X_1, X_2, \dots, X_N$ dưới dạng bảng số liệu ghép nhóm như sau

Nhóm	Tần số
$[a_1, a_2)$	m_1
$[a_2, a_3)$	m_2
...	...
$[a_k, a_{k+1})$	m_k

Bảng 1: Bảng số liệu ghép nhóm quan sát được từ đại lượng ngẫu nhiên X .

Chú ý rằng theo luật số lớn, xác suất để đại lượng $X \in [a_j, a_{j+1})$ xấp xỉ bằng xác suất thực nghiệm $\frac{m_j}{N}$ khi cỡ mẫu N đủ lớn.

2. Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm
Xét bảng biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm

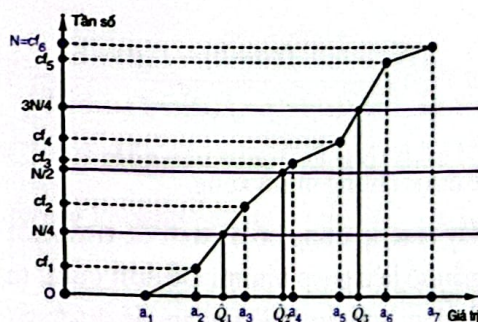
¹ Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

quan sát được từ đại lượng X .

Trong bảng trên, $a_i = a_1 + (i-1)h$ với $h = a_{i+1} - a_i$ là độ rộng của mỗi nhóm. Đại lượng $N = m_1 + \dots + m_k$ là cỡ mẫu.

Trước tiên ta sẽ trình bày một cách tiếp cận trực quan để xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Gọi $cf_i = m_1 + \dots + m_i$ là **tần số tích lũy** của nhóm $[a_i, a_{i+1})$. Khi đó cf_i là số các giá trị nhỏ hơn a_{i+1} trong mẫu số liệu ghép nhóm. Biểu diễn các điểm $(a_1; 0)$, $(a_2; cf_1)$, $\dots$, $(a_{k+1}; cf_k)$ lên mặt phẳng tọa độ Oxy và nối chúng lại với nhau bởi các đoạn thẳng ta thu được đường gấp khúc như hình dưới đây.



Đồ thị của đường gấp khúc được gọi là **biểu đồ tần số tích lũy** của mẫu số liệu ghép nhóm.

Do các điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu thành 4 phần, mỗi phần chứa khoảng 25% số các giá trị của mẫu số liệu nên để ước lượng các tứ phân vị, ta vẽ đường thẳng có phương trình $y = \frac{\ell N}{4}$ với $\ell = 1, 2, 3$. Hoành độ giao điểm của các đường thẳng này với biểu đồ tần số tích lũy lần lượt là các ước lượng cho ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Giả sử đường thẳng $y = \frac{\ell N}{4}$ cắt biểu đồ tần số tích lũy tại điểm có hoành độ $\hat{Q}_\ell$ thuộc nửa khoảng $[a_j, a_{j+1})$. Do đường thẳng đi qua hai điểm $(a_j; cf_{j-1})$ và $(a_{j+1}; cf_j)$ có phương trình là $\frac{y - cf_{j-1}}{cf_j - cf_{j-1}} = \frac{x - a_j}{a_{j+1} - a_j}$

nên $\frac{\frac{\ell N}{4} - cf_{j-1}}{m_j} = \frac{\hat{Q}_\ell - a_j}{a_{j+1} - a_j}$. Từ đó ta thu được công thức ước lượng của tứ phân vị thứ ℓ như trong sách Toán lớp 11 là

$$\hat{Q}_\ell = a_j + \frac{\frac{\ell N}{4} - cf_{j-1}}{m_j} (a_{j+1} - a_j).$$

Tiếp theo, ta sẽ giải thích kỹ hơn cơ sở toán học của cách tiếp cận trực quan trên.

Giả sử $Q_1 < Q_2 < Q_3$ là các số thực thỏa mãn $P[X \leq Q_\ell] \geq \frac{\ell}{4}$ và $P[X \geq Q_\ell] \geq 1 - \frac{\ell}{4}$ với $\ell = 1, 2, 3$. Khi đó Q_ℓ được gọi là **tứ phân vị thứ ℓ** của X . Để đơn giản, ta xét X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục, ví dụ như X là cân nặng, chiều cao, thời gian, v.v. Khi đó $P[X < Q_\ell] = \frac{\ell}{4}$ với $\ell = 1, 2, 3$.

Nếu $cf_{j-1} < \frac{\ell N}{4} \leq cf_j$ thì $[a_j, a_{j+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ ℓ của mẫu số liệu ghép nhóm. Khi đó,

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{4} &= P[X < Q_\ell] \\ &= P[X < a_j] + P[a_j \leq X < Q_\ell]. \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng luật số lớn, khi cỡ mẫu N lớn, ta có công thức xấp xỉ

$$\begin{aligned} P[X < a_j] &\approx \frac{cf_{j-1}}{N}, \\ P[a_j \leq X < a_{j+1}] &\approx \frac{m_j}{N}. \quad (2) \end{aligned}$$

Áp dụng công thức nhân xác suất,

$$\begin{aligned} P[a_j \leq X < Q_\ell] &= P[(a_j \leq X < Q_\ell) \cap (a_j \leq X < a_{j+1})] \\ &= P[a_j \leq X < Q_\ell | a_j \leq X < a_{j+1}] \\ &= P[a_j \leq X < a_{j+1}]. \end{aligned}$$

Do X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục nên với h đủ nhỏ, khi biết $X \in [a_j, a_{j+1})$, ta có thể xấp xỉ xác suất để $X \in [a_j, Q_\ell]$ bằng tỷ lệ giữa

độ dài nửa khoảng $[a_j; Q_\ell)$ và nửa khoảng $[a_j; a_{j+1})$, tức là

$$P[a_j \leq X < Q_\ell \mid a_j \leq X < a_{j+1}] \approx \frac{Q_\ell - a_j}{a_{j+1} - a_j}. \quad (3)$$

Kết hợp (1), (2) và (3), ta có

$$\frac{cf_{j-1}}{N} + \frac{m_j}{N} \frac{Q_\ell - a_j}{a_{j+1} - a_j} \approx \frac{\ell}{4}.$$

Từ đây suy ra

$$Q_\ell \approx a_j + \frac{\frac{\ell N}{4} - cf_{j-1}}{m_j} (a_{j+1} - a_j). \quad (4)$$

Từ cách xây dựng trên ta thấy rằng công thức (4) vẫn có thể áp dụng được khi các nhóm dữ liệu ở Bảng 1 có độ dài khác nhau.

3. Một của mẫu số liệu ghép nhóm

Trước tiên ta cần kết quả sơ cấp sau về ước lượng điểm cực trị của một hàm số khả vi liên tục đến cấp hai khi biết giá trị của nó tại 3 điểm cách đều nhau xung quanh điểm cực trị.

Bổ đề: Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi liên tục đến cấp hai trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$. Giả sử $f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 \in (a; a+2h) \subset I$. Khi đó

$$x_0 \approx a + \frac{1}{2}h + \frac{f(a+h) - f(a)}{2f(a+h) - f(a) - f(a+2h)}h.$$

Chứng minh:

Xét khai triển Taylor đến cấp hai của f tại x_0 . Ta có

$$f(a) = f(x_0) + (a - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(a - x_0)^2 f''(x_0) + o(h^2),$$

$$f(a+h) = f(x_0) + (a+h - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(a+h - x_0)^2 f''(x_0) + o(h^2),$$

$$f(a+2h) = f(x_0) + (a+2h - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(a+2h - x_0)^2 f''(x_0) + o(h^2).$$

Vì $f'(x_0) = 0$ nên

$$2f(a+h) - f(a) - f(a+2h) = -h^2 f''(x_0) + o(h^2),$$

và

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}h(2a - 2x_0 + h)f''(x_0) + o(h^2).$$

Do đó

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{2f(a+h) - f(a) - f(a+2h)}h \approx x_0 - a - \frac{1}{2}h.$$

Hay

$$x_0 \approx a + \frac{1}{2}h + \frac{f(a+h) - f(a)}{2f(a+h) - f(a) - f(a+2h)}h.$$

Bổ đề được chứng minh xong.

Sau đây ta sẽ áp dụng bổ đề trên để tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm. Để đơn giản, ta sẽ chỉ xét mẫu ngẫu nhiên quan sát được từ đại lượng X có phân phối liên tục tuyệt đối với hàm mật độ f khả vi liên tục đến cấp hai.

Nếu hàm mật độ f của X đạt giá trị lớn nhất tại $x = M_0$ thì M_0 được gọi là **mốt** của X .

Trong mẫu số liệu ghép nhóm cho ở Bảng 1, giả sử nhóm $[a_j, a_{j+1})$ có tần số lớn nhất. Khi đó nhóm này được gọi là **nhóm chứa mốt**. Ta quy ước $m_0 = m_{k+1} = 0$.

Trước hết ta xét trường hợp ba tần số m_{j-1}, m_j, m_{j+1} không đồng thời bằng nhau.

Áp dụng luật số lớn, $P[a_i \leq X < a_{i+1}] \approx \frac{m_i}{N}$.

Mặt khác, theo tính chất của hàm mật độ

$$P[a_i \leq X < a_{i+1}] = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx \approx f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)h.$$

Suy ra $f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) \approx \frac{m_i}{Nh}$. Đặt $a = a_{j-1} + \frac{1}{2}h$ là giá trị đại diện của nhóm $[a_{j-1}, a_j)$. Khi

đó giá trị đại diện của nhóm $[a_j, a_{j+1})$ và $[a_{j+1}, a_{j+2})$ là $a+h$ và $a+2h$ và ta có

$$f(a) \approx \frac{m_{j-1}}{Nh}, \quad f(a+h) \approx \frac{m_j}{Nh},$$

$$f(a+2h) \approx \frac{m_{j+1}}{Nh}.$$

Áp dụng bổ đề trên, ta có

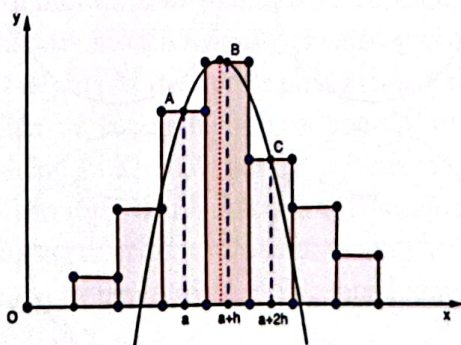
$$M_0 \approx a + \frac{1}{2}h + \frac{f(a+h) - f(a)}{2f(a+h) - f(a) - f(a+2h)}h$$

$$\approx a_j + \frac{m_j - m_{j-1}}{2m_j - m_{j-1} - m_{j+1}}h.$$

Vậy ta thu được một công thức ước lượng một của đại lượng ngẫu nhiên X từ bảng số liệu ghép nhóm là

$$M_0 \approx a_j + \frac{m_j - m_{j-1}}{2m_j - m_{j-1} - m_{j+1}}(a_{j+1} - a_j).$$

Chú ý rằng nếu $y = f(x)$ là đa thức bậc hai trong khoảng (a_j, a_{j+2}) thì $M_0 = a + \frac{1}{2}h + \frac{f(a+h) - f(a)}{2f(a+h) - f(a) - f(a+2h)}h$. Do đó, ta có một cách tiếp cận khác, mang tính trực quan hơn, để ước lượng M_0 như sau.



Xấp xỉ hàm mật độ $y = f(x)$ trên đoạn $[a, a+2h]$ bởi hàm số $y = P(x)$ có đồ thị là parabol

đi qua 3 điểm $A(a; \frac{m_{j-1}}{Nh})$, $B(a+h; \frac{m_j}{Nh})$ và $C(a+2h; \frac{m_{j+1}}{Nh})$. Khi đó, hoành độ điểm cực đại x_0 của hàm số $y = f(x)$ sẽ được xấp xỉ bởi hoành độ đỉnh của của parabol $y = P(x)$.

Sử dụng công thức nội suy Lagrange, ta có

$$P(x) = \frac{(x-a)(x-a-h)}{(a+2h-a)(a+2h-a-h)} \frac{m_{j+1}}{Nh}$$

$$+ \frac{(x-a)(x-a-2h)}{(a+h-a)(a+h-a-2h)} \frac{m_j}{Nh}$$

$$+ \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{(a-a-h)(a-a-2h)} \frac{m_{j-1}}{Nh}.$$

Hay

$$2Nh^2P(x) = (x-a)(x-a-h)m_{j+1}$$

$$- 2(x-a)(x-a-2h)m_j$$

$$+ (x-a-h)(x-a-2h)m_{j-1}.$$

Đạo hàm hai vế, ta được

$$2Nh^2P'(x) = (2x-2a-h)m_{j+1}$$

$$- 2(2x-2a-2h)m_j$$

$$+ (2x-2a-3h)m_{j-1}.$$

Giải phương trình $P'(x) = 0$ ta tìm được hoành độ đỉnh của parabol $y = P(x)$ là

$$a + \frac{1}{2}h + \frac{m_j - m_{j-1}}{2m_j - m_{j-1} - m_{j+1}}h$$

$$= a_j + \frac{m_j - m_{j-1}}{2m_j - m_{j-1} - m_{j+1}}(a_{j+1} - a_j).$$

Trong trường hợp $m_{j-1} = m_j = m_{j+1}$ ta có thể ước lượng M_0 tương tự như trên bằng cách xét khai triển Taylor tại M_0 của hàm số $y = f(x)$ với x lần lượt bằng $\frac{a_{j-2} + a_{j-1}}{2}$; $\frac{a_j + a_{j+1}}{2}$; $\frac{a_{j+2} + a_{j+3}}{2}$.



HÌNH HỌC PHI EUCLID

Phần IV: Hình học trên đĩa Poincaré

LÊ VŨ MINH TRÍ VÀ NGUYỄN DUY ANH¹

Mô hình đĩa Poincaré

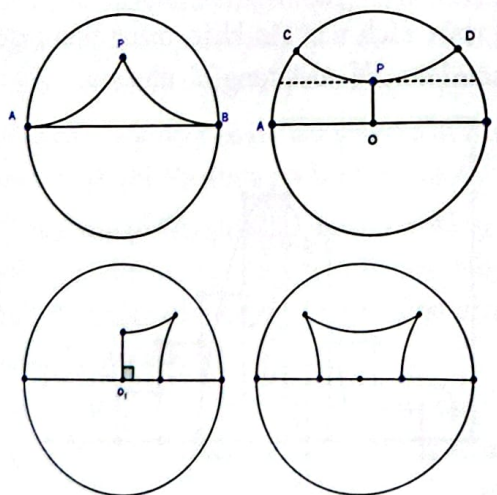
Poincaré (1854 – 1912) là một nhà toán học đa năng, tác giả của một trong bảy bài toán thiên niên kỷ. Trong mô hình đĩa Poincaré, những điểm của hình học hyperbolic là các điểm nằm trong một đường tròn cố định γ nào đó, y như mô hình của Beltrami–Klein. Ta gọi đây là mô hình Poincaré cho ngắn gọn, dù ông còn một mô hình khác của hình học hyperbolic là mô hình nửa mặt phẳng.

Các “đường thẳng” sẽ được diễn giải khác. Cụ thể, với hai điểm A, B cùng nằm trên một đường kính nào đó của γ , “đường thẳng” đi qua A và B ở đây được định nghĩa là đường kính của γ đi qua A và B và bỏ đi hai đầu mút. Trong các trường hợp còn lại thì cung mở trong γ của đường tròn trực giao với γ và đi qua A và B sẽ là “đường thẳng” đang nói. (O_1) và (O_2) được gọi là trực giao nếu như chúng có giao điểm Y và $\angle O_1YO_2 = 90^\circ$. Ta gọi những đường thẳng định nghĩa như trên là đường thẳng Poincaré, viết tắt là đường P .

Quan hệ “nằm trên” có nghĩa như trong hình học Euclid. Một lợi thế lớn của mô hình Poincaré là tính chất “bảo góc” hay bảo toàn góc của nó, bởi ta chỉ cần đơn giản quy ước góc giữa hai đường thẳng trong hình học hyperbolic là góc giữa hai đường P theo

nghĩa trong hình học Euclid. Về sau, chúng tôi sẽ chỉ ra góc giữa hai đường không phải đường thẳng là gì, và tính chất bảo góc và từ đó là bảo toàn tỷ số kép của phép nghịch đảo. Đây chính là điểm then chốt làm nên mô hình đĩa Poincaré.

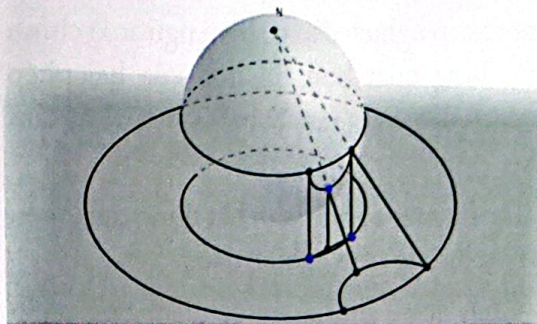
Sau đây là một vài hình vẽ minh họa cho một số điểm khác biệt so với hình học Euclid của hình học hyperbolic.



Lưu ý nhỏ trước khi đi tiếp: ta có thể chứng minh được rằng mọi mô hình của hình học hyperbolic đều là “đẳng cấu”. Nôm na điều đó nghĩa là hai mô hình có cấu trúc tương đồng, còn cụ thể là sẽ tồn tại một quy tắc ghép đôi 1 – 1 các điểm và đường thẳng từ mô hình này sang mô hình khác sao cho các

¹ THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.

quan hệ “nằm trên”, “đi qua”, “nằm giữa” và “bằng nhau” được bảo toàn. Ta sẽ gián tiếp định nghĩa quan hệ “bằng nhau” trong mô hình Beltrami–Klein nhờ vào mô hình Poincaré, đồng thời cũng sẽ có chứng minh cho các tiên đề về các quan hệ “nằm trên”, “đi qua”, “nằm giữa”, và tiên đề Dedekind trong mô hình Poincaré, bởi các kết quả đó có thể được dễ dàng kiểm chứng ở mô hình Beltrami–Klein và lại có phép đẳng cấu trên. Một trong những phép đẳng cấu như vậy có nội dung như sau:



Dựng một mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng chứa đường tròn γ của mô hình Beltrami–Klein tại tâm đường tròn. Để chuyển đổi từ mô hình Klein sang mô hình Poincaré, ta chiếu vuông góc dây mở trong mô hình Klein lên mặt cầu. Từ điểm N trên đỉnh mặt cầu, với mỗi điểm M trên hình chiếu vuông góc của dây mở lên mặt cầu, ta chiếu xuyên tâm N để đưa M trở lại mặt phẳng chứa γ thành điểm M' là giao điểm của đường NM với mặt phẳng ấy. Khi này một dây mở của mô hình Klein sẽ trở thành một đường Poincaré trong đường tròn đồng tâm và bán kính gấp đôi γ . Ta vị tự tâm O tỷ số $1/2$ là đưa đường tròn mới về γ .

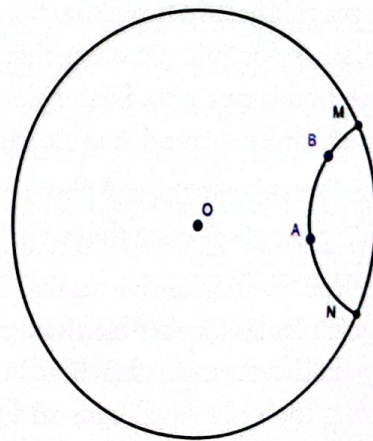
Tiếp theo là định nghĩa độ dài đoạn trong mô hình Poincaré:

Định nghĩa 1. Với hai điểm A, B nằm bên trong đường tròn γ và M, N là hai “giao điểm” của đường Poincaré đi qua A, B với γ . Khi ấy độ dài trong mô hình Poincaré của đoạn AB là:

$$d(AB) = |\ln(AB, MN)|$$

Không khó để chỉ ra là tỷ số kép này là số thực dương, do A, B nằm bên trong đường tròn γ . Đừng để ký hiệu logarit thêm vào làm cho hoang mang, nó ở đó chỉ để biến nhân tính thành cộng tính, điều này sẽ rõ trong chứng minh. Giá trị tuyệt đối được thêm vào để bất kể thứ tự của P và Q , của A và B , độ dài không đổi dấu sang âm.

Ta định nghĩa đoạn AB bằng đoạn CD trong hình học hyperbolic nếu như $d(AB) = d(CD)$. Không khó chứng minh được rằng quan hệ bằng nhau có tính bắc cầu, và một đoạn bằng chính nó. Cố định 1 điểm A trên đường Poincaré có hai đầu là M và N , để điểm B chạy liên tục từ A tới M sao cho thứ tự các điểm là N, A, B, M như hình dưới. Tỷ số kép (AB, MN) sẽ tăng liên tục từ 1 đến dương vô cùng, do $\frac{AM}{AN}$ cố định, BM tiến tới 0 và BN tiến tới MN . Cố định B và cho A chạy liên tục từ B tới N cũng tương tự. Do chạy liên tục nên tỷ số kép trên có thể nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng 1, ta chứng minh được rằng: với một đoạn cho trước và một tia nào đó, lấy được một điểm cách gốc tia đó một đoạn dài bằng đoạn cho trước.



Ta sẽ được phép cộng trừ cạnh thoải mái một khi chứng minh được là với điểm C nằm giữa A và B (trong mô hình Poincaré) thì $d(AC) + d(CB) = d(AB)$. Lấy hai đầu M, N của đường Poincaré qua A và B để thứ tự các điểm là $N - A - C - B - M$. Khi ấy các tỷ số kép sắp được đề cập đều lớn hơn 1 và ta có

thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối. Lúc này:

$$\begin{aligned} d(AC) + d(CB) &= \ln(AC, MN) + \ln(CB, MN) \\ &= \ln\left(\frac{MA}{MC} \cdot \frac{NA}{NC} \cdot \frac{MC}{MB} \cdot \frac{NC}{NB}\right) \\ &= \ln\left(\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NA}{NB}\right) \\ &= \ln(AB, MN) = d(AB), \end{aligned}$$

chính là điều ta cần.

Về phần các tiên đề về sự bằng nhau của góc, ta cần nói qua về phép nghịch đảo và các tính chất liên quan tới hai đường tròn trực giao.

Mở rộng của định nghĩa góc. Sơ lược về phép nghịch đảo

Trước tiên ta mở rộng khái niệm góc trong hình học Euclid. Có các trường hợp sau đây: Đường thẳng d với đường tròn ω : nếu chúng không có giao điểm thì sẽ không tạo góc với nhau. Nếu có giao điểm X , thì góc giữa d và ω được định nghĩa là góc giữa d và tiếp tuyến của ω tại X .

Giữa hai đường tròn (O_1) và (O_2) , hay giữa hai đường cong có tiếp tuyến tại giao điểm: nếu chúng có giao điểm là Y thì góc giữa chúng là góc giữa hai tiếp tuyến của chúng tại Y . Đặc biệt nếu góc ấy là góc vuông thì ta gọi hai đường tròn là trực giao. Định nghĩa này phù hợp với định nghĩa ta đưa ra lúc trước.

Phần bên dưới sẽ là giới thiệu về phép nghịch đảo. Những độc giả đã quen thuộc với phép biến hình này có thể bỏ qua.

Phép nghịch đảo là một phép biến hình trong hình học Euclid, được ghi nhận lần đầu tiên trong công trình của Apollonius xứ Perga, thuộc Hy Lạp cổ đại, và được phát triển sâu hơn bởi nhiều người khác.

Với một điểm O và số thực k khác 0 bất kỳ, ta định nghĩa phép nghịch đảo tâm O , phương tích k là phép biến mỗi điểm Q khác O trên mặt phẳng thành điểm Q' sao cho Q' nằm trên đường thẳng đi qua O, Q , và $\overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = k$. Nói chung ta cũng ký hiệu Q' là ảnh của

điểm Q qua phép nghịch đảo ta đang xét trong văn cảnh. Phép nghịch đảo qua đường tròn tâm O bán kính R được định nghĩa là phép nghịch đảo tâm O phương tích R^2 .

Sau đây là một số tính chất có thể được dễ dàng suy ra từ định nghĩa và xét các tam giác đồng dạng theo trường hợp c-g-c:

- Phép nghịch đảo là một involution (tự nghịch/ đối hợp), tức là tác động cùng một phép nghịch đảo hai lần thì trở về trạng thái ban đầu (hợp hai lần của một phép nghịch đảo là phép đồng nhất). Nói cách khác thì một phép nghịch đảo có hàm ngược là chính nó. Tổng quát hơn thì hợp của hai phép nghịch đảo cùng tâm là một phép vị tự tâm đó

- Tập hợp tất cả các điểm bất động qua phép này là đường tròn nghịch đảo.

- Cách dựng ảnh của một điểm qua phép nghịch đảo đường tròn:

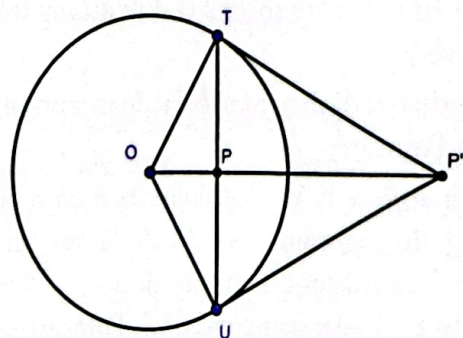
- +) P nằm trong đường tròn: vẽ dây TU đi qua P và vuông góc OP , P' chính là giao điểm của hai tiếp tuyến tại U và T của (O, R)

- +) P nằm ngoài đường tròn: vẽ 2 tiếp tuyến PT, PU tới đường tròn. $P' = TU \cap OP$

- Phép nghịch đảo biến P thành P' , Q thành Q' , và O, P, Q không thẳng hàng, thì $\Delta P'OQ' \sim \Delta QOP$

- $A'B' = |k| \cdot \frac{AB}{OA \cdot OB}$

- Ảnh của một đường tròn trực giao với đường tròn nghịch đảo là chính nó.



Tiếp theo ta sẽ tìm hiểu hình dạng ảnh của đường thẳng và đường tròn qua phép nghịch

59

Các tiên đề về sự bằng nhau

Đã đến lúc chứng minh các tiên đề còn lại về quan hệ bằng nhau trong mô hình Poincaré đúng là định lý trong hình học Euclid.

Vì góc được đo như ở hình học Euclid nên nó cũng có tính chất bắc cầu và một góc bằng chính nó. Ta cần chỉ ra: với một góc cho trước và một tia AB thì dựng được C để $\angle CAB$ bằng góc đó (các đối tượng ở đây hiểu theo nghĩa của mô hình Poincaré). Nếu A trùng với tâm γ thì các đường Poincaré đi qua A chính là các dây mở, việc dựng sẽ như ở hình học Euclid.

Nếu không, bài toán quy về: cho trước một đường thẳng l đi qua A và không đi qua tâm O của γ , khi ấy có đúng một đường tròn (O') trực giao với γ và tiếp xúc với l tại A . Đường thẳng l này chính là đường tạo với tiếp tuyến của "tia AB " góc bằng góc đã cho.

Định lý ta vừa chứng minh cho thấy (O') sẽ phải đi qua A' , do đó O' nằm trên trung trực AA' . Mặt khác (O') tiếp xúc l tại A , nên O' nằm trên đường vuông góc với l tại A . Tóm lại, O' sẽ được xác định duy nhất là giao điểm của hai đường kể trên.

Để sẵn sàng chứng minh trường hợp bằng nhau cgc của các tam giác Poincaré, ta cần hai bước đệm nữa:

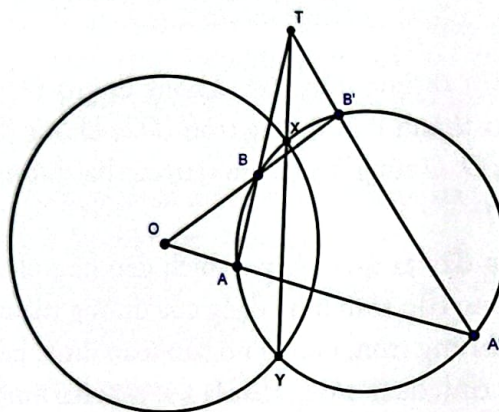
Định lý 4. Cho (O) trực giao (O'). Khi ấy, phép nghịch đảo qua (O') sẽ biến (O) thành (O) và biến phần bên trong (O) thành chính nó. Đồng thời phép này bảo toàn các quan hệ nằm trên, đi qua, nằm giữa và bằng nhau theo mô hình Poincaré. Ta gọi phép biến hình này là phép P -đối xứng với (O'). Tương tự với một đường thẳng d đi qua O , d cũng gọi là trực giao với (O), và xét phép biến hình là đối xứng trục d . Phép này ta cũng gọi là phép P -đối xứng với d .

Định lý 5. [về xây dựng phép P -đối xứng] Với mỗi hai điểm A, B trong γ , tồn tại đường Poincaré δ sao cho phép P -đối xứng với δ biến A thành B . Giao điểm của đường Poincaré

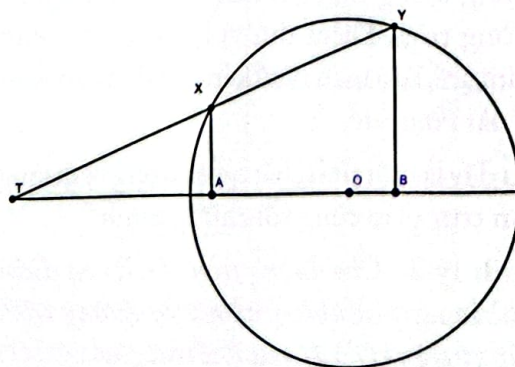
nối A và B với δ là trung điểm theo nghĩa Poincaré của AB . Trung điểm ở đây là điểm nằm trên đoạn và cách đều hai đầu mút.

Chứng minh. Xét các trường hợp:

- Hai điểm cách đều O . Chọn δ là đường kính mở của γ vuông góc với đường thẳng (theo nghĩa Euclid) AB
- Một trong hai điểm trùng với O , giả sử là A . Đường Poincaré đi qua A, B sẽ là đường kính mở qua OB . Chọn δ là (CC'), trong đó C là trung điểm OB theo nghĩa Poincaré.



- A và B không nằm trên cùng một đường kính của γ . Gọi γ' là đường Poincaré đi qua A và B , đây là một đường tròn trực giao với γ , gọi X, Y là giao điểm của γ' và γ . Để ý rằng A', B' là giao điểm thứ hai của OA, OB với γ' . Gọi M, N là giao điểm của OA, OB với XY . Từ OX, OY là hai tiếp tuyến với γ' , ta chỉ ra được $(OM, AA') = -1 = (ON, BB')$, dẫn đến $AB, A'B'$ (có giao điểm do trường hợp 1 đã xét) và XY đồng quy tại điểm gọi là T . Chọn δ là $(T, \sqrt{TA \cdot TB})$.



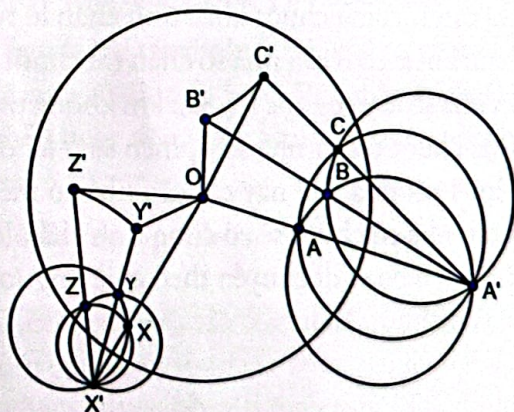
- A, B cùng nằm trên một đường kính XY của γ và không cách đều O . Lấy 1 điểm D trên γ sao cho DB vuông góc XY , gọi E là giao điểm thứ hai của (ABD) với γ . E tồn tại vì hai đường tròn đã sẵn có điểm chung D , và chúng không thể tiếp xúc tại D do trung điểm AD không nằm trên OD . Gọi C là giao điểm của đường thẳng DE với XY , có $CD \cdot CE = CA \cdot CB$ do $ABDE$ là tứ giác nội tiếp. Chọn δ là $(C, \sqrt{CA \cdot CB})$.

Trường hợp bằng nhau cạnh-góc-cạnh

Ta phát biểu lại trường hợp bằng nhau này.

Định lý 8. Cho hai tam giác ABC và XYZ có: $\angle A = \angle X, d(AB) = d(XY), d(AC) = d(XZ)$ Khi ấy hai tam giác này bằng nhau, nghĩa là $d(BC) = d(YZ), \angle B = \angle Y, \angle C = \angle Z$.

Chứng minh. Đầu tiên ta đưa bài toán về trường hợp đặc biệt A và X trùng O . Theo chứng minh định lý xây dựng phép P -đối xứng, có một phép nghịch đảo biến A thành O nếu A khác O . Phép ấy sẽ biến $\triangle ABC$ thành $\triangle OB'C'$, và do tính bảo toàn góc và độ dài cạnh kiểu Poincaré của phép này, hai tam giác này bằng nhau. Để ý quan hệ bằng nhau của tam giác sẽ có tính bắc cầu từ việc quan hệ bằng nhau của góc và cạnh là bắc cầu. Một cách tương tự ta đẩy $\triangle XYZ$ về $\triangle OY'Z'$.



Bổ đề sau đây sẽ chuyển sự bằng nhau của các đoạn Poincaré thành đoạn Euclid:

Bổ đề 9. Ta có: $OB = r(e^d - 1)/(e^d + 1)$, ở đây r là bán kính của γ , $d = d(OB)$.

Chứng minh. Gọi hai đầu của đường Poincaré OB là P và Q thỏa mãn $Q - O - B - P$, thì $d = \ln(OB, PQ)$.

Cho hai giá trị qua hàm mũ cơ số e :

$$\begin{aligned} e^d &= (OB, PQ) \\ &= \frac{OP}{OQ} \cdot \frac{BQ}{BP} \quad (\text{tất cả độ dài đại số}) \\ &= \frac{BQ}{BP} \quad (\text{độ dài thường}) \\ &= \frac{r + OB}{r - OB}. \end{aligned}$$

Từ đó ta thu được kết quả trên. Ta chú ý vào hệ quả của nó:

$$d(OX) = d(OY) \iff OX = OY,$$

theo nghĩa Euclid.

Từ các kết quả trên, ta có: $OB' = OY', OC' = OZ', \angle B'OC' = \angle Y'OZ'$.

Lúc này sẽ tồn tại một phép quay tâm O , hợp với một phép đối xứng qua một đường thẳng nào đó qua O nếu cần thiết (các phép biến hình của hình học Euclid) biến B' thành Y' , C' thành Z' , và bởi các phép này bảo toàn góc và độ dài cạnh, đường Poincaré qua $B'C'$ sẽ biến thành đường Poincaré qua $Y'Z'$, cho ta hai tam giác $OB'C'$ và $OY'Z'$ bằng nhau, hoàn tất chứng minh.

Ý tưởng này thật ra chính là đến từ lập luận "dịch chuyển" của Euclid trong Định lý 4! Thế mới thấy ta có thể học hỏi được kể cả từ những chứng minh chưa chính xác!

Thật ra kết quả ta vừa chứng minh còn chi tiết hơn phát biểu ban đầu. Cụ thể là:

Hai tam giác bằng nhau trong mô hình Poincaré khi và chỉ khi có hữu hạn phép P -đối xứng nào đó để biến tam giác này thành tam giác kia.

Điểm cuối cùng là Tiên đề về tính liên tục. May cho chúng ta là có một kết quả tốt trong mô hình Poincaré như sau:

Định lý 10. Một đường tròn kiểu Poincaré chính là một đường tròn kiểu Euclid trong γ ,

và ngược lại. Tuy nhiên tâm của đường tròn kiểu Poincaré chỉ trùng với tâm đường tròn kiểu Euclid khi nó là O .

Chứng minh. Nhận định sau được chứng minh nhờ vào hệ quả từ bổ đề trong chứng minh trường hợp cgc kiểu Poincaré phía trên. Xét trường hợp đường tròn Poincaré δ có tâm P là O' khác O , sẽ tồn tại phép P -đối xứng f biến O' thành O . Bởi phép P -đối xứng bảo toàn độ dài kiểu Poincaré, $f(\delta)$ sẽ là một đường tròn P có tâm là O , như vừa chỉ phía trên, đây chính là một đường tròn kiểu Euclid tâm O . Tác động lần nữa thì $f(f(\delta)) = \delta$ chính là một đường tròn Euclid, tuy nhiên có tâm khác O' .

Đảo lại với một đường tròn Euclid δ nào đó, gọi A, B là hai giao điểm của OO' với δ , và M là trung điểm của AB kiểu Poincaré. Khi ấy phép P -đối xứng biến M thành O có vai trò tương tự như f ở trường hợp trên. Thậm chí ta chứng minh được M chính là tâm Poincaré của δ .

Hệ quả 11. Nguyên lý liên tục đường tròn – đường tròn đúng trong mô hình Poincaré.

Tóm lại, qua những phát triển không ngắn gọn lắm vừa rồi, chúng ta đã dịch được các tiên đề của hình học hyperbolic thành định lý của hình học Euclid trong mô hình Poincaré. Điều đó là đủ để khẳng định: nếu hình học phẳng của Euclid không chứa mâu thuẫn, thì hình học hyperbolic cho mặt phẳng cũng vậy.

Tài liệu

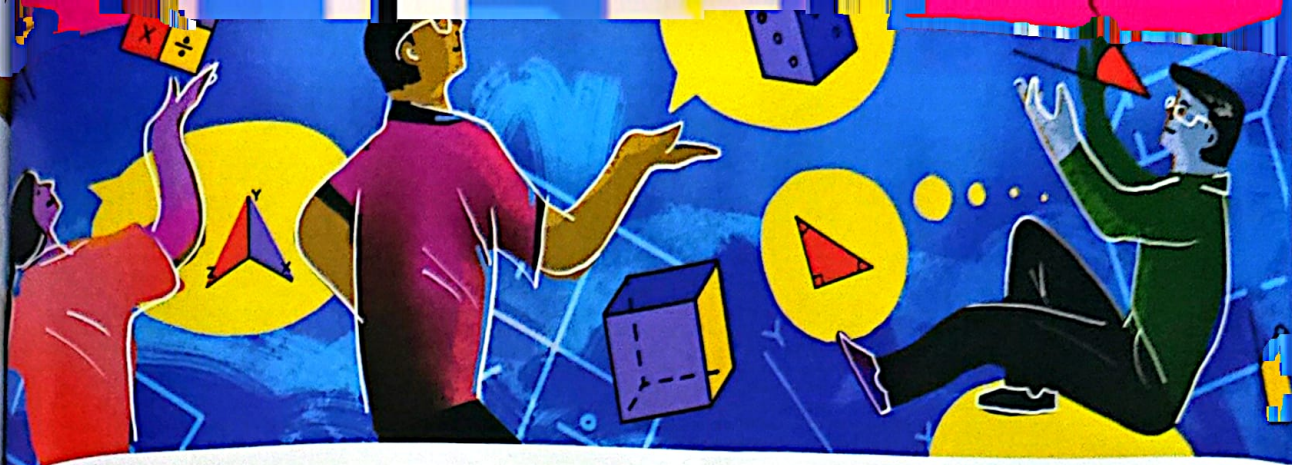
- [1] E.T. Bell, *Men of Mathematics The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré*.
- [2] David M. Burton. *The History of Mathematics An Introduction*.
- [3] M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries – Development and History*.
- [4] Wikipedia tiếng Anh.
- [5] <https://www.youtube.com/playlist?list=PjLK2cYtt-VBSBtvfhxx-DW3Zw3nOQHVZ>
- [6] <https://rosetta.vn/lequanganh/wp-content/uploads/sites/7/2018/07/Riemann.pdf>
- [7] <https://www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/Drama.shtml>

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Đố vui

Mèo có thể sử dụng chiến lược sau để bắt được chuột. Trước tiên, đánh số 1, 2, 3, 4 các căn nhà từ trái qua phải. Đầu tiên, mèo lần lượt tìm chuột ở các căn nhà: ngày đầu ở căn 1, ngày 2 ở căn 2, ngày 3 ở căn 3, và ngày 4 ở căn 4. Nếu mèo chưa bắt được chuột sau khi tìm ở căn 4 thì có nghĩa là một trong 4 đêm đó, mèo và chuột đã di chuyển theo chiều ngược nhau ở 2 căn nhà liền kề nào đó. Vì vậy trong 4 đêm đó, các số của căn nhà mà mèo

ở và căn nhà mà chuột khác tính chẵn lẻ với nhau: khi mèo ở căn nhà số chẵn thì chuột ở căn nhà số lẻ và ngược lại. Sau khi không tìm được chuột ở căn nhà số 4, mèo sẽ ở lại đó thêm 1 tối nữa, khi này các căn nhà có mèo và căn nhà có chuột sẽ có cùng tính chẵn lẻ. Bây giờ, mèo sẽ di chuyển theo chiều ngược lại, tìm chuột lần lượt ở các căn nhà 4, 3, 2, 1. Với cách này, mèo và chuột sẽ ở cùng một căn nhà vào một đêm nào đó, vì thế mèo sẽ bắt được chuột.



TRÒ CHƠI VỀ HÌNH CÓ TÂM ĐỐI XỨNG

Phần IV: Làm lồng đèn Trung thu từ chai nhựa

NGUYỄN THỤY VIỆT ANH¹

*“Chợ Bưởi ngày chín, ngày tư
Riêng một tháng Tám lại dư phiên rằm
Ai ơi nhớ lấy kẻ nhâm
Đi mua hoa quả chơi rằm Trung Thu”*

Tết Trung Thu diễn ra vào ngày 15 tháng 8 âm lịch hàng năm và đóng một vai trò quan trọng trong tâm thức của mỗi người dân Việt Nam. Hình ảnh những em bé vô tư, hồn nhiên, tươi cười vui vẻ, trên tay cầm chiếc lồng đèn rực rỡ sắc màu là một hình ảnh rất quen thuộc và thường xuất hiện vào mỗi dịp Tết Trung Thu.

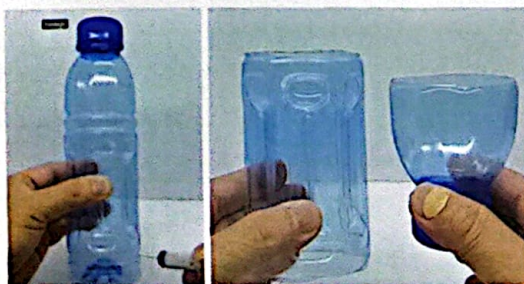
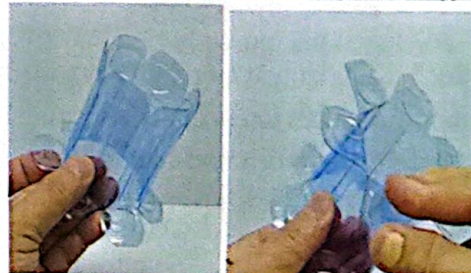
Hôm nay chúng ta sẽ cùng nhau làm một chiếc lồng đèn Trung Thu từ chai nhựa nhé!

Chuẩn bị: Chai nhựa (tái chế từ chai nhựa đã qua sử dụng), kéo, đèn nhấp nháy (loại nhỏ) hoặc nến, dao, kìm, dây thép, dây tua rua.

Các bước thực hiện:

Bước 1: Dùng dao cắt phần trên và phần dưới đáy của chai nhựa như hình minh họa.

Bước 2: Sử dụng kéo để cắt những đoạn nhỏ bằng nhau trên thân chai, sau đó tiếp tục dùng kéo để làm tròn phần nhựa vừa cắt. Tiếp đến, dùng tay bẻ những miếng nhựa ra ngoài (như các hình minh họa) nhằm tạo hình cánh hoa cho lồng đèn.



¹Quảng Trị.

Bước 3: Đục một lỗ nhỏ trên nắp chai. Sau đó dùng kìm cắt một đoạn thép ngắn để gắn dây tua rua vào nắp chai.



Bước 4: Đặt phần trên của chai nhựa vào phần thân của chai như hình minh họa.



Bước 5: Dùng kìm cắt một đoạn dây thép để làm quai xách của lồng đèn. Gắn đoạn dây thép này vào lồng đèn như hình minh họa. Sau đó để đèn nhấp nháy (hoặc nấn) vào bên trong lồng đèn.



Bây giờ thì các em có thể rước đèn Trung Thu đi chơi rồi!



Tài liệu tham khảo

<https://www.youtube.com/shorts/bnOEJZhnBTs>

MVSM NƠI ƯƠM MẦM TOÁN HỌC TRẺ

Trong bối cảnh cách mạng công nghệ phát triển như vũ bão, thị trường lao động thế giới ngày càng thêm "khát" nhân sự giỏi Toán và tiếng Anh.

Trường Toán Minh Việt - Minh Việt School of Math (MVSM) đã kết hợp với The Arts of Problem Solving (AoPS) - Chương trình giáo dục Toán học nâng cao số 1 tại Hoa Kỳ và hàng đầu thế giới, để mở ra mô hình học tập Toán ưu việt nhất.



SỨ MỆNH MVSM

Khơi dậy
Tinh yêu
Toán học

Khả năng
Sáng tạo

Tư duy
Logic

Nghệ thuật
giải quyết
các vấn đề

CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO

- **Đối tượng:** Học sinh tiểu học từ lớp 1 tới lớp 5
- **Giáo trình học:** Beast Academy của AoPS
- **Phương thức:** Học sinh học Online cùng giáo viên Mỹ
- **Thời gian học:**
 - **Lớp Toán:** 1 buổi/ tuần, chỉ với 5 triệu đồng/năm
 - **Lớp Tiếng Anh bổ trợ:** 4 buổi/tuần, 6 triệu đồng/năm.

Những học sinh xuất sắc của MVSM sẽ được tặng học bổng một phần hoặc toàn phần và được giới thiệu học Câu lạc bộ Toán Kỳ Lân với những Giáo sư Toán học hàng đầu Việt Nam.

**Beast
ACADEMY**
By Art of Problem Solving



NĂM HỌC 2024-2025

- **Mở đăng ký:** 1/4/2024
- **Khai giảng:** 24/6/2024

Phụ huynh có thể đăng ký cho con chỉ học Toán, chỉ học Tiếng Anh hoặc học cả Toán và Tiếng Anh.

ĐỌC THÊM



ĐỐ VUI

Quế Chi (st)

Trong một dãy phố có 4 căn nhà xếp thành một hàng, có một con chuột và một con mèo sinh sống. Mỗi đêm, chuột di chuyển từ căn nhà mà nó ở tối hôm trước sang một căn nhà bên cạnh và ở đó suốt đêm. Mỗi đêm, mèo chỉ được phép chọn một căn nhà bất kỳ và tìm kiếm chuột ở đó: nếu căn nhà có chuột, nó sẽ bắt được chuột. Hỏi mèo có cách nào chắc chắn bắt được chuột hay không?



Tài trợ bởi

M MINH VIỆT
ACADEMY



facebook.com/
pijournal



Giá: 35.000 đồng
www.pi.edu.vn