

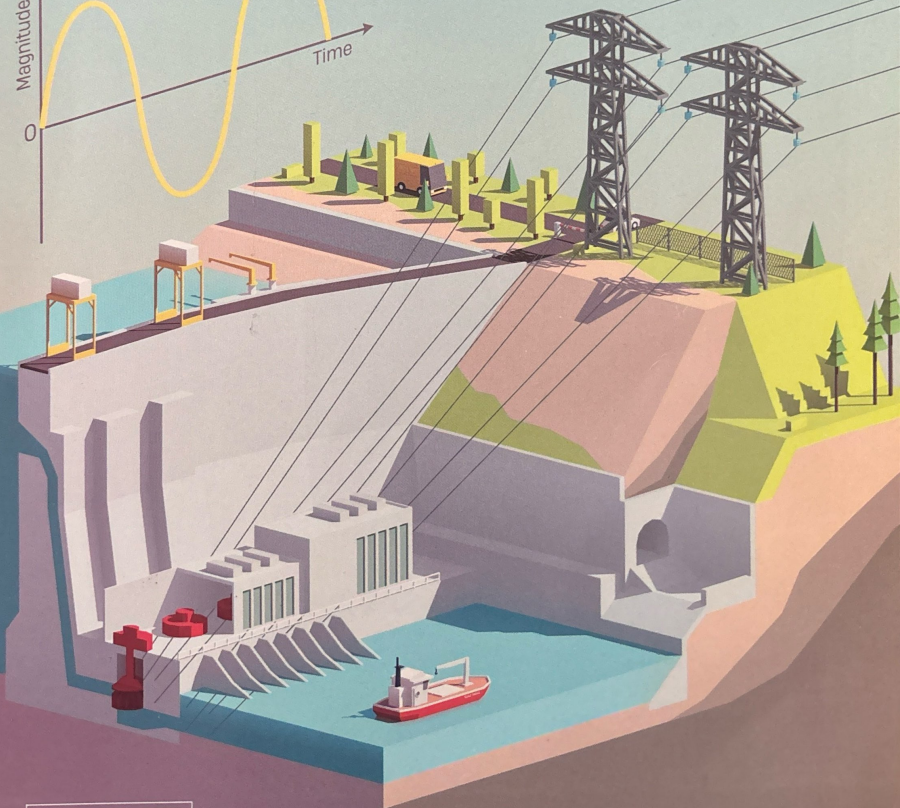
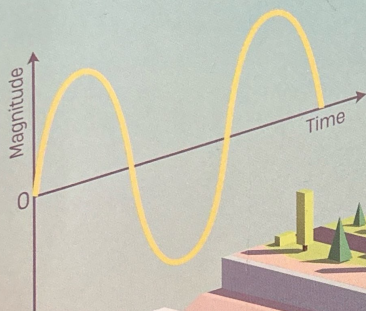
TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 8 - SỐ 6

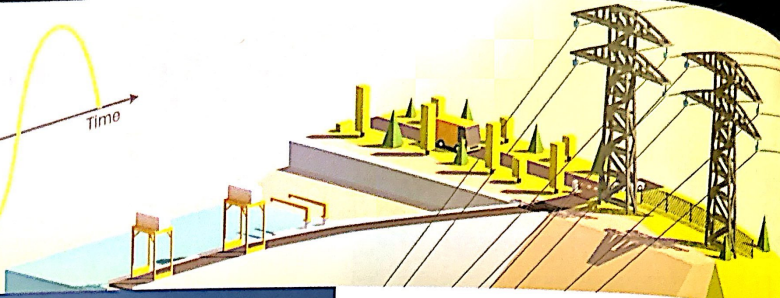
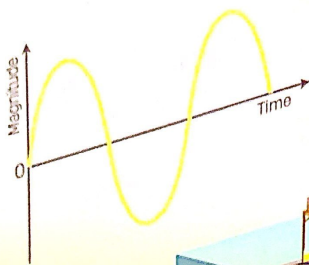
THÁNG 6, 2024

CHARLES STEINMETZ

Số phức và mạch
điện xoay chiều



ISSN 2525-2437



TÌM ĐỌC TRONG SỐ NÀY

Tiếng trầm bổng của còi xe cứu thương, khả năng định vị của những con dơi và tiếng nổ khi máy bay siêu âm bay qua có điểm gì chung? Câu trả lời là: **Hiệu ứng Doppler**. Bài viết trong chuyên mục **Tìm hiểu Khoa học** giới thiệu nguyên lý của hiệu ứng nổi tiếng này cùng những ứng dụng của nó từ thế giới tự nhiên đến những công nghệ hiện đại.

Trong chuyên mục **Toán của Bi**, mời các bạn đọc nhờ tuổi giúp giải mã một báo cáo kỳ lạ để dựng lại lịch họp của thám tử Xuân Phong cùng các điều tra viên của mình, và nhiều bài toán thú vị khác. Trong chuyên mục **Maths & English** là phần tiếp theo của các bài toán về **Perfect squares**.

Người ta hay nói “giấy trắng mực đen”, nhưng với các nhà toán học “Mực trắng Giấy đen” mới là hình ảnh thân thuộc gần gũi. Bài viết trong chuyên mục **Quán Toán** kể câu chuyện tầm quan trọng của viên phấn đối với các nhà toán học và tình yêu của họ với loại “mực trắng” này.

Tháng Năm vừa qua, thế giới mất đi **Jim Simons**, một trong những người có ảnh hưởng nhất đối với cả toán học thế giới lẫn ngành đầu tư tài chính định lượng. Chuyên mục **Đời sống Toán học** số này được dành để điểm lại cuộc đời, sự nghiệp và ảnh hưởng của nhà toán học, nhà đầu tư và nhà hảo tâm huyền thoại.

Ngoài những thử thách thường lệ trong chuyên mục **Thách thức Toán học**, bạn đọc học sinh phổ thông có thể thử sức với một số bài toán trong cuộc thi **Sao chổi tím 2024**, được giới thiệu trong **Góc toán Olympíc**.

Chuyên mục **Lịch sử toán học** tiếp tục với phần ba của loạt bài về **Hình học phi Euclid**. Còn trong chuyên mục **Toán học và cuộc sống** là câu chuyện về Charles Steinmetz, nhà toán học và kỹ sư có những đóng góp đột phá, giúp xây dựng nền tảng toán học cho việc tính toán và thiết kế mạch điện xoay chiều.

Mời các bạn cùng đọc!

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (Tổng Biên tập)
Phùng Hồ Hải (Phó Tổng Biên tập)
Nguyễn Chu Gia Vương (Phó Tổng Biên tập)
Vũ Thế Khôi (Thư ký Tòa soạn)
Ngô Bảo Châu (Ủy viên)
Trần Nam Dũng (Ủy viên)
Phạm Triều Dương (Ủy viên)
Hà Duy Hưng (Ủy viên)
Nguyễn Khắc Minh (Ủy viên)
Nguyễn Hoàng Thạch (Ủy viên)

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phạm Huy Điển, Ngô Trung Hiếu, Nguyễn Thành Nam,
Ngô Văn Minh, Trần Văn Nhung, Tạ Duy Phương,
Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Duy Thái Sơn, Đỗ Đức Thái,
Phạm Văn Thiệu, Vũ Kim Thủy, Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn,
Lê Anh Vinh

Chế bản: Nguyễn Thái Hiệp
Đồ họa: Nguyễn Trần, Đoàn Xuân Trường
Nguyễn Chu Chloé Huệ Chi

Ảnh bìa 1: Đoàn Xuân Trường (nguồn: shutterstock)

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYỀN

Hạ Vũ Anh, Bùi Văn Biên, Võ Quốc Bá Cẩn, Lưu Công Đồng,
Lưu Thị Thanh Hà, Nguyễn Hiệp, Phan Thanh Hồng,
Trần Quang Hùng, Trần Quốc Luật, Kiều Đình Minh,
Nguyễn Thị Nhung, Vũ Hồng Sơn, Lưu Bá Thắng,
Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thắng, Nguyễn Xuân Thọ,
Nguyễn Mạnh Toàn, Nguyễn Hoàng Vũ (phụ trách mục
Tìm hiểu Khoa học).

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty TNHH Đầu tư TM In Hồng Đức
Tạp chí ra hàng tháng
Giá: 35.000 đồng

TÒA SOẠN

Phòng 107, Nhà A5, Viện Toán học,
18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội
Email gửi bài: bbr@pi.edu.vn
Email giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com
Điện thoại: (024) 3215.1407.
Website: www.pi.edu.vn

MỤC LỤC

TOÁN HỌC VÀ CUỘC SỐNG

- 2 Charles Steinmetz: Số phức và mạch điện xoay chiều
Nguyễn Hoàng Vũ

TOÁN CỦA BỊ

- 10 Phép dời hình và công thức tính diện tích Phần IV: Phép dời hình (tiếp theo)
Ngô Văn Minh, Phan Ngọc Minh và Nguyễn Thị Nhung
- 15 Các điều tra viên chuyên cần
Gia Dương
- 15 Các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi
- 17 Lời giải các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi (số 3 năm 2024)
- 20 Perfect squares are everywhere (Part III)
Nghia Doan

QUÁN TOÁN

- 22 Mực trắng giấy đen
Phùng Hồ Hải

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

- 26 Để ra kỳ này
- 27 Giải bài kỳ trước

CÁC KỲ THI TOÁN

- 37 Góc toán Olympic

ĐỜI SỐNG TOÁN HỌC

- 40 Jim Simons: Thiên tài toán học, tỷ phú và nhà hảo tâm
Nguyễn Mạnh Toàn
- 45 Hành trình đến trường với các bạn học sinh của Pi trong năm 2023
Bùi Thị Ngoan

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

- 47 Hình học Phi Euclid Phần III: Kiểm chứng sự tồn tại
Lê Vũ Minh Trí và Nguyễn Duy Anh

TÌM HIỂU KHOA HỌC

- 53 Hiệu ứng Doppler
Nguyễn Hoàng Vũ

VUI CÙNG PI

- 60 Trò chơi về hình có tâm đối xứng Phần III: Gấp hoa sen bằng giấy
Nguyễn Thụy Việt Anh
- 64 Thực hành ăn kiêng
Elena stante



CHARLES STEINMETZ: SỐ PHỨC VÀ MẠCH ĐIỆN XOAY CHIỀU

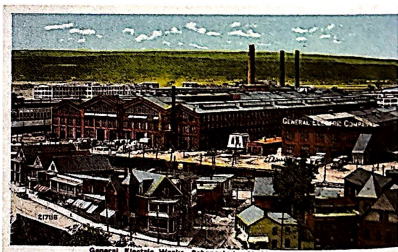
NGUYỄN HOÀNG VŨ¹

Mạch điện xoay chiều là một nội dung quan trọng trong môn vật lý ở bậc phổ thông cũng như trong bộ môn kỹ thuật điện. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng tìm hiểu về quá trình hình thành cơ sở lý thuyết và ứng dụng của số phức trong lĩnh vực này.

1. Mở đầu

Sinh năm 1865 ở Breslau (nay là Wrocław, Ba Lan), Carl August Rudolph Steinmetz theo học ở Đại học Breslau với thành tích xuất sắc trong các môn học về toán và hóa học. Trong thời gian này, ông cũng tham gia vào một số hoạt động của đảng Xã hội, một tổ chức bị chính quyền Đức lúc đó đề ý đến. Lo ngại về việc bị bắt, Steinmetz trốn sang Mỹ vào năm 1888. Nhân viên hải quan không muốn cho ông nhập cảnh vì thấy ông có chiều cao thấp bé (chỉ khoảng 1,2 m). May thay, một người bạn đi cùng giải thích rằng trí tuệ của Steinmetz có thể sẽ giúp ích cho nước Mỹ nên cuối cùng ông cũng được nhập cư. Sau đó một thời gian, Steinmetz bắt đầu làm việc ở Eickemeyer & Osterheld, một công ty ở Yonkers, New York. Tại đây, ông đã tiến hành các nghiên cứu về ảnh hưởng của từ thông biến thiên theo dạng sin đến công suất bị mất đi trong các vật liệu từ tính. Công thức ông đưa ra cho vấn đề này ngày nay được biết đến với tên gọi phương trình Steinmetz.

Cũng trong giai đoạn này, General Electric được thành lập vào năm 1889 và trở thành công ty hàng đầu liên quan đến lĩnh vực điện năng và thiết bị điện ở Mỹ. Khi biết đến các nghiên cứu của Steinmetz, General Electric đã mua lại Eickemeyer & Osterheld vào năm 1892. Các bằng sáng chế của Steinmetz được chuyển giao cho General Electric và bản thân ông cũng bắt đầu làm việc ở đây.



Hình 1. Tổ hợp nhà máy và trung tâm nghiên cứu của General Electric tại Schenectady vào giai đoạn đầu thế kỷ 20.

Năm 1894, Steinmetz chuyển đến trụ sở của General Electric ở Schenectady, New York. Trong suốt vài thập kỷ làm việc tại đây, Steinmetz đã có nhiều đóng góp cho lĩnh vực kỹ thuật điện, trong đó nổi bật nhất chính là việc ứng dụng số phức vào việc giải các mạch điện xoay chiều.

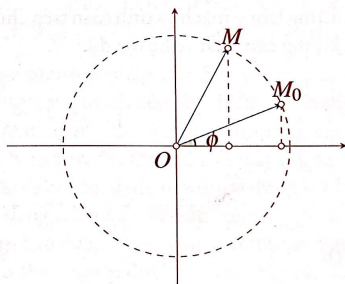
¹ Hà Nội.

2. Phương pháp số phức của Steinmetz

Việc giải các phương trình toán liên quan đến mạch điện gồm nhiều thành phần như điện trở, cuộn cảm và tụ điện là vấn đề được nhiều nhà toán học cuối thế kỷ 19 quan tâm. Năm 1869, Maxwell đã tiến hành giải phương trình mạch điện với giả sử rằng nghiệm của phương trình có dạng hàm điều hòa: $x = A \cos(\omega t + \alpha)$. Sau đó, nhiều phương trình vi phân liên quan đến mạch điện đã được nghiên cứu. Các trường hợp có dao động điều hòa thường được biểu diễn theo dạng hàm mũ của số phức dựa trên công thức Euler: $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$. Một trong những nhà toán học đi đầu về việc này là Heaviside. Trong khi các nhà toán học hướng đến giải các phương trình một cách chính xác với các công cụ toán học phức tạp từ lĩnh vực phương trình vi phân thì các kỹ sư điện lại không đủ trình độ để ứng dụng các phương pháp này vào các bài toán toán thực tế.

Giai đoạn những năm 1880 cũng đánh dấu một sự chuyển đổi quan trọng trong ngành điện. Sau một thời gian đấu tranh kéo dài về việc sử dụng điện một chiều hay xoay chiều (còn được gọi là “cuộc chiến dòng điện”), phe điện một chiều, đứng đầu là Edison, đã phải chịu rút lui. Điện xoay chiều, với khả năng truyền tải xa cùng nhiều ưu điểm khác đã trở nên phổ biến. Tuy nhiên, với các kỹ sư điện thì công việc lại trở nên phức tạp hơn. Với dòng điện một chiều, người ta chỉ cần cộng trừ nhân chia các con số có thể đo trực tiếp từ trong mạch. Chiều của dòng điện cũng không đổi và có thể được xác định dễ dàng từ công cụ đo. Các mạch điện phức tạp cũng có thể quy được về hệ phương trình tuyến tính nhờ định luật Kirchhoff. Còn với mạch xoay chiều, việc đo đạc cũng phức tạp hơn nhiều khi độ lớn của dòng điện thay đổi theo thời gian và cần thực hiện qua việc đo giá trị hiệu dụng. Các dòng điện hay hiệu điện thế cũng không thể tính cộng trực tiếp được do chúng có sự khác nhau về pha.

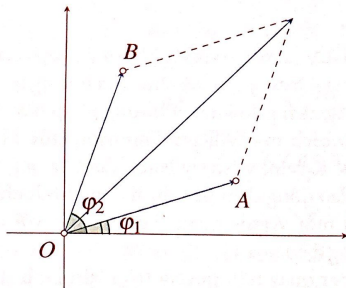
Một phương pháp phổ biến để giải mạch điện lúc đó là sử dụng đồ thị để tiến hành tổng hợp dao động. Các kết quả sẽ có độ lớn được đo trực tiếp từ các đoạn thẳng tỷ lệ trên giấy vẽ. Cách làm này dễ hiểu và dễ thực hiện nhưng độ chính xác không cao. Năm 1885, Blakesley xuất bản một cuốn sách về điện xoay chiều sử dụng phương pháp vector giống với cách giải mà chúng ta học ngày nay trong sách giáo khoa. Phương pháp này dựa trên cách mà William Thomson (tức Nam tước Kelvin) và trợ lý Peter Tait của ông mô tả dao động điều hòa dưới dạng hình chiếu của một vector quay. Tương ứng với dao động điều hòa $x = A \cos(\omega t + \phi)$, ta có một vector quay trên đường tròn bán kính A có tâm ở gốc tọa độ. Tại thời điểm $t = 0$, vector này tạo một góc ϕ với phương Ox . Khi cho nó quay với vận tốc góc cũng bằng ω thì tại thời điểm t góc này sẽ bằng $\omega t + \phi$. Hình chiếu của vector này lên phương nằm ngang sẽ luôn có tọa độ bằng với ly độ của dao động điều hòa. Do đó, với mỗi dao động điều hòa ta có một vector tương ứng biểu diễn nó theo cách trên.



Hình 2. Biểu diễn của dao động điều hòa theo dạng hình chiếu của một vector quay. OM_0 là vector quay ứng với thời điểm $t = 0$ còn OM là vector quay ứng với thời điểm t .

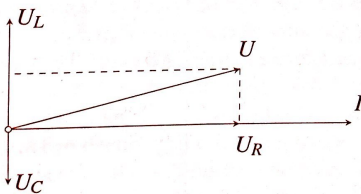
Trong trường hợp có nhiều dao động với cùng tần số, các vector đều chuyển động với cùng vận tốc góc, do đó vị trí tương đối giữa chúng luôn không đổi. Tổng của hai hình chiếu sẽ bằng với hình chiếu của tổng hai

vector. Do đó, để tổng hợp hai dao động điều hòa cùng tần số ta chỉ cần xác định vector biểu diễn dao động tổng hợp bằng cách tìm tổng, theo quy tắc hình bình hành, của hai vector biểu diễn hai dao động ban đầu.



Hình 3. Tổng hợp dao động điều hòa bằng cách cộng các vector biểu diễn dao động theo quy tắc hình bình hành.

Trong trường hợp mạch điện xoay chiều, độ lệch pha giữa dòng điện và các hiệu điện thế trên từng thành phần có vai trò quan trọng hơn là pha của các đại lượng này nên phương pháp của Blakesley chỉ vẽ các vector cho các đại lượng trong mạch và tính toán trên chúng mà không cần phải vẽ hệ tọa độ.



Hình 4. Phương pháp giản đồ vector cho mạch điện xoay chiều RLC nối tiếp. Hiệu điện thế trên điện trở có cùng pha với cường độ dòng điện. Hiệu điện thế trên cuộn cảm sớm pha $\pi/2$ so với cường độ dòng điện còn hiệu điện thế trên tụ trễ pha $\pi/2$ so với cường độ dòng điện. Về mặt độ lớn, $U_R = IR, U_L = IZ_L, U_C = IZ_C$ với $Z_L = L, Z_C = \frac{1}{\omega C}$. Cộng các vector U_R, U_L, U_C ta được vector U biểu diễn hiệu điện thế của toàn mạch.

Phương pháp sử dụng giản đồ vector này có thể cho ra đáp án chính xác về cả độ lớn lẫn độ lệch pha và cũng quen thuộc hơn nhiều so với việc sử dụng phương trình vi phân. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp việc sử dụng phương pháp này đòi hỏi người kỹ sư phải thành thạo về các công thức lượng giác và trong những bài toán phức tạp, lượng tính toán để cho ra đáp án cuối là tương đối lớn. Bản thân Steinmetz cũng tiến hành nghiên cứu một phương pháp sử dụng giản đồ vector tương tự như của Blakesley nhưng với một phép chiếu khác của Zeuner thay vì phép chiếu của Kelvin.

Đột phá xảy ra khi Steinmetz đọc một công bố của Arthur Kennelly về việc sử dụng số phức để tính tổng trở của đoạn mạch. Theo đó các thành phần R, L, C (điện trở, cuộn cảm, tụ điện) của đoạn mạch sẽ có tác dụng cản trở dòng điện tương ứng là $R, j\omega L$ và $\frac{-j}{\omega C}$ (trong kỹ thuật điện, j được dùng để biểu diễn dòng điện nên với số phức người ta dùng j thay cho i). Khi đó, tổng trở toàn mạch RLC mắc nối tiếp sẽ là tổng của các số phức này. Cách tính tổng các số phức cũng được Kennelly minh họa bằng một biểu đồ tam giác. Kennelly không nói rõ lý thuyết của cách tính này nhưng nó có thể có nguồn gốc từ các công thức toán học tính tỷ lệ ui cho toàn mạch dựa trên việc giải phương trình vi phân, ví dụ như trong các bài báo của Johann Victor Wietlisbach. Tuy nhiên, Kennelly chỉ giới hạn số phức cho việc tính tổng trở còn cường độ dòng điện và hiệu điện thế vẫn không được ông biểu diễn bằng số phức. Kennelly cũng cho rằng định luật Kirchhoff chỉ có thể áp dụng trong trường hợp tất cả các dòng điện trong mạch là cùng pha.

Steinmetz nhận thấy sự tương tự giữa biểu đồ cho tổng trở của Kennelly và phương pháp giản đồ vector. Ông tiến thêm một bước và chỉ ra rằng cường độ dòng điện và hiệu điện thế được biểu diễn theo dạng vector cũng có thể được biểu diễn bằng số phức. Thay vì

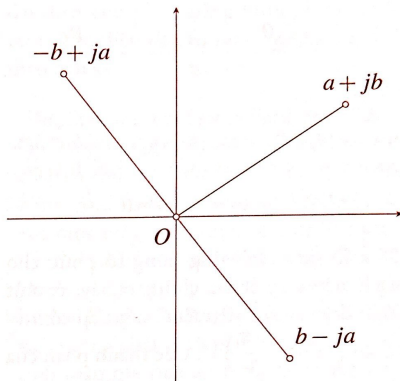
một vector có tọa độ (a, b) , ta có thể sử dụng một số phức $a + jb$. Khi đó, ly độ của dao động điều hòa sẽ ứng với phần thực của số phức. Với các thành phần đoạn mạch khác nhau, một số phức tương ứng sẽ được sử dụng để biểu diễn sự cản trở dòng điện, có bao hàm cả biến đổi về pha. Do Steinmetz sử dụng cách chiếu khác với giản đồ vector nên dấu của các đại lượng trong công thức của ông bị lệch so với phương pháp giản đồ vector. Sau này, khi Kennelly thúc đẩy việc chuẩn hóa về dấu, Steinmetz đã phải chấp nhận và sửa các giáo trình của mình cho phù hợp với xu hướng chung. Tiếp theo, các công thức liên quan đến số phức cho mạch điện xoay chiều sẽ được trình bày theo dạng giống với như trong các tài liệu hiện nay.



Charles Steinmetz (1865 – 1923)

Với điện trở, hiệu điện thế trên nó luôn cùng pha với dòng điện, nên ta có: $u_R = Ri$. Tuy nhiên, cuộn cảm L với dung kháng ωL sẽ làm hiệu điện thế có pha lớn hơn so với dòng điện một lượng là $\pi/2$. Khi đó, vector từ gốc tọa độ đến điểm biểu diễn số phức sẽ không chỉ thay đổi độ lớn mà còn phải quay một góc $\pi/2$ ngược chiều kim đồng hồ. Để làm việc này, ta cần nhân thêm j (do $j(a + jb) = -b + ja$). Tức là $u_L = (j\omega L)i$. Tương tự,

với tụ điện do hiệu điện thế trên tụ trễ pha $\pi/2$ so với cường độ dòng điện nên ta cần chia cho j (do $\frac{a + jb}{j} = b - ja$), tức là $u_C = \left(\frac{1}{j\omega C}\right)i$.

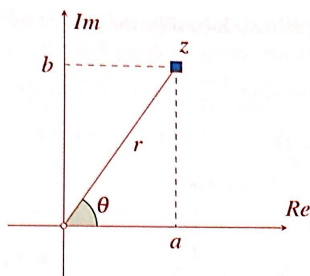


Hình 5. Cho số phức $z = a + jb$. Khi đó $jz = -b + ja$ sẽ được biểu diễn bởi điểm là ảnh của điểm biểu diễn z qua phép quay 90° ngược chiều kim đồng hồ. Còn $\frac{z}{j} = b - ja$ được biểu diễn bởi điểm là ảnh của điểm biểu diễn z qua phép quay 90° theo chiều kim đồng hồ.

Theo phương pháp của Steinmetz, các đại lượng trong mạch đều phải biểu diễn bằng số phức dạng $a + jb$. Tuy nhiên, trong các tài liệu hiện nay, để tiện cho việc quy đổi từ dao động điều hòa, dạng này được dùng kết hợp với dạng cực của số phức (thường được ký hiệu theo dạng $r\angle\theta$). Trong tính toán, người ta có thể chuyển đổi lẫn nhau giữa các dạng này tùy theo phép tính. Dạng $a + jb$ cho phép cộng và trừ số phức dễ dàng còn dạng $r\angle\theta$ giúp nhân và chia nhanh hơn:

$$\begin{aligned} (r_1\angle\theta_1)(r_2\angle\theta_2) &= r_1r_2\angle(\theta_1 + \theta_2), \\ \frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} &= \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Ngày nay, với sự trợ giúp của máy tính điện tử cầm tay hoặc phần mềm máy tính, việc quy đổi này có thể được thực hiện dễ dàng.



Hình 6. Số phức $z = a + jb$ cũng có thể được biểu diễn theo r và θ với $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ còn θ là góc thoả mãn $\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\sin \theta = \frac{b}{r}$.

Để hiểu hơn cách ứng dụng số phức cho mạch điện xoay chiều, chúng ta hãy xét một mạch điện xoay chiều RLC nối tiếp có $u = 12 \cos \left(200\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$ V. Các thành phần của mạch có giá trị $R = 30\Omega$, $L = \frac{300}{\pi}$ mH, $C = \frac{1}{6\pi} \cdot 10^{-3}$ F.

Ta tính tổng trở như sau:

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= 30 + j200\pi \cdot \left(\frac{300}{\pi} \cdot 10^{-3} \right) \\ &\quad + \frac{1}{j200\pi \cdot \frac{1}{6\pi} \cdot 10^{-3}} \\ &= 30 + j60 - j30 = 30 + j30. \end{aligned}$$

Hiệu điện thế hai đầu mạch sẽ được biểu diễn bởi số phức $12\angle\frac{\pi}{3}$. Số phức biểu diễn cường độ dòng điện sẽ là:

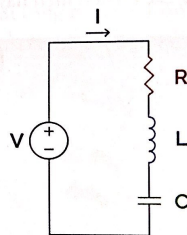
$$\frac{(12\angle\frac{\pi}{3})}{30 + j30} = \frac{12\angle\frac{\pi}{3}}{30\sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{5\sqrt{2}}\angle -\frac{\pi}{4}$$

Cường độ dòng điện tương ứng với số phức này là:

$$i = \frac{2}{5\sqrt{2}} \cos \left(200\pi t - \frac{\pi}{4} \right) \text{ A.}$$

Trong khi một số nhà toán học lên án phương pháp sử dụng số phức của Steinmetz

và kêu gọi đưa số phức dạng mũ hay các khái niệm như quaternion vào các sách kỹ thuật điện thì những giáo trình mới của Steinmetz và nhiều tác giả khác lại dần dần được đón nhận và trở nên phổ biến trong các chương trình đào tạo kỹ sư điện do việc đơn giản hóa công việc tính toán thành các phép tính số phức dễ học. Sau khi Steinmetz mất, người học trò Ernst Berg tiếp tục bổ sung các nội dung mới từ các lý thuyết toán của Heaviside như biến đổi Laplace và biến đổi Mellin, giúp định hình cơ bản về mặt toán học cho các giáo trình kỹ thuật điện cho đến bây giờ. Có thể nói ở thời điểm hiện tại, không kỹ sư điện nào tốt nghiệp đại học mà lại không biết tính toán số phức cho mạch điện.



Hình 7. Mạch điện RLC mắc nối tiếp.

Việc tính toán với số phức đặc biệt có ưu thế so với các phương pháp khác khi áp dụng cho các mạch điện phức tạp với các thành phần được mắc theo cả dạng nối tiếp và song song bởi khi dùng số phức để biểu diễn cường độ dòng điện và hiệu điện thế ở các nhánh thì định luật Kirchhoff vẫn có thể được áp dụng và ta được một hệ phương trình tuyến tính như với trường hợp mạch điện một chiều nhưng các biến ở đây có dạng phức. Bạn đọc có thể tìm hiểu chi tiết hơn về các bài tập dạng này trong các giáo trình kỹ thuật điện.

Một vấn đề còn lại cần đến với số phức trong mạch điện xoay chiều là công suất của mạch điện. Với mạch điện một chiều, công suất có thể được tính trực tiếp bằng tích của cường độ dòng điện và hiệu điện thế.

Tuy nhiên, với mạch điện xoay chiều, do sự biến thiên theo chu kỳ cùng độ lệch pha giữa cường độ dòng điện và hiệu điện thế, việc này trở nên phức tạp hơn, đặc biệt là với số phức. Ta hãy xét một dòng điện xoay chiều $i = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ đi qua một điện trở R .

Trong một chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$, nhiệt lượng do dòng điện này tỏa ra trên điện trở là:

$$Q = \int_0^T i^2 R dt = \frac{I_0^2 R}{2} T.$$

Do đó, người ta thường sử dụng giá trị hiệu dụng $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ để được $Q = I^2 R T$ giống với điện một chiều. Tương tự cho hiệu điện thế, ta có hiệu điện thế hiệu dụng $U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$.

Với mạch điện xoay chiều RLC , cường độ dòng điện và hiệu điện thế có thể có pha khác nhau. Ta hãy xét $i = I_0 \cos(\omega t + \theta_1)$ và $u = U_0 \cos(\omega t + \theta_2)$. Công suất trung bình trong một chu kỳ sẽ bằng:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T u i dt \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &= UI \cos(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned}$$

Tuy nhiên, nếu ta lấy hai số phức biểu diễn u và i nhân với nhau, tức là tích $(U_0 \angle \theta_2)(I_0 \angle \theta_1) = U_0 I_0 \angle (\theta_1 + \theta_2)$ thì phần thực sẽ không cho giá trị tương ứng như trên. Đây là một vấn đề gây ra nhiều tranh cãi khi Steinmetz đề xuất phương pháp số phức cho dòng điện xoay chiều. Ban đầu, Steinmetz xử lý việc này bằng cách cho $j^2 = 1$ thay vì -1 khi tính toán công suất. Ngày nay, công suất phức được định nghĩa là tích của hiệu điện thế hiệu dụng phức với dạng liên hợp của cường độ dòng điện hiệu dụng phức:

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{U_0}{\sqrt{2}} \angle \theta_2 \right) \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}} \angle -\theta_1 \right) \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \angle (\theta_2 - \theta_1). \end{aligned}$$

Đây cũng là một sự thỏa hiệp không thể tránh khỏi khi sử dụng số phức trong mạch điện xoay chiều. Phần thực của công suất phức chính là giá trị công suất trung bình. Phần ảo của công suất phức còn được gọi là công suất phản kháng (reactive power). Nó đại diện cho phần năng lượng được cuộn cảm và tụ điện tích tụ rồi trả lại nguồn điện theo chu kỳ.

Giữa Steinmetz và Henry Ford, người sáng lập hãng xe Ford, đã từng xảy ra một câu chuyện thú vị. Có một lần, các kỹ sư của hãng Ford không giải quyết được vấn đề với một máy phát điện cỡ lớn bị hỏng. Steinmetz được mời đến nhà máy. Ông từ chối mọi sự trợ giúp và chỉ yêu cầu một cái bút chì cùng một quyển sổ. Steinmetz ngồi nghe tiếng phát ra từ máy và tiến hành các tính toán nhẩm trên giấy trong suốt hai ngày liền. Vào đêm của ngày thứ 2, ông yêu cầu một cái thang để leo lên và vạch các vết phấn vào cổ máy rồi bảo các kỹ sư đang tò vò nghi hoặc tháo tám thép tại vị trí đó ra để thay các linh kiện của cuộn dây. Và thế là máy phát điện được sửa xong. Sau đó, khi nhận được một tờ hóa đơn 10.000 dollar (một con số tương đối lớn thời đó), Henry Ford yêu cầu một danh sách chi tiết các chi phí. Steinmetz trả lời:

– Đánh dấu bằng phấn trên máy phát: 1 dollar.

– Biết đánh dấu ở đâu: 9999 dollar.

Và Ford liền lập tức thanh toán hóa đơn.

3. Hạnh phúc cuối đời

Trong giai đoạn ở Schenectady, Steinmetz thường đi xe đạp dọc con phố hoặc ngồi trên một thuyền ca-nô trôi dọc sông Mohawk hàng giờ liền ngồi tính toán trên giấy. Lúc nào cũng có điệu xỉ gà trên miệng, dáng vẻ thấp lùn cùng khẩu âm Đức lơ lơ của ông làm cho trẻ con hoảng sợ. Steinmetz cũng muốn có một gia đình và những đứa con,

tuy nhiên ông không dám lập gia đình vì sợ rằng căn bệnh biến dạng cột sống mà cả cha lẫn ông của Steinmetz đều bị sẽ lại tiếp nối cho các thế hệ sau. Steinmetz sống một mình trong một ngôi nhà lớn ở khu vực dành cho các lãnh đạo General Electric cư trú. Ông có một nhà kính với các loại phong lan, dương xỉ và xương rồng khác nhau cùng các con vật nuôi đáng sợ: cá sấu, rắn đuôi chuông, nhện độc, ...



Hình 8. Steinmetz và Edison cùng nghiên cứu một thiết bị chiếu sáng.

Sự trống rỗng của cuộc sống kết thúc khi người trợ lý thân thiết ở công ty, Joseph Hayden cưới vợ. Mỗi tối, vợ chồng Hayden đều nấu ăn và ngồi ăn tối cùng Steinmetz ở trong nhà của ông. Sau một thời gian, Steinmetz mời cả hai người đến nhà ở của mình ở luôn. Joseph thấy đây là đề xuất thuận tiện cho công việc nghiên cứu còn vợ anh đồng ý với yêu cầu rằng tất cả mọi người phải dùng bữa đúng giờ dù bận đến mấy. Vợ chồng Hayden có ba đứa con: Joe, Midge và Billy. Steinmetz nhận Joseph làm con nuôi và chăm sóc ba đứa trẻ như là cháu nội của mình. Đặc biệt, ông còn sử dụng các phản ứng hóa học để tạo các hiệu ứng khói lửa và tiếng nổ khi kể chuyện cổ tích hay trong các bữa tiệc sinh nhật của chúng. Steinmetz cũng tham gia vào ủy ban về giáo dục của Schenectady. Với sự nỗ lực của ông, đã có nhiều cải thiện trong các cơ sở giáo dục về bữa ăn ở trường học, chăm sóc y tế học sinh cũng như việc phát sách giáo khoa miễn phí.

Vào mùa thu năm 1923, Steinmetz cùng gia đình Hayden đi du lịch ngắm phong cảnh khu vực miền Tây nước Mỹ cũng như thăm Hollywood. Cơ thể mệt mỏi của Steinmetz đã không còn chịu đựng được một chuyến đi như vậy. Vào đêm trước ngày 26 tháng 10 năm đó, trái tim của ông đã ngừng đập. Khi Billy mang bữa sáng lên phòng thì Steinmetz đã qua đời, với một cuốn sách vật lý ở bên cạnh.

4. Lời kết

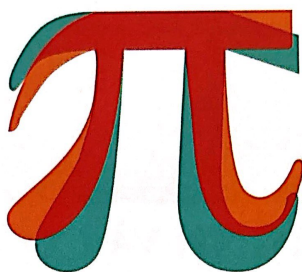
Câu chuyện về sự ra đời của phương pháp số phức trong điện xoay chiều cho thấy khi ứng dụng toán học vào các lĩnh vực khác, có những lúc ta phải cần nhìn nhận vấn đề từ phía những người sử dụng toán học trong thực tiễn của lĩnh vực đó. Liệu có cách nào đơn giản và thuận tiện hơn để giải cùng một bài toán hay không? Đó là câu hỏi mà không phải lúc nào chúng ta cũng ý thức được tầm quan trọng khi nghiên cứu các bài toán thực tế.

Tài liệu tham khảo

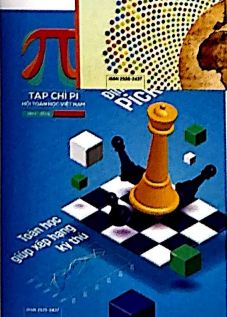
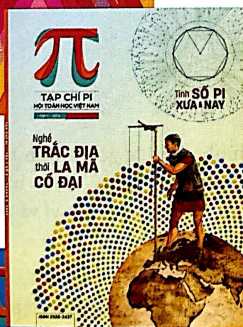
- [1] Araujo, A., & Tonidandel, D. (2013). Steinmetz and the Concept of Phasor: A Forgotten Story. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 24(3), 388 – 395. <https://doi.org/10.1007/s40313-013-0030-5>
- [2] Kirkham, H. (2020). 75 Years of Drift: The Changing Meaning of Phasor [History]. *IEEE Power and Energy Magazine*, 18(1), 76 – 88. <https://doi.org/10.1109/mpe.2019.2945102>
- [3] Kline, R. (1983). Charles P. Steinmetz and The Development of Electrical Engineering Science (Thesis). University of Wisconsin-Madison.
- [4] Svoboda, J. A., & Dorf, R. C. (2013). *Introduction to Electric Circuits*. John Wiley & Sons.



Hội Toán học Việt Nam



Tạp chí Toán học cho mọi người



Tạp chí *Pi* là một ấn phẩm của Hội Toán học Việt Nam, với mục đích quảng bá Toán học tới cộng đồng. *Pi* được xuất bản hàng tháng, và được in màu toàn bộ (kể từ tháng 1/2020). Tạp chí mang vẻ đẹp toán học, kiến thức toán học tới mọi người qua các chuyên mục đa dạng với các nội dung phong phú, thân thiện và nhiều màu sắc.

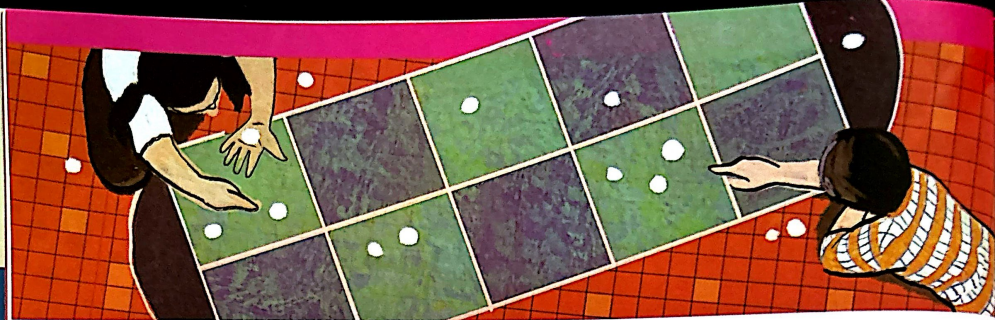
Chúng tôi hy vọng rằng mỗi độc giả, từ trẻ em tới người lớn tuổi, với các kiến thức về Toán học khác nhau, đều tìm được những điều lý thú về Toán học cùng những ích lợi của nó, qua các chuyên mục phù hợp trong *Pi*.



Pi.edu.vn



: Pi của bạn



PHÉP DỜI HÌNH VÀ CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH

Phần IV: Phép dời hình (tiếp theo)

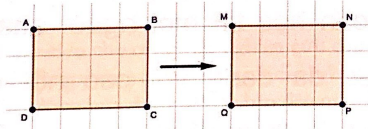
NGÔ VĂN MINH, PHAN NGỌC MINH VÀ NGUYỄN THỊ NHUNG

4. Phép tịnh tiến

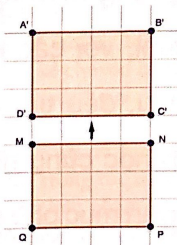
Mô tả phép tịnh tiến

Phép dời hình cuối cùng được giới thiệu trong bài viết này là phép tịnh tiến. Để hiểu thế nào là phép tịnh tiến, chúng ta cùng xem ví dụ minh họa sau.

Trong Hình 1, khi gạt hình $ABCD$ sang bên phải 7 đơn vị ta được hình $MNPQ$ và trong Hình 2, ta đẩy tiếp hình $MNPQ$ lên trên 4 đơn vị và được hình $A'B'C'D'$.

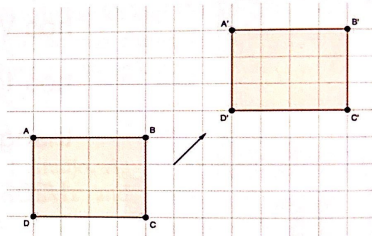


Hình 1.



Hình 2.

Khi đó, ta nói hình $ABCD$ được tịnh tiến thành hình $A'B'C'D'$.

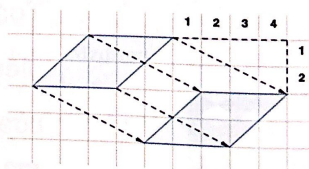


Hình 3.

Như vậy, một hình A được gọi là tịnh tiến đến hình A' nếu A' có được từ A bằng cách gạt sang trái/phải một số đơn vị và đẩy lên/xuống một số đơn vị.

Biểu diễn phép tịnh tiến

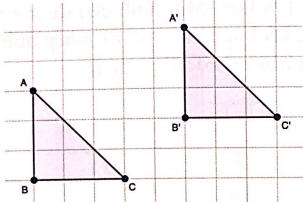
Các ví dụ sau giúp các bạn nhỏ luyện tập để hiểu thêm về phép tịnh tiến.



Hình 4.

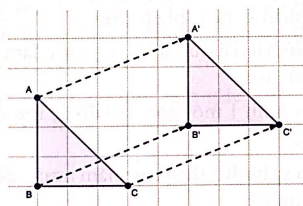
Ví dụ 4.1: Hình 4 là một biểu diễn của phép tịnh tiến. Hình bình hành đã được di chuyển từ trên xuống góc dưới bên phải. Cụ thể, mỗi điểm của hình bình hành gạt sang phải 3 đơn vị rồi đẩy xuống dưới 2 đơn vị.

Ví dụ 4.2: Hãy mô tả phép tịnh tiến biến hình tam giác ABC thành hình tam giác $A'B'C'$ ở hình vẽ sau:



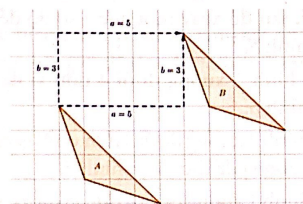
Hình 5.

Lời giải: Để điểm A biến thành điểm A' ta cần gạt A sang bên phải 5 đơn vị và đẩy lên trên 2 đơn vị. Như vậy phép tịnh tiến biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ bằng cách gạt tam giác ABC sang phải 5 đơn vị rồi đẩy lên 2 đơn vị.



Hình 6.

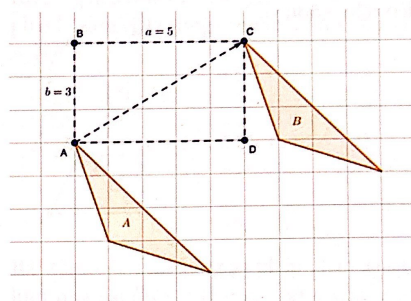
Từ các ví dụ trên ta có các nhận xét:



Hình 7.

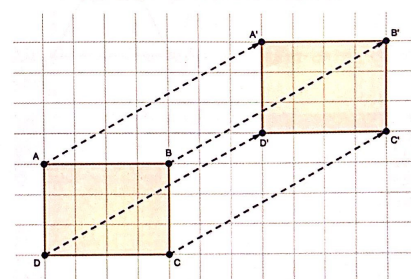
- Việc gạt một hình sang trái/phải a đơn vị rồi đẩy lên/xuống b đơn vị tương đương với việc đẩy lên/xuống b đơn vị rồi gạt sang trái/phải a đơn vị. Nói cách khác, việc thay đổi thứ tự đẩy lên/xuống và gạt trái/phải là không quan trọng.

- Việc gạt sang trái/phải a đơn vị rồi đẩy lên/xuống b đơn vị tương đương với việc tịnh tiến hình đó theo đường chéo của hình chữ nhật cỡ $a \times b$.



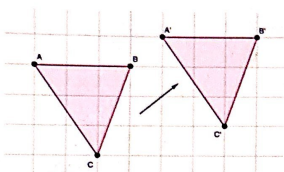
Hình 8.

- Phép tịnh tiến chỉ di chuyển một hình mà không xoay, lật, hay thay đổi hình dạng cũng như kích thước của nó và do đó không làm thay đổi diện tích của hình đã cho. Mỗi điểm được di chuyển theo cùng một khoảng cách và cùng một hướng.



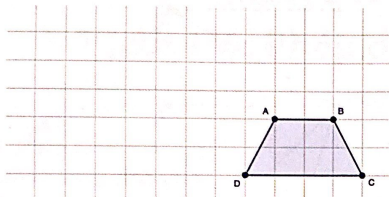
Hình 9.

Bài tập 4.1: Mô tả phép tịnh tiến từ tam giác ABC sang tam giác $A'B'C'$ trong hình dưới đây.



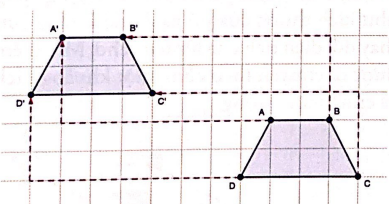
Hình 10.

Ví dụ 4.3: Hãy tịnh tiến hình thang $ABCD$ sau bằng cách di chuyển sang trái 7 đơn vị và lên trên 3 đơn vị.

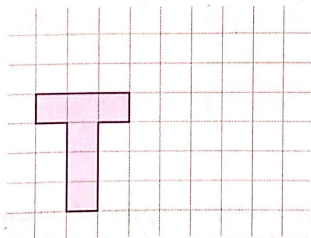


Hình 11.

Lời giải: Ta lần lượt gạt 4 điểm A, B, C, D sang trái 7 đơn vị rồi đẩy lên trên 3 đơn vị (hoặc lên trên 3 đơn vị rồi sang trái 7 đơn vị) để thu được hình thang $A'B'C'D'$ như sau:



Hình 12.

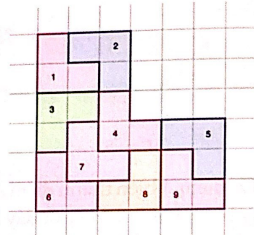


Hình 13.

Bài tập 4.2: Hãy tịnh tiến Hình 13 bằng cách gạt sang phải 5 đơn vị và đẩy lên trên 2 đơn vị.

Liên hệ phép tịnh tiến và những phép dời hình khác

Ví dụ 4.4: Hình vẽ sau đây cho thấy cách mà các hình nhỏ (đánh số từ 1 đến 9) được ghép lại với nhau để tạo ra một hình mới có kích thước lớn hơn. Mỗi hình đều được sinh ra từ việc kết hợp hình 1 với các phép tịnh tiến, phép phản xạ hoặc phép quay.



Hình 14.

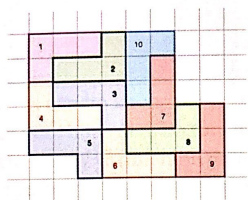
Hãy mô tả cách mà các hình từ 2 đến 9 được sinh ra từ hình 1 thông qua phép tịnh tiến, phép phản xạ hoặc phép quay.

Lời giải: Bắt đầu từ hình 1, ta có thể làm theo các bước sau:

- Xoay hình 1 một góc 180° để thu được hình 2.
- Phản xạ hình 1 theo trục nằm ngang để thu được hình 3.
- Gạt hình 1 sang 2 đơn vị rồi đẩy xuống 2 đơn vị để thu được hình 4.
- Gạt hình 1 sang 4 đơn vị rồi đẩy xuống 2 đơn vị, sau đó xoay một góc 180° để thu được hình 5.
- Đẩy hình 1 xuống dưới 4 đơn vị để thu được hình 6.
- Đẩy hình 1 xuống dưới 3 đơn vị rồi gạt sang phải 1 đơn vị để thu được hình 7.
- Đẩy hình 1 xuống dưới 4 đơn vị rồi gạt sang phải 2 đơn vị, sau đó phản xạ qua trục thẳng đứng để thu được hình 8.

• Đẩy hình 1 xuống dưới 4 đơn vị rồi gạt sang phải 2 đơn vị để thu được hình 9.

Bài tập 4.3: Hình vẽ sau đây cho thấy cách ghép lại với nhau để tạo ra một hình mới có kích thước lớn hơn. Mỗi hình đều được sinh ra từ việc sử dụng các phép tịnh tiến, phép phản xạ hoặc phép quay cho hình 1.



Hình 15.

Hãy mô tả cách mà các hình từ 2 đến 9 được sinh ra từ hình 1 thông qua phép tịnh tiến, phép phản xạ hoặc phép quay.

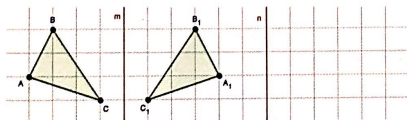
Nếu chúng ta quan sát một chút sẽ thấy ngay một kết quả rất thú vị đó là: Khi một hình được lấy phản xạ liên tiếp qua hai đường thẳng song song thì sẽ thu được một hình là tịnh tiến của hình đã cho. Ví dụ dưới đây cho ta hiểu rõ hơn khẳng định này.

Ví dụ 4.5: Cho một tam giác ABC và hai đường thẳng m và n song song với nhau.



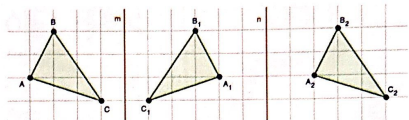
Hình 16.

Thực hiện phép phản xạ lần thứ nhất qua đường thẳng m để thu được ảnh là tam giác $A_1B_1C_1$.



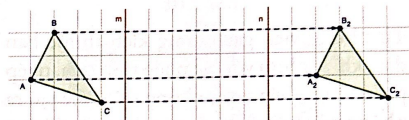
Hình 17.

Sau đó thực hiện phép phản xạ lần thứ hai qua đường thẳng n , thu được tam giác $A_2B_2C_2$.



Hình 18.

Rõ ràng nếu tịnh tiến tam giác ABC sang bên phải 12 đơn vị, ta cũng sẽ nhận được tam giác $A_2B_2C_2$.



Hình 19.

Bài tập 4.4: Tìm ảnh của phép phản xạ lần lượt qua hai đường thẳng m và n của hình chữ nhật $ABCD$ sau. Liệu có thể tìm ảnh của hình chữ nhật $ABCD$ một cách trực tiếp bằng phép tịnh tiến không?



Hình 20.

Ứng dụng của phép tịnh tiến trong cuộc sống



Hình 21a.

Chúng ta cũng nhìn thấy nhiều vật được xây dựng bằng phép dùng phép tịnh tiến trong cuộc sống. Những viên gạch trên những bức

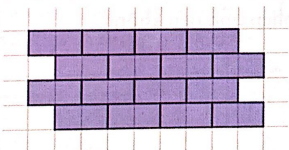
tường, gạch lát trên sàn nhà hay những bậc trên cầu thang là những minh họa sinh động cho phép tịnh tiến.



Hình 21b.

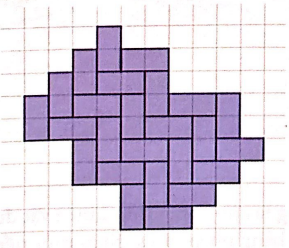
Từ những viên gạch cùng kích thước ban đầu, khi kết hợp với các phép tịnh tiến, phép phản xạ và phép xoay, chúng ta có thể tạo ra những bức tường rất đẹp và đa dạng. Chẳng hạn như bằng các viên gạch hình chữ nhật cỡ 1×2 có thể tạo ra nhiều kiểu tường như sau:

- **Tường xây ngang truyền thống:** Các viên gạch được tịnh tiến theo hàng ngang, với mỗi hàng được đặt xen kẽ với hàng bên dưới.



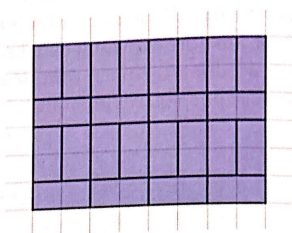
Hình 22.

- **Tường xây hình xương cá:** Một phần các viên gạch được xoay một góc 90° và tịnh tiến theo một mẫu hình chữ L, tạo thành hoa văn xương cá độc đáo.



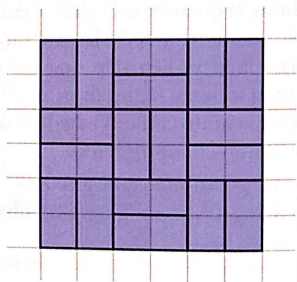
Hình 23.

- **Tường xây so le:** Các viên gạch được tịnh tiến theo hàng dọc và hàng ngang, với mỗi viên gạch được phản xạ theo trục dọc.



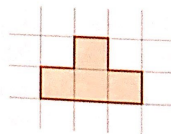
Hình 24.

- **Tường xây hình giỏ đan:** Các viên gạch được sắp xếp theo kiểu xen kẽ giữa hàng ngang và hàng dọc, tạo ra hoa văn giống như giỏ đan.



Hình 25.

Bài tập 4.5: Từ một viên gạch có hình dạng như sau, các bạn nhỏ hãy tự tạo ra những bức tường của riêng mình nhé.



Hình 26.

CÁC ĐIỀU TRA VIÊN CHUYÊN CẦN

GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong có một đội ngũ cộng tác viên gồm 5 nhân viên điều tra, bao gồm ông Anh, ông Bửu, ông Chất, ông Duy và ông Đông. Theo lịch hẹn, trong năm ngày liên tiếp từ thứ Hai tới thứ Sáu, cả năm điều tra viên đều phải đến họp với thám tử Xuân Phong vào lúc 8h30 sáng để cập nhật tin tức phá án. Tuy nhiên, các điều tra viên lại đều có lịch riêng, nên họ không thể tham gia đầy đủ cả năm buổi họp với thám tử. Dưới đây là báo cáo của thư ký về tình hình tham gia họp của mọi người:

- Vào mỗi ngày trong số năm ngày đều có đúng 3 điều tra viên tham gia họp và có đúng 2 điều tra viên vắng mặt;
- Không có điều tra viên nào vắng mặt hai ngày liên tiếp, và cũng không có ai tham gia họp 3 ngày liên tiếp;

Ông Đông vắng mặt nhiều hơn ông Bửu 2 ngày;

Chỉ có duy nhất một ngày mà ông Anh và ông Chất cùng đến tham gia họp;

Ông Chất có tham gia họp vào hôm thứ Hai.

Dựa vào báo cáo trên, em có thể giúp Xuân Phong nhớ lại ai trong số các điều tra viên đã tham gia buổi họp hôm thứ Sáu được không?



CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Bà Hoa có 5 rổ đựng chanh, mỗi rổ có số lượng chanh bằng nhau. Bà đã bán được 36 quả từ mỗi rổ, vì thế tất cả số chanh còn lại chưa bán của bà Hoa bằng đúng số chanh đựng trong hai rổ lúc ban đầu. Hỏi lúc đầu bà Hoa có bao nhiêu quả chanh trong mỗi rổ?



2. Cô giáo phát một số sách giáo khoa cho học sinh trong lớp. Một nửa số học sinh được cô phát cho mỗi bạn một cuốn sách giáo khoa. Một phần tư số học sinh được cô phát 2 cuốn cho mỗi bạn, còn một phần tư số học sinh còn lại mỗi bạn được nhận 4 cuốn.

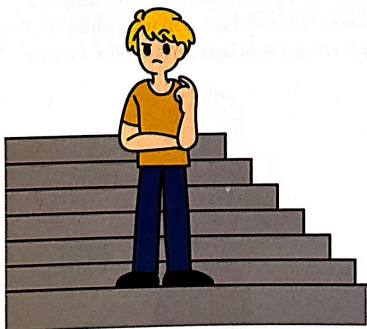


Cô giáo lại muốn dán lên mỗi cuốn sách giáo khoa mà các em học sinh được nhận 1 chiếc sticker hình logo của nhà trường. Hỏi trong lớp có tất cả bao nhiêu học sinh nếu cô giáo cần phải dán đúng 24 chiếc sticker?

3. Hai bạn An và Bích cùng tham gia một trò chơi. An sẽ đưa ra một số câu hỏi dành cho Bích. Nếu Bích trả lời đúng một câu hỏi nào đó thì An lại đưa cho Bích 7 chiếc kẹo. Còn nếu Bích trả lời sai một câu hỏi nào đó, thì Bích phải đưa An 3 chiếc kẹo. Sau khi An đưa ra 50 câu hỏi, thì số kẹo của mỗi bạn bằng đúng số kẹo mà mỗi bạn đã có lúc bắt đầu trò chơi. Hỏi Bích đã trả lời sai bao nhiêu câu hỏi?



4. Đức đang đứng trên một bậc của cầu thang và chợt nhận thấy rằng số bậc thang ở phía trên cậu ta bằng đúng số bậc thang ở phía dưới cậu ta. Đức lại tiếp tục đi 7 bậc lên trên và đi 15 bậc xuống dưới. Kết quả là Đức đứng ở bậc thang thứ 8 (tính từ dưới lên). Hỏi cầu thang đó có bao nhiêu bậc?



5. Sáu bạn học sinh Ân, Bắc, Chi, Dũng, Điệp, Giang xếp thành vòng tròn trong một buổi tập văn nghệ. Biết rằng

- Điệp đứng cạnh Chi và về phía tay phải của Chi;
 - Dũng đứng về phía đối diện với Giang;
 - Giang đứng cạnh Điệp;
 - Ân và Dũng không muốn đứng cạnh nhau.
- Hỏi bạn nào đứng cạnh Bắc?

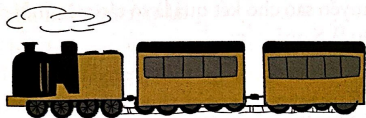


6. Có 3 chiếc hộp rỗng xếp thành hàng ngang và được dán nhãn là A, B, C (theo thứ tự từ trái qua phải). Bé Tít bỏ lần lượt từng chiếc kẹo vào các hộp theo thứ tự: A, B, C, B, A, B, C, B, A, ... Tít sẽ dừng lại nếu hộp B có đúng 13 chiếc kẹo. Hỏi trong hai hộp A và C, hộp nào sẽ có nhiều kẹo hơn? Em hãy giải thích lập luận của mình.



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 3 năm 2024)

1. Hai đoàn tàu xuất phát cùng một thời điểm trên một tuyến đường sắt, một tàu đi từ A tới B với tốc độ 80 km/h, tàu còn lại đi từ B tới A với vận tốc 70 km/h. Hỏi trước khi gặp nhau một giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km, cho biết quãng đường từ A tới B dài ít nhất là 350 km.



Lời giải. Trước khi gặp nhau 1 giờ tàu thứ nhất cách điểm gặp nhau 80 km, tàu thứ 2 cách đó 70 km. Vậy tại thời điểm trước lúc gặp nhau 1 giờ, hai tàu cách nhau 150 km.

2. Anh Sơn xuất phát từ chân dốc và đi lên dốc với tốc độ 2.5 km/h. Lên đến đỉnh dốc, anh đi xuống với tốc độ là 5 km/h. Tổng thời gian đi và về của anh Sơn là 6h. Em hãy tính quãng đường từ chân dốc lên đỉnh dốc.



Lời giải. Do vận tốc lúc xuống dốc gấp đôi lúc lên dốc nên thời gian anh Sơn đi lên dốc gấp đôi lúc xuống. Tổng thời gian là 6h. Nên

thời gian lúc xuống dốc là 2h. Vậy quãng đường từ chân dốc tới đỉnh dốc là

$$2 \times 5 = 10 \text{ (km)}.$$

3. Tí đi mua bánh rán hết 45 ngàn đồng. Bánh rán cỡ to giá 7 ngàn đồng/chiếc, cỡ nhỏ giá 5 ngàn đồng/chiếc. Tí đã ăn luôn một chiếc bánh to sau khi mua, hỏi Tí còn lại mấy chiếc bánh rán?



Lời giải. Số bánh loại to không thể lớn hơn 6 do 45 chia 7 bằng 6 dư 3. Do số tiền 45 (ngàn) chia hết cho 5, giá bán bánh nhỏ cũng chia hết cho 5 nên số bánh to là một số cũng chia hết cho 5. Do Tí đã mua ít nhất một chiếc bánh to nên số bánh to phải là 5 chiếc. Số tiền mua bánh rán loại to là

$$57 = 35 \text{ (ngàn đồng)}.$$

Số tiền mua bánh loại nhỏ là:

$$45 - 35 = 10 \text{ (ngàn đồng)}.$$

Số bánh nhỏ là

$$10 : 5 = 2 \text{ (chiếc)}.$$

Tổng số bánh Tí đã mua là $5 + 2 = 7$ (chiếc). Vậy số bánh còn lại của Tí là 6 chiếc.

4. Bác Tâm có 100 quả trứng gà. Bác bỏ chúng vào 5 chiếc rổ. Tổng số trứng trong

rổ thứ nhất và thứ hai là 52, số trứng trong rổ thứ hai và thứ ba là 43, trong rổ thứ ba và thứ tư là 34, tổng số trứng trong hai rổ cuối cùng là 30. Hỏi số trứng trong mỗi rổ là bao nhiêu?



Lời giải. Ta có 4 cặp rổ đựng trứng là cặp 1, 2; cặp 2, 3; cặp 3, 4, và cặp 4, 5 trong đó số trứng của mỗi cặp lần lượt là 52, 43, 34, 30.

Cộng số trứng trong 4 cặp rổ này ta được

$$52 + 43 + 34 + 30 = 159 \text{ (quả)}$$

Số trứng này bằng tổng số trứng ở cả 5 rổ cộng với số trứng trong những rổ thứ 2, 3, 4. Do tất cả bác Tâm có 100 quả trứng nên số trứng trong 3 rổ thứ 2, 3, 4 là

$$159 - 100 = 59 \text{ (quả)}$$

Ta có số trứng trong rổ thứ 2 là

$$59 - 34 = 25 \text{ (quả)}$$

Số trứng trong rổ thứ 4 là

$$59 - 43 = 16 \text{ (quả)}$$

Số trứng trong rổ thứ 3 là

$$59 - 25 - 16 = 18 \text{ (quả)}$$

Số trứng trong rổ thứ 1 là

$$52 - 25 = 27 \text{ (quả)}$$

Số trứng trong rổ thứ 5 là

$$30 - 16 = 14 \text{ (quả)}$$

Vậy số trứng trong các rổ lần lượt là: 27, 25, 18, 16, 14 (quả).

5. Có 3 đĩa đựng những quả táo, trong đó một đĩa có 11 quả, 1 đĩa có 7 quả và đĩa còn lại có 6 quả táo. Người ta muốn chuyển chỗ

những quả táo giữa các đĩa sao cho số táo trên ba đĩa bằng nhau với điều kiện mỗi lần thêm táo vào một đĩa, số táo thêm vào phải bằng số táo hiện có trên đĩa đó và tất cả những quả táo được thêm vào lấy ra từ chỉ một đĩa trong hai đĩa còn lại. Em hãy cho biết có thể thực hiện với 3 lần chuyển chỗ những quả táo hay không?



Lời giải. Tổng số quả táo là 24 quả. Ta cần chuyển sao cho kết quả là số táo trên mỗi đĩa đều là 8 quả.

Ta đánh số đĩa 1, 2, 3 là đĩa ban đầu đựng 11, 7, 6 quả táo. Ta có thể thực hiện chuyển táo với 3 lần như sau.

- Chuyển 7 quả táo từ đĩa 1 sang đĩa 2 -
Chuyển 6 quả táo từ đĩa 2 sang đĩa 3 -
Chuyển 4 quả táo từ đĩa 3 sang đĩa 1.

Đĩa	1	2	3
Ban đầu	11	7	6
Lần chuyển 1	4	14	6
Lần chuyển 2	4	8	12
Lần chuyển 3	8	8	8

Vậy là cả ba đĩa đều có 8 quả táo sau 3 lần chuyển.

6. Ban đầu bốn bạn An, Bách, Công, Dũng mỗi người có một số viên bi nhất định trong đó Công có nhiều hơn Dũng 10 viên bi. Nếu Công cho Bách $\frac{1}{4}$ số bi của mình, An lấy $\frac{1}{3}$ số bi của An cho Bách, tiếp đến Bách cho Công $\frac{1}{4}$ số bi Bách hiện có, rồi Công lại cho $\frac{1}{5}$ số bi của mình đang có cho Dũng và cuối cùng Bách lấy $\frac{1}{4}$ số bi chia đều cho 3 bạn còn lại thì bốn bạn có số viên bi bằng nhau. Ban đầu mỗi bạn có bao nhiêu viên bi?

Lời giải. Tổng cộng có 5 lần các bạn cho nhau những viên bi. Nhận thấy rằng nếu sau khi một bạn cho đi $\frac{1}{n}$ số bi của mình mà còn lại m viên bi thì trước đó bạn đó có $\frac{n}{n-1} \times m$ viên bi.



Giả sử số bi cuối cùng các bạn có là x . Vậy trước đó, số bi của Bách là $\frac{4}{3} \times x$ và $\frac{1}{4}$ số bi của Bách lúc này là: $\frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times x = \frac{1}{3} \times x$. Số bi này được chia đều làm 3 phần cho An, Cường, Dũng nên mỗi bạn nhận được số bi là $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times x = \frac{1}{9} \times x$. Trước lần chia bi thứ 5 ba bạn An, Cường, Dũng có số bi đều là

$$x - \frac{1}{9} \times x = \frac{8}{9} \times x.$$

Tương tự như vậy, ta sẽ tính ngược về để tìm

số bi từng bạn có sau mỗi lần các bạn cho nhau bi theo bảng sau

Bạn	A	B	C	D
Lần 5	x	x	x	x
Lần 4	$\frac{8x}{9}$	$\frac{4x}{3}$	$\frac{8x}{9}$	$\frac{8x}{9}$
Lần 3	$\frac{8x}{9}$	$\frac{4x}{3}$	$\frac{10x}{9}$	$\frac{6x}{9}$
Lần 2	$\frac{9}{8x}$	$\frac{3}{16x}$	$\frac{9}{6x}$	$\frac{9}{6x}$
Lần 1	$\frac{9}{4x}$	$\frac{9}{12x}$	$\frac{9}{6x}$	$\frac{9}{6x}$
Ban đầu	$\frac{3}{12x}$	$\frac{9}{10x}$	$\frac{9}{8x}$	$\frac{9}{6x}$

Theo giả thiết lúc đầu Cường có nhiều hơn Dũng 10 viên bi vậy

$$\frac{8x}{9} = \frac{6x}{9} + 10 \text{ nên } \frac{2x}{9} = 10.$$

Suy ra $x = 45$.

Ban đầu số bi của An là $\frac{12}{9} \times 45 = 60$.

Tương tự số bi của Bách, Cường, Dũng lần lượt là 50, 40, 30 (viên bi).



PERFECT SQUARES ARE EVERYWHERE (Part III)

NGHIA DOAN¹

This article is the third part of the series on expedition to find *Perfect Squares*.

Example 11. Prove that, for all distinct values of a, b , and c , such that

$$\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}$$

is an integer (not necessarily positive), then the expression

$$\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2}$$

is a perfect square.

Solution 1. Let $x = \frac{1}{b-c}$, $y = \frac{1}{c-a}$, $z = \frac{1}{a-b}$, then

$$xy + yz + zx = \frac{(a-b) + (b-c) + (c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2} = \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right)^2.$$

Solution 2. Let $A = b - c$, $B = c - a$, $C = a - b$, then $A + B + C = 0$, therefore:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right)^2 \\ &= \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} + \frac{2ABC(A+B+C)}{(ABC)^2} \\ &= \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} \\ &= \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2}. \end{aligned}$$

The conclusion follows.

Example 12. Find all (including negative) integer solutions of

$$n^2(n-1)^2 = 4(m^2-1).$$

Solution 1. The left hand side of the equation is a perfect square, thus the right hand side must be a perfect square, too. It means that $m^2 - 1$ is a perfect square. Since m^2 is a perfect square and the only pair of perfect square with difference 1 is $(0, 1)$. Therefore $m^2 = 1$, or $m = \pm 1$. Now, $n^2(n-1)^2 = 0$, so $n^2 = 0$, or $(n-1)^2 = 0$, thus $n = 1$.

Hence, the solutions are $\{(m, n)\} = \{(0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 1)\}$.

Solution 2.

$$\begin{aligned} n^2(n^2-1) &= 4(m^2-1) \\ \Rightarrow (n(n-1))^2 - (2m)^2 &= 4 \\ \Rightarrow (n(n-1) - 2m)(n(n-1) + 2m) &= 4. \end{aligned}$$

Note that both $n(n-1)$ and $2m$ are even, thus their sum and difference are even, too. Therefore

$$\begin{aligned} \begin{cases} n(n-1) - 2m = 2, n(n-1) + 2m = -2, \text{ or} \\ n(n-1) - 2m = -2, n(n-1) + 2m = 2, \text{ or} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} n(n-1) = 0, m = -1 \text{ or} \\ n(n-1) = 0, m = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Hence, the solutions are $\{(m, n)\} = \{(0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 1)\}$.

Example 13. Prove that for n positive integer the following number is a perfect square:

$$m = \underbrace{177\dots792}_{n} \underbrace{88\dots89}_{n-1} 21.$$

¹ Ottawa, Canada.

Solution. Note that,

$$\begin{aligned} \underbrace{77 \dots 7}_n &= \frac{7}{9} \underbrace{99 \dots 9}_n = \frac{7}{9}(10^n - 1), \\ \underbrace{88 \dots 8}_{n-1} &= \frac{8}{9}(10^{n-1} - 1) \\ m &= 1 \cdot 10^{2n+4} + \frac{7}{9}(10^n - 1) \cdot 10^{n+4} \\ &\quad + 92 \cdot 10^{n+2} + \frac{8}{9}(10^{n-1} - 1) \cdot 10^3 + 921 \\ &= \frac{1}{9}(16 \cdot 10^{2n+4} + 136 \cdot 10^{n+2} + 289) \\ &= \frac{1}{9}(4 \cdot 10^{n+2} + 17)^2. \\ 4 \cdot 10^{n+2} + 17 &\text{ is divisible by 3, } (4 \cdot 10^{n+2} + \\ &17)^2 \text{ is divisible by 9, thus } \frac{(4 \cdot 10^{n+2} + 17)^2}{9} \\ &\text{ is a perfect square.} \end{aligned}$$

Example 14. N is 4-digit perfect square all of whose decimal digits are less than seven. Increasing each digit by three we obtain a perfect square again. Find N .

Solution 1. Let $n^2 = N = \overline{abcd} = 10^3a + 10^2b + 10c + d$, where a, b, c, d are integers and $1 \leq a \leq 6$, $0 \leq b, c, d \leq 6$, then there exists integer m such that:

$$\begin{aligned} m^2 &= 10^3(a+3) + 10^2(b+3) + 10(c+3) \\ &\quad + (d+3) = n^2 + 3333 \\ \Rightarrow (m-n)(m+n) &= 3 \cdot 11 \cdot 101. \end{aligned}$$

Since $m < 99$, $n^2 \leq 6666 \Rightarrow n \leq 61$, thus $m+n = 101$, $m-n = 33$, or $n = 34$, hence $N = 1156$.

Solution 2. Note that the unit digit of the perfect square N must be one of 0, 1, 4, 6, 9. Since $N + 3333$ is also a perfect square thus the unit digit of N must be 1 or 6. By testing all 4-digit perfect numbers between 1000 and 9999 where its unit digit is one of 1, 6 and none of its other digits can be larger than

6, we find $N = 1156$.

Example 15. n is a non-negative integer, prove that

$$3^n + 2 \cdot 17^n$$

is never a perfect square.

Solution 1. First $3^n + 2 \cdot 17^n = 3$ if $n = 0$, so it is not a perfect square.

For $n \geq 1$, $17^n \equiv 1 \pmod{8}$, $3^{2k} \equiv 1 \pmod{8}$, $3^{2k+1} \equiv 3 \pmod{8}$, thus

$$3^n + 2 \cdot 17^n \equiv \begin{cases} 3 \pmod{8}, & \text{if } n \text{ is even} \\ 5 \pmod{8}, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

However, for m integer,

$$m^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{8}, & \text{if } 4 \mid k \\ 4 \pmod{8}, & \text{if } 2 \mid k, 4 \nmid k \\ 1 \pmod{8}, & \text{if } 2 \nmid k \end{cases}$$

Hence, $3^n + 2 \cdot 17^n$ is never a perfect square.

Solution 2. First $3^n + 2 \cdot 17^n = 3$ if $n = 0$, so it is not a perfect square.

For $n \geq 1$, $17^n \equiv 2^n \pmod{5}$, thus the sequence of remainders of $2 \cdot 17^n$ when divided by 5 is periodic:

$$\underbrace{4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 2, 4}_{\text{period}}$$

The sequence of remainders of 3^n when divided by 5 is also periodic with period 3, 4, 2, 1.

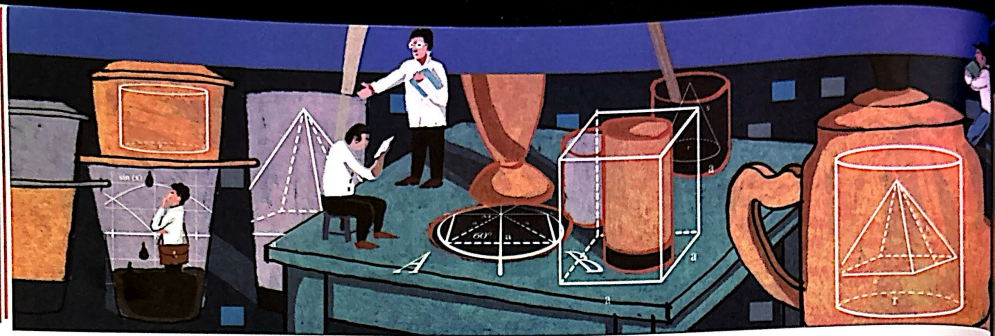
Therefore the sequence of remainders of $3^n + 2 \cdot 17^n$ when divided by 5 is periodic with period 2, 2, 3, 3.

However any perfect square when divided by 5 leaves a remainder of 0, 1, or 4.

Hence, $3^n + 2 \cdot 17^n$ is never a perfect square.

Vocabulary

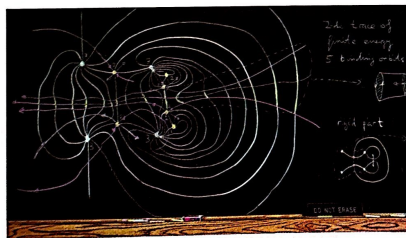
(Xem tiếp trang 36.)



MỤC TRẮNG GIẤY ĐEN

PHÙNG HỒ HẢI¹

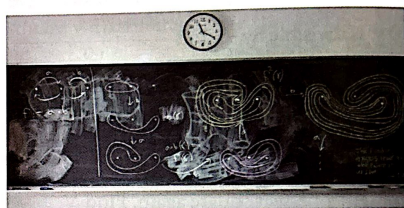
Đường xóa: Các nhà toán học và những chiếc bảng của họ là một cuốn sách ảnh về những chiếc bảng phấn của các nhà toán học. Các bức ảnh trong sách được chụp và biên tập bởi Jessica Wynne, giáo sư nhiếp ảnh tại Viện Công nghệ Thời trang Thành phố New York. Ý tưởng về dự án này nảy sinh từ những trao đổi giữa bà với các nhà toán học Amie Wilkinson và Benson Farb của Đại học Chicago, cũng như qua một chuyến đi tới Ấn Độ nơi bà đã chụp nhiều ảnh về bảng phấn trong các trường phổ thông.



Hình vẽ toán học với ghi chú “đừng xóa” ở góc dưới bên phải. (Ảnh: Wynne)

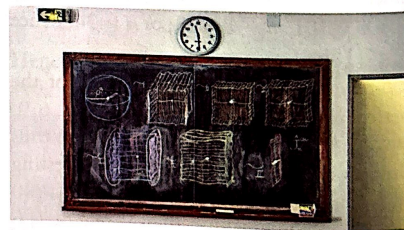
Tiêu đề của cuốn sách nhắc chúng ta về huyền thoại Archimedes yêu cầu những kẻ đến giết ông đừng xóa những hình vẽ của ông trên cát. Ngày nay ghi chú “đừng xóa” trên những chiếc bảng phấn là một cách quen thuộc để yêu cầu lưu giữ những nội dung trên đó.

Những bức ảnh của Wynne mô tả một cách sinh động đời sống toán học hiện đại.



*Các hình vẽ của Benson Farb, Đại học Chicago.
(Ảnh: Wynne)*

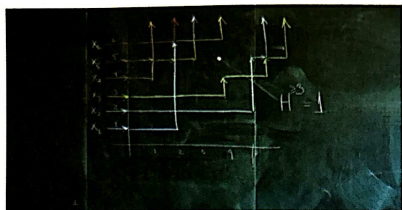
Benson Farb chia sẻ: “Công cụ chính mà hầu hết chúng ta sử dụng để truyền đạt ý tưởng của mình là bảng phấn. Một chiếc máy tính không giúp được gì nhiều với 40.000 chiều, nhưng trên bảng đen, tôi có thể lập sơ đồ tình huống, giải thích nó theo thói quen thực cho học sinh hoặc cộng tác viên.”



*Một chứng minh của giáo sư Amie Wilkinson,
Đại học Chicago. (Ảnh: Wynne)*

¹ Tổng hợp từ Internet.

Còn giáo sư Amie Wilkinson giới thiệu: “Trên tấm bảng đen này là lập luận trọng tâm trong bài báo tôi viết với Keith Burns (giáo sư toán học, Đại học Northwestern) về cơ chế của động lực học hỗn loạn.”



Đi đạo, hình vẽ của A. Borodin, giáo sư Viện Công nghệ Massachusetts (Ảnh: Wynne)

Trong hình ở bảng trên, mỗi đường gấp khúc minh họa đường đi của một người đi bộ. Giả bất cứ khi nào hai người gặp nhau, họ phải quyết định mỗi người sẽ rẽ theo một hướng khác. Quyết định rẽ theo hướng nào có thể thiên lệch – ví dụ, những người đi bộ trên đường có màu lạnh hơn có thể có nhiều khả năng đi về phía đông hơn phía bắc so với những người đi bộ trên đường có màu ấm hơn. “Mặc dù mô tả đơn giản, hành vi trong quy mô lớn của nó rất phức tạp và liên quan chặt chẽ đến một số hiện tượng toán học và vật lý”, giáo sư Borodin cho biết. Mô hình có thể mở rộng để bao gồm nhiều đường đi với nhiều màu sắc hơn. “Sự kết hợp giữa sự đơn giản lừa dối, chiều sâu ẩn giấu và hiệu quả của toán học trong phân tích làm cho hệ thống này trở nên hấp dẫn đối với tôi.”

Câu chuyện tình của những viên phấn

Hagoromo Fulltouch Chalk là tên gọi của một loại phấn không bụi nổi tiếng trên thế giới. Công ty được thành lập vào tháng 10 năm 1932 với tên Nihon Chalk Seizoshō. Nhà máy ban đầu được đặt tại Naka-ku, Nagoya, nhưng đã bị phá hủy vào tháng 8 năm 1944 trong Thế chiến II. Công ty được thành lập lại vào năm 1947 và đổi tên thành Hagoromo Bungu.

Công ty đã bán được hơn 90 triệu viên phấn mỗi năm vào thời kỳ đỉnh cao vào năm 1990 và chiếm 30% thị phần nội địa Nhật Bản.

Nhà toán học Satyan Devadoss đã viết vào năm 2010 rằng phấn Hagoromo có thể được gọi là “Michael Jordan của phấn, Rolls-Royce của phấn”.

Và trong cộng đồng học thuật, Hagoromo Fulltouch Chalk là bí mật được giữ kín nhất thế giới toán học.

“Nó không dễ gãy, viết rất thật tay” – Max Lieblich, giáo sư toán học tại Đại học Washington.

“Nó giống như trượt trên tuyết mới” – Dave Bayer, giáo sư tại Trường Barnard, thuộc Đại học Columbia, New York.

“Truyền thuyết xung quanh loại phấn này là không thể viết một định lý sai bằng phấn, nhưng tôi nghĩ tôi đã bác bỏ điều đó nhiều lần” – David Eisenbud, giáo sư Đại học California ở Berkeley.

Tháng 10 năm 2014, Hagoromo thông báo công ty sẽ ngừng sản xuất phấn vào tháng 2 năm 2015 và ngừng bán hàng vào tháng 3 năm 2015, vì thực tế là bảng đen không còn phổ biến trong lớp học và số lượng học sinh cũng đang suy giảm.

Thông báo đã gây ra sự hoảng loạn trong cộng đồng toán học tại Mỹ. Trong cơn hoảng loạn, các nhà toán học trên khắp nước Mỹ bắt đầu tích trữ tài nguyên để đối phó.



Phấn Hagoromo sản xuất tại Nhật Bản.

“Tôi gọi nó là ngày tận thế bằng phấn” – Brian Conrad, giáo sư Đại học California ở Berkeley.

“Tôi đã tính toán xem tôi sẽ cần bao nhiêu hộp để tồn tại từ 10 đến 15 năm và tôi đã mua nhiều hộp như vậy” – Max Lieblich.

Dave Bayer đã đưa mọi thứ đi xa hơn – “Tôi đã một mình mua phần còn lại của nguồn cung Amazon vào giữa đêm.”

“Tôi có đầy một tủ ở nhà. Thật khó để nói nó sẽ dùng được bao lâu, nhưng tôi nghĩ ít nhất 10 năm với tốc độ sử dụng hiện tại của tôi” – David Eisenbud khoe.

Nhưng trong khi các nhà toán học Mỹ tích trữ Hagaromo, ở phía bên kia thế giới, một giáo viên ở Hàn Quốc đã có một cách tiếp cận khác. Shin Hyeong-seok lần đầu tiên gặp Hagaromo trong một chuyến đi nghiên cứu đến Nhật Bản, và thế giới của ông mãi mãi rung chuyển.

“Thật tuyệt vời”, Shin nhớ lại. “Nó mềm hơn rất nhiều so với phấn thông thường mà chúng tôi đang sử dụng ở Hàn Quốc.”

Ông đã mang một vài hộp trở lại Hàn Quốc và thậm chí còn cố gắng tìm cách riêng để sản xuất phấn, nhưng không gặp may. Vì vậy, ông đã dừng đến việc nhập khẩu phấn từ Nhật Bản.

Hagaromo đã bán chuyển nhượng các đàn máy làm phấn Hagaromo và cả thương hiệu cho công ty Sejongmall của Shin Hyeong-seok. Hagaromo tiếp tục được sản xuất Hàn Quốc. Con khủng hoảng đi qua.

Brian Conrad kể lại: “Một sinh viên của tôi từ Hàn Quốc quay lại sau chuyến về thăm nhà với một hộp phấn... không thể phân biệt được. Và một đồng nghiệp Nhật Bản của tôi, một người hâm mộ nhiệt thành của phấn Hagaromo, cũng không thể phân biệt được sự khác biệt giữa phấn cũ và phấn mới. Không thể phân biệt, vẫn tốt như mọi khi.”

Cảm xúc của các nhà toán học thế nào khi phấn Hagaromo lại tiếp tục được sản xuất?

“Quả là những cảm xúc lẫn lộn,” Lieblich nói. “Tôi rất vui khi biết rằng nó vẫn sẽ được

sản xuất, nhưng hơi thất vọng vì mình kém thông minh hơn mình tưởng.”

“Tất nhiên, nó tốt hơn cho cộng đồng, cho một phần nhỏ cộng đồng yêu thích loại phấn này, để loại phấn này vẫn được sản xuất,” ông nói.

Đầu năm nay, vào ngày 31/7, Takayasu Watanabe, người chủ cũ của Hagaromo Bungu, qua đời. Nhờ Shin Hyeong-seok, di sản phấn của ông sẽ sống mãi.

“Có những giáo viên chưa bao giờ sử dụng phấn, nhưng không có giáo viên nào chỉ sử dụng nó một lần,” Shin tự hào nói.



David Eisenbud, Giáo sư toán tại Đại học California tại Berkeley.

Và các nhà toán học yêu phấn tiếp tục mối tình của họ.

“Tôi cảm thấy mình như một nghệ nhân khi dùng phấn,” Bayer nói. “Nhưng nó không là gì so với sự ngưỡng mộ của tôi đối với nghệ thuật làm phấn.”

Tham khảo

[1] Trisha Gopal, Jacqueline Omanoff and Evan Chung. *How a brand of chalk achieved cult status among mathematicians*. <https://edition.cnn.com/2020/08/22/us/hagaromo-chalk-great-big-story-trnd/index.html>

[2] Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Do_Not_Erase:_Mathematicians_and_Their_Chalkboards

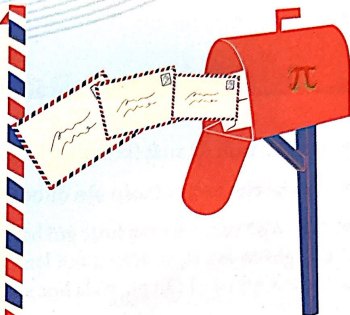
[3] Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Hagaromo_Bungu

MỜI BẠN ĐỌC RA ĐỀ CHO PI

Chuyên mục Thách thức Toán học



trân trọng mời các thầy cô giáo, các bạn học sinh, sinh viên đóng góp các bài toán hay do mình sáng tác hoặc sưu tầm.



YÊU CẦU ĐỐI VỚI BÀI TOÁN GỬI ĐĂNG

Dành cho đối tượng là học sinh THCS hoặc THPT

Có ý tưởng hay độc đáo trong lời giải.

Để bài sáng tác hoặc sưu tầm, được gửi kèm cùng lời giải. Để bài chưa được công bố hay gửi công bố trên các tạp chí, báo toán bằng tiếng Việt.

Với những bài toán khó, khuyến khích tác giả gửi thêm các bài phân tích về ý tưởng, phương pháp tư duy, mối liên hệ với các bài toán khác để đăng trong chuyên mục Học cùng Pi.

Đối với đề sưu tầm cần ghi rõ nguồn gốc (trên các sách báo, tạp chí hay trong các kỳ thi). Đối với các bài toán được phát triển từ một bài toán khác, cũng khuyến khích tác giả giới thiệu bài toán gốc.

Các bạn học sinh, sinh viên có đề bài trên chuyên mục Thách thức Toán học sẽ nhận được giấy khen từ Tạp chí Pi.

Thông tin Tòa soạn

✉ Gửi bài: bbt@pi.edu.vn

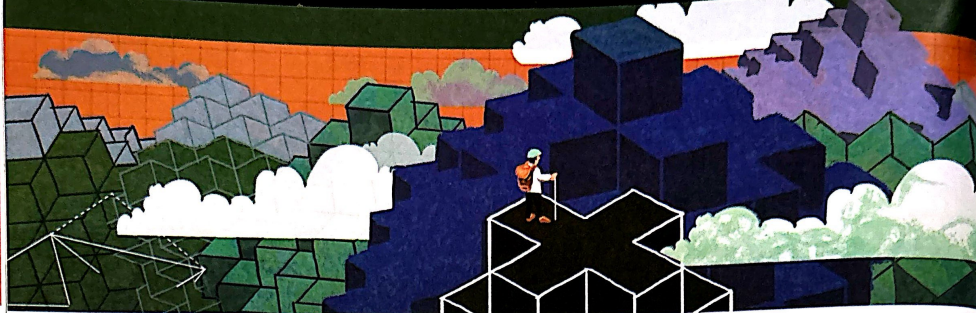
✉ Giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com



Hotline: 024.3215.1407



Website: www.pi.edu.vn



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục “Thách thức kỳ này” cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A, và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm LaTeX, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P811–P820: trước ngày 15/7/2024.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P811. (Mức B) Trên bảng có 23 số nguyên dương liên tiếp. Bạn Pi xoá đi một số, và nhận thấy tổng các số còn lại bằng 2024. Hỏi bạn Pi đã xoá đi số nào?

Duy Minh, Hà Nội

P812. (Mức B) Tìm các số nguyên m để

$$m^3 + 3m^2 + 2m$$
 là một số chính phương.

Trương Quang An, Quảng Ngãi (St)

P813. (Mức B) Có 9 bạn học sinh đứng thành một vòng tròn. Cô giáo muốn phát cho mỗi bạn một lá cờ, màu xanh hoặc màu đỏ, sao cho không có 2 bạn liên tiếp nào cùng cầm cờ đỏ, và không có 3 bạn liên tiếp nào

cùng cầm cờ xanh. Hỏi cô giáo có bao nhiêu cách phát cờ cho các bạn?

(Hai cách phát cờ được coi là khác nhau nếu tồn tại một bạn học sinh cầm cờ màu khác nhau ở hai cách đó.)

Nguyễn Thanh Hải, Thanh Hoá

814. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 1) \geq \frac{1}{(a + \sqrt{a^2 + 1})^2} + \frac{1}{(b + \sqrt{b^2 + 1})^2} + \frac{1}{(c + \sqrt{c^2 + 1})^2} \geq 1.$$

Nguyễn Việt Hùng, Hà Nội

P815. (Mức B) Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B . Qua B kẻ một đường thẳng d bất kì cắt (O_1) và (O_2) tương ứng tại các điểm M, N (d không trùng với AB và M, N khác B). Đường thẳng đi qua A và trung điểm của MN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN tại điểm thứ hai X khác A . Chứng minh rằng, khi d thay đổi, nhưng luôn đi qua B và không trùng với AB , thì $\frac{XM}{XN}$ không đổi.

Phạm Nhật Nguyệt, Hải Phòng

P816. (Mức B) Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn n chia hết cho m . Chứng minh rằng với mỗi số nguyên a ta có

$$(a, m) = ((a, n), m).$$

$((x, y)$ ký hiệu ước chung lớn nhất của hai số nguyên x, y .)

Nguyễn Thọ Tùng, USA

P817. (Mức A) Tìm tất cả các số nguyên dương d , sao cho tồn tại các số nguyên a, b để $1 + \sqrt{d}$ là nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^3 + ax + bx - 1.$$

Hà Duy Hưng, Hà Nội

P818. (Mức A) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq 2\sqrt{a+b+c}.$$

Nguyễn Minh Thọ, Tp. Hồ Chí Minh

P819. (Mức A) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$\phi(m) + f(n) : f(\phi(m)) + n$$

với mọi số nguyên dương m, n .

$(\phi(n))$ là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n .)

Nguyễn Phúc Hưng, Phú Thọ

P820. (Mức A) Cho hai tia song song $Ot, O't'$ với $\widehat{OO't'} < 90^\circ$, $Ot, O't'$ nằm khác phía so với đường thẳng OO' . Trên tia $O't'$ lấy hai điểm B, C (khác O') với B nằm giữa O' và C . Hãy nêu cách dựng điểm A trên tia Ot sao cho: $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ là các góc nhọn; AB, AC cắt OO' lần lượt tại M, N và B, M, N, C cùng thuộc một đường tròn.

Thanos Kalogerakis, Greece and Ichung Chen, Taiwan

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P781. (Mức B) Chuẩn bị quà tặng cho nhân viên dịp Tết Giáp Thìn, hai doanh nghiệp, A và B, đến một cơ sở sản xuất rượu vang để mua hàng. Cơ sở này có 6 thùng rượu vang: Thùng 1 chứa 310 lít, thùng 2 chứa 200 lít, thùng 3 chứa 190 lít, thùng 4 chứa 180 lít, thùng 5 chứa 160 lít, thùng 6 chứa 150 lít. Doanh nghiệp A mua 2 thùng, doanh nghiệp B mua 3 thùng, và số lượng mua của doanh nghiệp B gấp đôi số lượng mua của doanh nghiệp A. Theo bạn, cơ sở sản xuất rượu vang còn thùng nào chưa bán? Mỗi doanh nghiệp đã mua bao nhiêu lít rượu vang?

Lời giải (dựa theo đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc).

Vì lượng rượu doanh nghiệp B đã mua gấp đôi lượng rượu doanh nghiệp A đã mua (tính theo đơn vị lít), nên tổng lượng rượu chứa trong 5 thùng, mà hai doanh nghiệp đã mua, là một số chia hết cho 3.

(1) Nhận thấy, 180 và 150 chia hết cho 3; 310, 190 và 160 chia 3 dư 1; 200 chia 3 dư 2. (2)

Do đó, tổng lượng rượu chứa trong cả 6 thùng của cơ sở sản xuất là một số chia 3 dư 2. (3)

Từ (1) và (3) suy ra, thùng còn lại chưa được bán là thùng, mà lượng rượu chứa trong đó là một số chia 3 dư 2. Từ đây và (2), ta được: thùng chưa được bán là thùng 2 (tức, thùng chứa 200 lít).

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

Vì vậy, tổng lượng rượu mà hai doanh nghiệp đã mua là:

$$310 + 190 + 180 + 160 + 150 = 990 \text{ (lít)}.$$

Suy ra, lượng rượu doanh nghiệp A đã mua là:

$$990 : 3 = 330 \text{ (lít)};$$

và lượng rượu doanh nghiệp B đã mua là:

$$330 \times 2 = 660 \text{ (lít)}.$$

Đáp số:

- Thùng chưa bán: Thùng 2;
- Doanh nghiệp A đã mua: 330 lít;
- Doanh nghiệp B đã mua: 660 lít.

Bình luận và Nhận xét

1. Dễ thấy, hai thùng rượu mà doanh nghiệp A đã mua là thùng 4 và thùng 6; ba thùng rượu mà doanh nghiệp B đã mua là thùng 1, thùng 3 và thùng 5.

2. Thiết nghĩ, bài toán sẽ trở nên thú vị hơn, nếu giả thiết của nó được chỉnh sửa theo hướng sau:

- Giữ nguyên giả thiết về số lượng thùng rượu của cơ sở sản xuất, về số lượng thùng rượu mỗi doanh nghiệp đã mua, về tương quan giữa lượng rượu (tính theo đơn vị lít) mà hai doanh nghiệp đã mua;
- Chỉnh sửa dung lượng rượu của mỗi thùng, sao cho tổng dung lượng rượu của cả 6 thùng là một số chia 3 dư 2, và trong 6 thùng có hai thùng, mà dung lượng rượu của mỗi thùng đều là một số chia 3 dư 2.

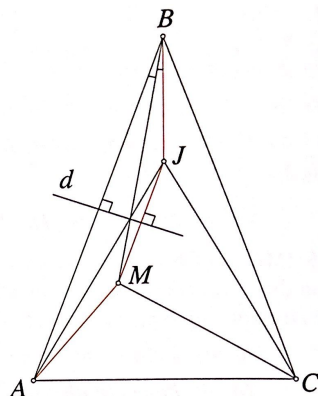
3. Tất cả các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng; tuy nhiên, có vài, ba lời giải khá dài dòng, do người giải bài hoặc đã sử dụng các công cụ phức tạp hơn mức cần thiết (như, giải hệ phương trình, ...), hoặc thiếu nhận xét tổng quan, vội vàng sa đà vào việc xét chi ly các trường hợp.

Nguyễn Khắc Minh

P782. (Mức B) Cho tam giác ABC cân tại B , có $\angle ABC = 40^\circ$. Gọi M là điểm nằm trong

tam giác, sao cho $BM = AC$ và $\angle ABM = 10^\circ$. Tìm số đo của góc AMC .

Lời giải (của người chấm bài).



Từ các giả thiết về tam giác ABC , ta có:

$$\begin{aligned} \angle BAC = \angle BCA &= \frac{1}{2} (180^\circ - 40^\circ) \\ &= 70^\circ. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ đó, do $60^\circ < 70^\circ$, suy ra, ta có thể lấy điểm J , nằm trong tam giác ABC , sao cho AJC là tam giác đều.

Khi đó, do $JA = JC$ và $BA = BC$ (vì tam giác ABC cân tại B) nên BJ là đường trung trực của AC . Suy ra, BJ là phân giác trong của $\angle ABC$. Vì thế, từ giả thiết $\angle ABC = 40^\circ$ ta có:

$$\angle ABJ = \frac{1}{2} \cdot 40^\circ = 20^\circ. \quad (2)$$

Mà $\angle ABM = 10^\circ$ (giả thiết), nên

$$\angle MBJ = 20^\circ - 10^\circ = 10^\circ. \quad (3)$$

Do AJC là tam giác đều, nên:

- từ (1) suy ra

$$\begin{aligned} \angle BAJ &= \angle BAC - \angle JAC = 70^\circ - 60^\circ \\ &= 10^\circ = \angle ABM; \end{aligned} \quad (4)$$

- từ giả thiết $BM = AC$ suy ra $BM = AJ$. (5)

Gọi J' là điểm đối xứng của M qua đường trung trực d của AB .

Khi đó, do A và B đối xứng với nhau qua d , nên tứ giác $ABJ'M$ là một hình thang cân, với hai đáy là AB và MJ' . (6)

Suy ra

$$\angle BAJ' = \angle ABM = \angle BAJ \text{ (theo (4))}, \quad (7)$$

$$AJ' = BM = AJ \text{ (theo (5))}. \quad (8)$$

Do M nằm cùng phía với J , đối với đường thẳng AB , nên J' cũng nằm cùng phía với J , đối với đường thẳng đó. Vì thế, từ (7) và (8), suy ra $J \equiv J'$; do đó, theo (6), $ABJM$ là một hình thang cân, với hai đáy là AB và MJ . Suy ra

$$\angle BAM = \angle ABJ = 20^\circ \text{ (theo (2))}, \quad (9)$$

$$\angle MAJ = \angle MBJ$$

$$= \angle BAJ \text{ (vì cùng bằng } 10^\circ \text{, theo}$$

$$(3) \text{ và (4))}$$

$$= \angle MJA \text{ (hai góc so le trong)}. \quad (10)$$

Từ (10) suy ra, tam giác AMJ cân tại M ; do đó, $MA = MJ$. Mà $CA = CJ$ (do AJC là tam giác đều), nên CM là trung trực của AJ . Suy ra, CM là phân giác trong của $\angle ACJ$. Do đó

$$\angle MCA = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

Từ (1) và (9), suy ra

$$\angle MAC = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ.$$

Vì vậy

$$\angle AMC = 180^\circ - (\angle MAC + \angle MCA)$$

$$= 180^\circ - (50^\circ + 30^\circ) = 100^\circ.$$

Ta có điều phải tìm theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Qua Lời giải trên, bạn đọc có thể ghi nhận kết quả hữu ích dưới đây, liên quan đến phép đối xứng trục:

"Hai điểm phân biệt U, V đối xứng với nhau, qua đường trung trực của đoạn thẳng XY , khi và chỉ khi chúng nằm cùng phía đối với đường thẳng XY , $\angle XYU = \angle YXV$, và $XU = YV$."

2. Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được

từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải không đúng, do có nhầm lẫn trong tính toán số đo của góc MAC .

Hạ Vũ Anh

P783. (Mức B) Cho các số hữu tỷ a, b, c thỏa mãn $(a + bc)(b + ac)(a + b) \neq 0$ và

$$\frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} = \frac{2}{a + b}.$$

Chứng minh rằng, $c^2 - 1$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Lời giải (dựa theo ý giải của đa số lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc).

Ta có:

$$\frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ac} = \frac{2}{a + b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a + b)(c + 1)}{(a + bc)(b + ac)} = \frac{2}{a + b}$$

$$\Leftrightarrow (c + 1)(a + b)^2 = 2(a + bc)(b + ac)$$

$$\Leftrightarrow (c + 1)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= 2(ab + ca^2 + cb^2 + abc^2)$$

$$\Leftrightarrow 2abc + a^2 + b^2 = ca^2 + cb^2 + 2abc^2$$

$$\Leftrightarrow (c - 1)(a^2 + b^2 + 2abc) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a^2 + b^2 = -2abc. \end{cases}$$

- Nếu $c = 1$ thì $c^2 - 1 = 0 = 0^2$. Vì thế, $c^2 - 1$ là bình phương của một số hữu tỷ.

- Xét $a^2 + b^2 = -2abc$. (1)

Nhận thấy, nếu $ab = 0$ thì từ (1), ta có $a^2 + b^2 = 0$; suy ra, $a = b = 0$, trái với giả thiết của bài ra. Vì vậy, $ab \neq 0$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow c = -\frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

Do đó

$$c^2 - 1 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2ab}\right)^2 - 1 = \left(\frac{a^2 - b^2}{2ab}\right)^2. \quad (2)$$

Vì a, b là các số hữu tỷ, nên $\frac{a^2 - b^2}{2ab}$ là một số hữu tỷ. Do đó, (2) cho thấy $c^2 - 1$ là bình

phương của một số hữu tỷ.

Kết quả xét hai trường hợp có thể xảy ra trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có bốn lời giải chưa đúng, do người giải bài không chứng minh $ab \neq 0$, khi biểu diễn c qua a, b .

Lưu Thị Thanh Hà

P784. (Mức B) Tồn tại hay không 2024 số nguyên tố lẻ đôi một phân biệt, sao cho tổng của 11 số bất kỳ trong 2024 số đó là hợp số?

Lời giải (dựa theo lời giải của bạn Trần Khánh Hưng, lớp 10T1, trường THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Bình Dương).

Do có vô số số nguyên tố (theo định lý Euclid), và do 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất, nên có vô số số nguyên tố lẻ. (*)

Do chỉ có 11 số dư có thể trong phép chia một số nguyên cho 11, là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, nên nếu với mỗi $s \in \{0; 1; 2; \dots; 10\}$, chỉ có hữu hạn số nguyên tố lẻ, mà mỗi số đều chia 11 dư s , thì số các số nguyên tố lẻ là hữu hạn, mâu thuẫn với (*). Vì vậy, phải tồn tại số $r \in \{0; 1; 2; \dots; 10\}$, sao cho có vô số số nguyên tố lẻ đôi một phân biệt, mà mỗi số đều chia 11 dư r . Hiển nhiên, tổng của 11 số bất kỳ, trong số các số nguyên tố như vậy, là một số lớn hơn 11 và chia hết cho 11; vì thế, tổng đó là một hợp số.

Như vậy, có vô số số nguyên tố lẻ đôi một phân biệt, sao cho tổng của 11 số bất kỳ trong chúng là một hợp số. Vì vậy, câu trả lời cho câu hỏi của bài ra là “Có”.

Bình luận và Nhận xét

1. Khẳng định “có vô số số nguyên tố” được Euclid tìm ra và chứng minh vào Thế kỷ 3 Trước Công nguyên. Để ghi nhận đóng góp này của Ông, các nhà toán học sau này đã đặt tên cho khẳng định đó là Định lý Euclid.

2. Trong Lời giải trên đây, khi thay 11 bởi k , và đồng thời, thay 10 bởi $k - 1$, 9 bởi $k - 2, \dots$, ta sẽ có Lời giải cho Bài toán khái quát sau:

Bài toán khái quát. Chứng minh rằng, với mỗi số nguyên dương $k > 1$, đều tồn tại vô số số nguyên tố lẻ đôi một phân biệt, sao cho tổng của k số bất kỳ trong chúng là một hợp số.

3. Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc:

– Có một lời giải sai, do người giải bài đã chứng minh sai khẳng định “tồn tại $r \in \{0; 1; 2; \dots; 10\}$, sao cho có vô số số nguyên tố lẻ đôi một phân biệt, mà mỗi số đều chia 11 dư r ”;

– Ngoại trừ lời giải của bạn Trần Khánh Hưng, tất cả các lời giải đúng khác đều khá cồng kềnh, nặng nề (do người giải bài đã sử dụng các khái niệm, kết quả quá mạnh).

Lưu Thị Thanh Hà

P785. (Mức B) Cho 6 số thực a, b, c, x, y, z , thỏa mãn $ax + by + cz = 0$ và

$$a^2 + b^2 + 1 = c^2.$$

Chứng minh rằng, $x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$.

Lời giải (dựa theo lời giải của các bạn: Bùi Hoàng Nam, lớp 9A10, trường THCS Ngô Quyền, Tp. Hải Phòng; và Đỗ Viết Hoàng Long, lớp 11A, trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước).

Từ $a^2 + b^2 + 1 = c^2$, suy ra $c \neq 0$.

Do đó, từ $ax + by + cz = 0$, suy ra $z = -\frac{ax + by}{c}$. Vì vậy

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{(ax + by)^2}{c^2} \\ &\leq \frac{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}{c^2} \\ &= \frac{(c^2 - 1)(x^2 + y^2)}{c^2} \\ &\leq \frac{c^2(x^2 + y^2)}{c^2} = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Suy ra, $x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài toán đơn giản, rất cơ bản. Hướng giải bài toán bằng cách biểu diễn z qua x, y là một hướng giải rất tự nhiên.

2. Tất cả các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng và ngắn gọn.

Nguyễn Khắc Minh

P786. (Mức B) Cho số nguyên dương $n \geq 4$, và cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Bạn Trung vẽ $n + 1$ đoạn thẳng, sao cho mỗi đoạn đều có cả hai đầu mút là các điểm đã cho. Chứng minh rằng, tồn tại hai đoạn thẳng không có điểm chung.

Lời giải (dựa theo Đáp án do BBT cung cấp).

Để tiện cho việc diễn đạt, ta quy ước:

– Ở lời giải này, ngoại trừ “điểm” trong câu “hai đoạn thẳng không có điểm chung”, khi nói “điểm”, ta hiểu đó là điểm nằm trong số các điểm đã cho;

– Gọi hai điểm là *kề nhau*, nếu chúng là hai đầu mút của cùng một đoạn thẳng, trong số $n + 1$ đoạn thẳng bạn Trung đã vẽ;

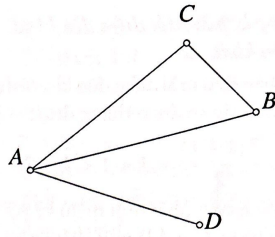
– Nói điểm X *kề* với điểm Y , hoặc điểm Y *kề* với điểm X , nếu X và Y là hai điểm *kề nhau*.

Tiếp theo, ta sẽ giải bài đã ra bằng phương pháp quy nạp theo $n \geq 4$.

• Xét $n = 4$.

Khi đó, do số đoạn thẳng được vẽ là 5, nên phải có ít nhất một điểm *kề* với cả ba điểm còn lại (vì nếu mỗi điểm chỉ *kề* với tối đa hai điểm khác, thì số đoạn thẳng được vẽ không vượt quá $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$). Gọi A là một điểm như vậy, và gọi ba điểm còn lại là B, C, D .

Do không có ba điểm nào thẳng hàng, nên trong ba tia AB, AC, AD , phải có một tia nằm giữa hai tia còn lại. Không mất tổng quát, giả sử tia AB nằm giữa tia AC và tia AD (xem Hình 1).



Hình 1.

Do số đoạn thẳng Trung đã vẽ là 5, nên trong hai đoạn thẳng BC, BD phải có ít nhất một đoạn thẳng nằm trong số năm đoạn thẳng đó. Không mất tổng quát, giả sử BC là đoạn thẳng Trung đã vẽ (xem Hình 1). Khi đó, AD và BC là hai đoạn thẳng không có điểm chung, do $A \neq B$ và hai điểm C, D nằm trong hai nửa mặt phẳng đối nhau, bờ AB .

Vì vậy, ta có điều cần chứng minh theo yêu cầu đề bài, khi $n = 4$.

• Giả sử, ta có điều cần chứng minh theo yêu cầu đề bài, khi $n = k$, với k là một số nguyên dương không nhỏ hơn 4.

• Xét $n = k + 1$.

Khi đó, số đoạn thẳng được vẽ là $k + 2$.

Xây ra các trường hợp sau:

◊ Trường hợp 1: Tồn tại một điểm, gọi là X , không *kề* với bất kỳ điểm nào.

Khi đó, xóa điểm X , ta sẽ có một hệ, gồm k điểm và $k + 2$ đoạn thẳng. Xét $k + 1$ đoạn thẳng tùy ý, trong $k + 2$ đoạn thẳng đó. Theo giả thiết quy nạp, trong $k + 1$ đoạn thẳng này, tồn tại hai đoạn thẳng không có điểm chung. Vì thế, trong $k + 2$ đoạn thẳng được vẽ, có hai đoạn thẳng không có điểm chung.

◊ Trường hợp 2: Tồn tại một điểm, gọi là X , *kề* với đúng một điểm khác.

Trong trường hợp này, xóa điểm X và đoạn thẳng nhận X làm đầu mút, ta sẽ có một hệ, gồm k điểm và $k + 1$ đoạn thẳng. Theo giả thiết quy nạp, trong $k + 1$ đoạn thẳng này, tồn tại hai đoạn thẳng không có điểm chung. Do đó, trong $k + 2$ đoạn thẳng được vẽ, có hai đoạn thẳng không có điểm chung.

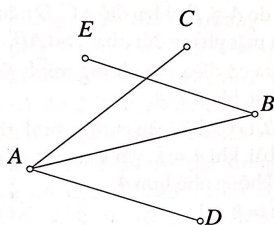
◊ Trường hợp 3: Mỗi điểm đều kề với ít nhất hai điểm khác.

Nhận thấy, nếu mỗi điểm đều kề với đúng hai điểm khác, thì số đoạn thẳng được vẽ là:

$$\frac{2(k+1)}{2} = k+1 < k+2.$$

Vì vậy, phải có ít nhất một điểm kề với ít nhất ba điểm khác. Gọi A là một điểm như vậy, và giả sử B, C, D là ba trong số các điểm kề với A .

Do không có ba điểm nào thẳng hàng, nên trong ba tia AB, AC, AD , phải có một tia nằm giữa hai tia còn lại. Không mất tổng quát, giả sử tia AB nằm giữa tia AC và tia AD (xem Hình 2).



Hình 2.

Do $k+1 \geq 5$ (vì $k \geq 4$), và do B kề với ít nhất hai điểm khác, nên phải có điểm $E \neq A$, mà B kề với E (E không nhất thiết phải khác C, D).

Do không có ba điểm nào thẳng hàng, nên E nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB với C , hoặc với D . Không mất tổng quát, giả sử E nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB với C (xem Hình 2). Khi đó, AD và BE là hai đoạn thẳng không có điểm chung, do $A \neq B$ và hai điểm D, E nằm trong hai nửa mặt phẳng đối nhau, bờ AB .

Kết quả xét ba trường hợp trên đây cho thấy, ta có điều cần chứng minh theo yêu cầu đề bài, khi $n = k+1$.

Vì vậy, theo nguyên lý quy nạp, ta có điều cần chứng minh theo yêu cầu đề bài, với n là một số nguyên dương tùy ý, không nhỏ hơn 4.

Bình luận và Nhận xét

Quy nạp là một hướng giải tự nhiên của bài đã ra. Tất cả các lời giải Tập chỉ đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải theo hướng này. Tuy nhiên, rất tiếc, tất cả các lời giải đó đều là lời giải sai, do người giải bài đã mắc một trong các lỗi sau:

- Chứng minh một khẳng định, khác với khẳng định của bài ra. Cụ thể, thay vì chứng minh tồn tại hai đoạn thẳng không có điểm chung, người giải bài đã chứng minh tồn tại hai đoạn thẳng không có đầu mút chung.
- Chứng minh sai mệnh đề quy nạp (tức, chứng minh khẳng định của bài ra, khi $n = k+1$) trong trường hợp có một điểm là đầu mút chung của đúng hai đoạn thẳng, và mỗi điểm, trong số k điểm còn lại, đều là đầu mút chung của ít nhất hai đoạn thẳng.

Nguyễn Khắc Minh

P787. (Mức A) Xét các số thực a, b, c , thỏa mãn

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 = 6\sqrt{3} + ac^2 + cb^2 + ba^2.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2.$$

Lời giải (dựa theo cách giải của bạn Nguyễn Tấn Nguyên Chương, lớp 11T1, trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên).

Ta có:

$$\begin{aligned} ab^2 + bc^2 + ca^2 &= 6\sqrt{3} + ac^2 + cb^2 + ba^2 \\ \Leftrightarrow ab(b-a) - c(b^2 - a^2) + c^2(b-a) &= 6\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow (b-a)(ab - ac - bc + c^2) &= 6\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow (b-a)(a(b-c) - c(b-c)) &= 6\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a) &= 6\sqrt{3}. \quad (*) \end{aligned}$$

Do tính đối xứng vòng quanh của hệ thức (*) và của biểu thức P , đối với a, b, c , nên không mất tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$.

Khi đó, $a \geq b$; suy ra $a - b \geq 0$. Do đó, từ

(*), bằng cách áp dụng bất đẳng thức

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

cho $x = b - c$ và $y = c - a$, ta có:

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3} &\leq (a-b) \frac{((b-c) + (c-a))^2}{4} \\ &= \frac{(a-b)^3}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra, $a - b \geq 2\sqrt{3}$; vì vậy, với lưu ý

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

ta có:

$$\begin{aligned} P &= a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + (-b)^2 \geq \frac{(a-b)^2}{2} \\ &\geq \frac{(2\sqrt{3})^2}{2} = 6. \end{aligned}$$

Hơn nữa, bằng kiểm tra trực tiếp, dễ thấy $a = \sqrt{3}, b = -\sqrt{3}, c = 0$ thỏa mãn ràng buộc của đề bài, và tại các giá trị đó của a, b, c , ta có $P = 6$.

Vì thế, giá trị nhỏ nhất của P bằng 6.

Bình luận và Nhận xét

1. Các giá trị của a, b, c , mà tại đó $P = 6$, được tìm ra từ việc xét khả năng xảy ra dấu “=” ở các bất đẳng thức đã được sử dụng trong quá trình giải.

2. Lời giải trên cho thấy, bài đã ra là một bài toán không khó, và rất phù hợp cho việc bồi dưỡng học sinh khá, giỏi Toán lớp cuối cấp THCS.

3. Trong số các lời giải Tập chí nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải không đúng, do người giải bài đã quan niệm sai rằng, “ a, b, c có vai trò như nhau; do đó, không mất tính tổng quát, có thể giả sử $c \geq b \geq a$ ”.

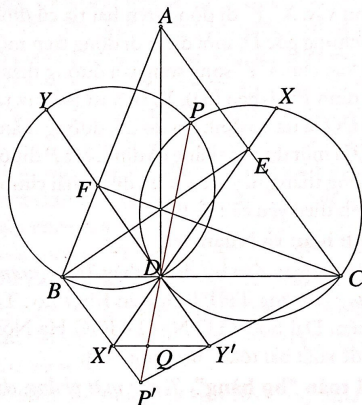
(Lưu ý: Vì hệ thức thể hiện rằng buộc đối với a, b, c , trong đề bài, là một hệ thức chỉ đối xứng vòng quanh đối với a, b, c , nên vai trò của a, b, c trong bài toán không như nhau!)

Võ Quốc Bá Cẩn

P788. (Mức A) Cho tam giác nhọn ABC , có AD, BE, CF là các đường cao. X là một điểm di động trên tia DE , và Y là một điểm di động trên tia DF , sao cho X, Y không trùng D , và $DX = DY$. Giả sử các đường tròn (CDX) và (BDY) cắt nhau tại điểm thứ hai P , khác D . Chứng minh rằng, điểm P di động trên một đường thẳng cố định.

((XYZ) ký hiệu đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z .)

Lời giải (dựa theo tất cả lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc).



Do D, E, F , tương ứng, là chân các đường cao hạ từ A, B, C của tam giác nhọn ABC nên DA là phân giác trong của $\angle EDF$. (1)

Xét phép nghịch đảo f cực D , phương tích $\overline{DB} \cdot \overline{DC}$. Ta có:

$$f : B \mapsto C, C \mapsto B.$$

Gọi X', Y', P' tương ứng, là ảnh của X, Y, P qua f .

Khi đó

$$\overline{DX} \cdot \overline{DX'} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DY} \cdot \overline{DY'}$$

mà $DX = DY$ (giả thiết), nên suy ra, $DX' = DY'$. Do đó, $X'DY'$ là tam giác cân tại D . (2)

Từ (1) và (2), với lưu ý $\angle XDY$ và $\angle X'DY'$ là hai góc đối đỉnh, suy ra AD là đường trung

trực của $X'Y'$. Vì thế, $X'Y' \parallel BC$. (3)

Do đi qua cực nghịch đảo, nên ảnh của các đường tròn (BDY) và (CDX) qua f , tương ứng, là các đường thẳng CY' và BX' . Vì thế, từ P là giao điểm của (BDY) và (CDX) (giả thiết), suy ra, P' là giao điểm của CY' và BX' . Do đó, gọi Q là giao điểm của PD và $X'Y'$, từ (3), theo định lý Thales, ta có:

$$\frac{QX'}{QY'} = \frac{DB}{DC} = \text{const.} \quad (4)$$

Do D, E, F cố định nên các tia đối của các tia DE, DF là các tia cố định.

Như vậy, X', Y' di động trên hai tia cố định có chung gốc D , mỗi điểm di động trên một tia, sao cho $X'Y'$ song song với đường thẳng cố định BC (theo (3)). Vì thế, từ (4) suy ra, tia DQ là tia cố định, và do đó, đường thẳng DQ là một đường thẳng cố định. Mà P thuộc đường thẳng này, nên ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Liên quan đến bài đã ra, thầy *Trần Quang Hùng* (trưởng THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, Đại học KHTN – ĐHQG Hà Nội) đã đề xuất bài toán “họ hàng” sau:

Bài toán “họ hàng”. Trong mặt phẳng, cho đoạn thẳng AB và một điểm O nằm trong đoạn thẳng đó. Trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB , vẽ hai tia Ox, Oy , sao cho $\angle AOx$ và $\angle BOy$ là hai góc nhọn bằng nhau. Xét điểm M di động trên tia Ox và điểm N di động trên tia Oy , sao cho $OM = ON$. Chứng minh rằng, giao điểm thứ hai, khác O , của hai đường tròn, (AOM) và (BON), di động trên một đường thẳng cố định.

Mời các bạn có quan tâm cùng thử sức với bài toán trên.

2. Tất cả các lời giải Tập chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

P789. (Mức A) Trong mặt phẳng tọa độ, xét 100 điểm có tọa độ nguyên, sao cho khoảng

cách giữa hai điểm bất kỳ là một số tự nhiên. Hỏi có ít nhất bao nhiêu khoảng cách là số chẵn?

Lời giải (dựa theo ý giải của một bạn học sinh cấp THPT).

Ta biết rằng, trong Toán học, điểm thuộc mặt phẳng tọa độ, mà có cả hai tọa độ đều là số nguyên, được gọi là *điểm nguyên*.

Ta có Nhận xét sau:

Nhận xét. Cho $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ là hai điểm nguyên trong mặt phẳng tọa độ, sao cho độ dài AB là một số tự nhiên. Khi đó, độ dài AB là một số chẵn khi và chỉ khi

$$x_A + y_A \equiv x_B + y_B \pmod{2}.$$

Chứng minh.

Do $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ là các điểm nguyên và độ dài AB là một số tự nhiên, nên

Độ dài AB là số chẵn

$$\Leftrightarrow (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\Leftrightarrow (x_A - x_B)^2 \equiv (y_A - y_B)^2 \pmod{2}$$

$$\Leftrightarrow x_A - x_B \equiv y_A - y_B \pmod{2}$$

$$\Leftrightarrow x_A + y_A \equiv x_B + y_B \pmod{2}.$$

Nhận xét được chứng minh.

Trả lại bài toán.

Giả sử $A_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 100}$, là 100 điểm nguyên, thỏa mãn điều kiện đề bài.

Gọi S là tập hợp gồm tất cả các điểm $A_i(x_i, y_i)$, mà $x_i + y_i \equiv 0 \pmod{2}$; và gọi T là tập hợp gồm tất cả các điểm $A_i(x_i, y_i)$, mà $x_i + y_i \equiv 1 \pmod{2}$.

Do phép chia một số tự nhiên cho 2 chỉ có số dư là 0 hoặc 1, nên

$$S \cap T = \emptyset \text{ và } S \cup T = \{A_i, i = \overline{1, 100}\}.$$

Do đó, $|S| + |T| = 100$. (1)

Theo Nhận xét, khoảng cách giữa hai điểm phân biệt tùy ý, trong số 100 điểm nói trên, là một số chẵn khi và chỉ khi hai điểm đó thuộc cùng một tập hợp, trong hai tập S, T . Do đó, gọi n là số khoảng cách giữa hai điểm phân biệt trong số 100 điểm đó, mà mỗi khoảng

cách là một số chẵn, ta có:

$$\begin{aligned} n &= C_{2|S|}^2 + C_{2|T|}^2 = C_{2|S|}^2 + C_{2(100-|S|)}^2 \text{ (do (1))} \\ &= \frac{|S| \cdot (|S| - 1)}{2} + \frac{(100 - |S|)(99 - |S|)}{2} \\ &= (|S| - 50)^2 + 2450 \geq 2450. \end{aligned} \quad (2)$$

Xét 100 điểm $X_i (0, i), i = \overline{1, 100}$, nằm trong một mặt phẳng tọa độ.

Vì $0, 1, 2, \dots, 100$ là các số nguyên, và khoảng cách giữa hai điểm phân biệt tùy ý X_m, X_k bằng $|m - k|$ là một số tự nhiên, nên $X_i, i = \overline{1, 100}$, là 100 điểm thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Do khoảng cách giữa hai điểm phân biệt X_m, X_k bằng $|m - k|$ nên khoảng cách đó là một số chẵn khi và chỉ khi m và k có cùng tính chẵn lẻ.

Vì vậy, số khoảng cách giữa hai điểm phân biệt, trong 100 điểm $X_i, i = \overline{1, 100}$, mà mỗi khoảng cách là một số chẵn chính bằng số 2-tập con (tức, tập con có hai phần tử) của tập $\{1; 2; \dots; 100\}$, mà cả hai phần tử của mỗi tập con có cùng tính chẵn lẻ. (3)

Do trong 100 số nguyên dương đầu tiên có đúng 50 số chẵn và đúng 50 số lẻ, nên số 2-tập con của tập $\{1; 2; \dots; 100\}$, mà cả hai phần tử của mỗi tập con có cùng tính chẵn lẻ, bằng

$$C_{50}^2 + C_{50}^2 = 2 \cdot \frac{49 \cdot 50}{2} = 2450.$$

Do đó, theo (3), có tất cả 2450 khoảng cách

giữa hai điểm phân biệt, trong 100 điểm $X_i, i = \overline{1, 100}$, mà mỗi khoảng cách là một số chẵn. (4)

Từ (2) và (4) suy ra, với 100 điểm tùy ý, thỏa mãn các điều kiện của đề bài, trong số các khoảng cách giữa hai điểm phân biệt (trong chúng), có ít nhất 2450 khoảng cách là số chẵn.

Bình luận và Nhận xét

1. Cách tiếp cận để tìm lời giải cho bài đã ra, được thể hiện ở Lời giải trên, là một cách tiếp cận rất tự nhiên. Các thông tin cần khám phá, theo cách tiếp cận này, đều là các thông tin dễ thấy, nhờ các suy luận logic tự nhiên, đơn giản. Vì thế, có thể nói, bài đã ra là một bài toán nhẹ nhàng, và rất hữu ích cho việc hình thành, củng cố, rèn luyện tư duy logic.

2. Rất tiếc, ở lời giải của bạn học sinh được nhắc tới ở phần Lời giải, không có bất cứ một chứng minh nào, hay một lời giải thích nào, cho các khẳng định mang tính then chốt được nêu ra. Vì thế, lời giải của bạn học sinh này chưa phải là một lời giải cho bài toán; đó mới chỉ là một “dàn ý”, thể hiện những điều cần chứng minh, cần trình bày trong lời giải của bài toán.

3. Cho tới thời điểm bàn thảo vào Nhà in, ngoài lời giải vừa nêu trên, Tập chí vẫn chưa nhận được thêm một lời giải nào khác, từ bạn đọc.

Nguyễn Khắc Minh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI ĐÚNG

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải đúng.

KHOÍ THCS

- Trường THCS Nguyễn Thái Bình, Tp. Cà Mau, tỉnh Cà Mau: Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình (lớp 9C; P781, P782).
- Trường THCS Lê Văn Thiêm, Tp. Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh: Nguyễn Thị Ánh Ngọc

(lớp 6A3; P781).

- Trường THCS Ngô Quyền, Tp. Hải Phòng: Bùi Hoàng Nam (lớp 9A10; P785).
- Trường THCS Lê Hồng Phong, huyện Hưng Nguyên, tỉnh Nghệ An: Trịnh Bá Hiếu (lớp 9A; P783).
- Trường THCS Nguyễn Quang Bích, huyện Tam Nông, tỉnh Phú Thọ: Nguyễn Thanh Mai (lớp 7A; P781, P782).

- Trường **THCS Nguyễn Nghiêm**, Tp. Quảng Ngãi, tỉnh Quảng Ngãi: *Ngô Trường Phúc* (lớp 7B1; P781).
- Trường **THCS Nhữ Bá Sỹ**, huyện Hoàng Hóa, tỉnh Thanh Hóa: *Nguyễn Bảo Khánh* (lớp 9C; P781, P782, P783, P784, P785, P787).

KHOI THPT

- Trường **THPT chuyên Hùng Vương**, tỉnh Bình Dương: *Trần Khánh Hưng* (lớp 10T1; P781, P784, P785).
- Trường **THPT chuyên Quang Trung**, tỉnh Bình Phước: *Đỗ Việt Hoàng Long* (lớp 11A; P783, P784, P785, P788).
- Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Phạm Tiến Đạt* (lớp 10T1; P782), *Huỳnh Phúc Vĩnh Nguyên* (lớp 10T1; P781), *Đỗ Duy Quang* (lớp 12T1; P781, P782, P783), *Trần Thị Phương Thảo* (lớp 10T1; P781), *Huỳnh Ngọc Anh Thư*

(lớp 10T2; P781).

- Trường **THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam**, Tp. Hà Nội: *An Tuấn Kiệt* (lớp 11 Toán 2; P781, P782, P785), *Tạ Minh Tuấn* (lớp 11T2; P783).
- Trường **THPT chuyên Lương Văn Chánh**, tỉnh Phú Yên: *Nguyễn Tấn Nguyên Chương* (lớp 11T1; P787, P788), *Huỳnh Trần Gia Huy* (lớp 10 Toán 1; P787).
- Trường **THPT chuyên Quốc học Huế**, tỉnh Thừa Thiên – Huế: *Nguyễn Anh Minh* (lớp 10 Toán 1; P783).
- Trường **THPT chuyên Vĩnh Phúc**, tỉnh Vĩnh Phúc: *Trương Anh Dũng* (lớp 10A1; P781, P785).
- Trường **THPT chuyên Tự nhiên**, ĐH Khoa học Tự nhiên – ĐHQG Hà Nội: *Vương Khánh Toàn* (lớp 11A1 Toán; P781, P782, P784, P785).

Vocabulary

Conclusion: (d.t) kết luận.

Decimal: (t.t) thập phân, thuộc về hệ thập phân.

Difference: (d.t) sai khác, hiệu số.

Digit: (d.t) chữ số.

Distinct: (t.t) phân biệt.

Equation: (d.t) phương trình.

Expression: (d.t) biểu thức.

Even: (t.t) chẵn.

Integer: (d.t) số nguyên.

Negative: (t.t) âm.

Pair: (d.t) cặp.

Periodic: (t.t) tuần hoàn.

Positive: (t.t) dương.

Remainder: (d.t) số dư.

Solution: (d.t) nghiệm, lời giải.

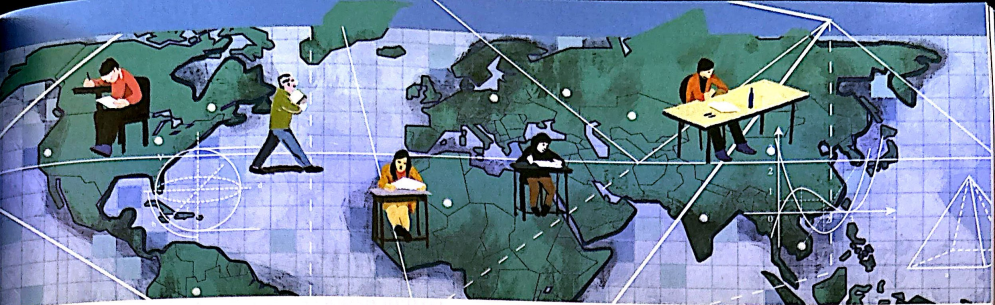
Sequence: (d.t) dãy số.

Square: (d.t) số chính phương,

perfect square: số chính phương.

Sum: (d.t) tổng.

Value: (d.t) giá trị.



GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải các bài toán trong kỳ thi Olympic toán học trẻ của Hàn Quốc năm 2023 đăng trong số báo 3/2024.



OC64. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$y^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

Lời giải. Chúng ta có thể phân tích $y^2 = (x+1)(x^2+x+1)$ và do $x^2+x+1 > 0$ nên ta suy ra $x+1 \geq 0$. Với $x = -1$ ta có $y = 0$ và cặp $(-1, 0)$ thỏa mãn đầu bài.

Xét trường hợp $x \geq 0$. Do $\gcd(x+1, x^2+x+1) = \gcd(x+1, x^2) = 1$, chúng ta suy ra $x+1 = a^2$ và $x^2+x+1 = b^2$ trong đó a, b là các số nguyên tố cùng nhau. Ta có thể kẹp $x^2 < x^2+x+1 = b^2 \leq (x+1)^2$, do đó $x^2+x+1 = (x+1)^2$. Như vậy $x = 0$ và $y = \pm 1$.

Tóm lại ta có 3 cặp (x, y) thỏa mãn đầu bài là $(-1, 0)$, $(0, -1)$ và $(0, 1)$.

OC65. Cho n ($n \geq 5$) là một số nguyên dương. Có n viên đá trắng và n viên đá đen (tổng cộng $2n$ viên) xếp thành một hàng trong đó n viên đầu tiên có màu trắng và n viên tiếp theo có màu đen.



Ta có thể thực hiện thao tác sau: chọn một số nguyên dương bất kỳ k ($k \leq 2n-5$) và đổi chỗ viên đá ở vị trí thứ k với viên đá ở vị trí thứ $(k+5)$.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho chúng ta có thể làm cho n viên đá đầu tiên có màu đen và n viên đá tiếp theo có màu trắng sau một số hữu hạn lần thao tác.

Lời giải. Với n chia hết cho 5 ta sẽ chứng minh có thể đổi về cấu hình sau cùng với n viên đá đầu tiên có màu đen và n viên đá tiếp theo có màu trắng như trong đầu bài. Xét dãy các viên ở vị trí cách nhau 5 đơn vị: $1, 6, \dots, n+1$, ta có thể đổi từng cặp liên tiếp từ phải qua trái để đưa viên đen ở vị trí $n+1$ về đầu.

Làm tương tự với tất cả các dãy các viên đá ở vị trí $k, k+5, \dots, k+n$ với k lần lượt bằng $2, 3, \dots, n$. ta thu được cấu hình như yêu cầu trong đầu bài.

Với n không chia hết cho 5, ta sẽ chứng minh rằng không thể đổi về cấu hình sau cùng như trong bài. Nhận xét rằng do ta chỉ đổi 2 viên ở vị trí đồng dư modulo 5 nên, với mỗi i , số

lượng viên trắng và đen ở các vị trí đồng dư i modulo 5 là bất biến.

Trường hợp 1: $n = 5m + r, 1 \leq r \leq 2$. Ta thấy ban đầu ở các vị trí đồng dư 1 modulo 5 có $m + 1$ viên trắng và m viên đen. Trong cấu hình sau cùng, ở các vị trí này có m viên trắng và $m + 1$ viên đen. Như vậy không thể đưa về được cấu hình như yêu cầu trong bài.

Trường hợp 2: $n = 5m + r, 3 \leq r \leq 4$. Ta thấy ban đầu ở các vị trí đồng dư 0 modulo 5 có m viên trắng và $m + 1$ viên đen. Trong cấu hình sau cùng, ở các vị trí này có m viên đen và $m + 1$ viên trắng. Như vậy không thể đưa về được cấu hình như yêu cầu trong bài.

Tóm lại, ta có thể làm cho n viên đá đầu tiên có màu đen và n viên đá tiếp theo có màu trắng khi và chỉ khi n chia hết cho 5.

OC66. Có 2023 tay vợt tham gia một giải đấu quần vợt theo thể thức vòng tròn, hai tay vợt bất kỳ đấu với nhau đúng một trận. Biết rằng không có trận hòa và không có tay vợt nào thắng tất cả các tay vợt khác. Ta gọi tay vợt A là “có kỹ năng” nếu với mỗi tay vợt B thắng A , có một tay vợt C thắng B và thua A .

Biết rằng có đúng N ($N \geq 0$) tay vợt “có kỹ năng”. Tìm giá trị nhỏ nhất của N .

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của N bằng 3. Trước tiên ta chỉ ra rằng luôn tìm được ít nhất 3 người “có kỹ năng”. Thật vậy, ta chọn ra một người, gọi là A , có số trận thắng nhiều nhất trong số 2023 tay vợt (Có thể có nhiều người như vậy). Đặt X là tập hợp các tay vợt thắng A , theo giả thiết $X \neq \emptyset$. Xét riêng tập X và các trận đấu giữa các tay vợt trong X , ta chọn ra một tay vợt $B \in X$ có số trận thắng nhiều nhất. Rõ ràng là $B \neq A$. Tiếp tục như vậy một lần nữa, ta đặt Y là tập hợp các tay vợt thắng B , theo giả thiết $Y \neq \emptyset$. Xét riêng tập Y và các trận đấu giữa các tay vợt trong Y , ta lại chọn ra một tay vợt $C \in Y$ có số trận thắng nhiều nhất. Rõ ràng C khác với A, B .

Giả sử D là một tay vợt bất kỳ thắng A . Khi đó

D phải thua một tay vợt nào đó đã thua A , vì nếu trái lại thì số trận thắng của D nhiều hơn số trận thắng của A , mâu thuẫn. Như vậy A “có kỹ năng”.

Giả sử D là một tay vợt bất kỳ thắng B , nếu D thua A thì ta có B thắng A và A thắng D . Nếu D thắng A thì $D \in X$. Do D thắng B nên phải có một người $E \in X$ mà B thắng E và D thua E vì nếu trái lại thì số trận thắng của D trong X nhiều hơn số trận thắng của B , điều này mâu thuẫn với cách chọn B . Như vậy B “có kỹ năng”.

Lý luận tương tự, giả sử D là một tay vợt bất kỳ thắng C , nếu D thua B thì ta có C thắng B và B thắng D . Nếu D thắng B thì $D \in Y$. Do D thắng C nên phải có một người $E \in Y$ mà C thắng E và D thua E vì nếu trái lại thì số trận thắng của D trong Y nhiều hơn số trận thắng của C , điều này mâu thuẫn với cách chọn C . Như vậy C cũng “có kỹ năng”.

Ta có thể chỉ ra ví dụ $N = 3$ như sau. Cho 3 tay vợt đầu tiên A thắng B , B thắng C và C thắng A . Tất cả 2020 tay vợt còn lại $D_1, \dots, D_{2020}$ đều thua cả A, B, C . Các trận đấu khác có kết quả tùy ý. Như vậy chỉ có đúng 3 tay vợt “có kỹ năng” là A, B và C .

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc một số bài toán chọn lọc trong kỳ thi toán Sao chổi Tím (Purple Comet) cấp THCS năm 2024. Đây là một cuộc thi toán học đồng đội quốc tế được tổ chức trực tuyến hằng năm với hai cấp độ THCS và THPT. Các đội từ một đến sáu học sinh thi đấu bằng cách gửi lời giải cho các bài toán. Đề thi cấp THCS gồm 20 bài toán được hoàn thành trong 60 phút còn đề thi cấp THPT bao gồm 30 bài toán được hoàn thành trong 90 phút.

OC73. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 20$ và $AD = 19$. Điểm E nằm trên cạnh AD với $AE = 4$. Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác CDE tiếp xúc với CE tại F . Đường tròn tiếp xúc với AB, BC và đồng thời tiếp xúc

với CE tại G . Khoảng cách FG có thể viết được dưới dạng $\frac{m}{n}$, trong đó m và n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tìm $m+n$.

OC74. Tìm số cặp có thứ tự (A, B) gồm 2 tập hợp $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ thỏa mãn số phần tử của tập A cộng với số phần tử của tập hợp B là chẵn.

OC75. Một đường ống dài 25 mét nối hai hồ chứa được tạo thành từ các đoạn 2 mét

và 3 mét xen kẽ nhau: 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3. Giả sử ba trong số mười đoạn này được chọn ngẫu nhiên và bỏ ra khỏi đường ống. Khi đó có các số nguyên dương m và n nguyên tố cùng nhau, sao cho $\frac{m}{n}$ là xác suất để ba đoạn đó có thể được lắp lại vào đường ống sao cho không có đoạn nào trong ba đoạn được lắp vào vị trí ban đầu và không có đoạn nào trong số bảy đoạn ống còn lại phải di chuyển. Các đoạn 2 mét và 3 mét không nhất thiết phải xếp xen kẽ trong cách bố trí mới. Tìm $m+n$.

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Các điều tra viên chuyên cần

Do không có ai tham gia họp ba ngày liên tiếp, nên số ngày tối đa mà mỗi người có thể tham gia họp là 4 ngày. Hơn nữa một người có thể tham gia 4 buổi họp nếu anh ta chỉ vắng mặt mỗi buổi thứ Tư. Do không ai có thể vắng hai ngày liên tiếp, nên mỗi người phải tham gia ít nhất 2 buổi họp. Hơn nữa một người tham gia được đúng 2 buổi họp, nếu các buổi họp đó rơi vào thứ Ba và thứ Năm. Ông Đông vắng mặt nhiều hơn ông Bửu 2 ngày. Điều này có nghĩa là ông Đông tham gia đúng 2 buổi họp (chúng phải rơi đúng vào thứ Ba và thứ Năm), còn ông Bửu tham gia đúng 4 buổi họp (vào đúng các ngày thứ Hai, thứ Ba, thứ Năm và thứ Sáu). Ta điền các thông tin nhận được này vào bảng sau đây, và cũng chỉ rõ ông Chất có tham gia vào ngày thứ Hai.

	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Anh					
Bửu	+	+	-	+	+
Chất					
Duy					
Đông	-	+	-	+	-

Trong ngày thứ Tư đã có hai người vắng mặt là Bửu và Đông, suy ra tất cả các điều tra viên còn lại đều có mặt buổi thứ Tư.

	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Anh			+		
Bửu	+	+	-	+	+
Chất			+		
Duy			+		
Đông	-	+	-	+	-

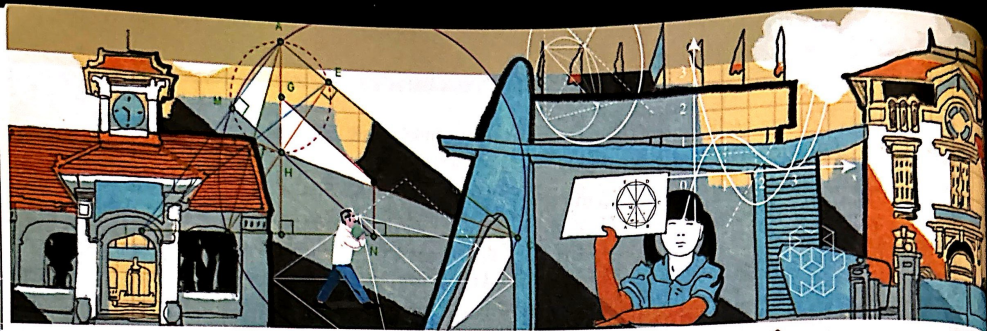
Chỉ có một ngày duy nhất mà ông Anh và ông Chất cùng tham gia, đó là vào thứ Tư. Do ông Chất có tham gia buổi thứ Hai, suy ra ông Anh không tham gia buổi họp thứ Hai. Khi đó ông Anh có tham gia buổi thứ Ba (do không thể vắng mặt hai ngày liên) và không tham gia buổi thứ Năm (vì không có ai tham gia 3 buổi họp liên nhau).

	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Anh	-	+	+	-	
Bửu	+	+	-	+	+
Chất	+		+		
Duy			+		
Đông	-	+	-	+	-

Ông Duy phải đến vào ngày thứ Hai, để có ba người tham gia. Hơn nữa, vào ngày thứ Ba đã có ba người tham gia, nên ông Chất và ông Đông đều vắng mặt buổi thứ Ba.

	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Anh	-	+	+	-	
Bửu	+	+	-	+	+
Chất	+	-	+		
Duy	+	-	+		
Đông	-	+	-	+	-

(Xem tiếp trang 44.)

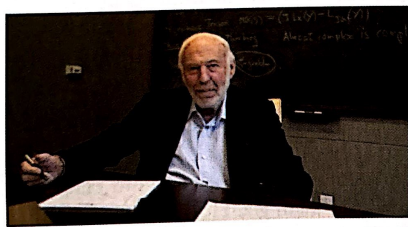


JIM SIMONS: THIÊN TÀI TOÁN HỌC, TỶ PHÚ VÀ NHÀ HẢO TÂM

NGUYỄN MẠNH TOÀN¹

Giới thiệu

Tỷ phú Jim Simons đã qua đời vào ngày 10 tháng 5 năm 2024 vừa qua. Không chỉ là một nhà toán học hàng đầu, ông còn được biết tới như một trong những người quản lý quỹ thành công nhất mọi thời đại và là một trong những nhà từ thiện hào phóng nhất nước Mỹ. Vào thời điểm qua đời, với giá trị sản ròng ước tính khoảng 31,4 tỷ USD Simons xếp thứ 51 trong danh sách những người giàu nhất thế giới. Cuộc đời và sự nghiệp của ông không chỉ là sự đột phá vượt qua những giới hạn, mà còn là cả niềm tin không ngừng vào sức mạnh của con số và thuật toán.



Jim Simons (1938 – 2024).

1. Niềm đam mê với các con số

James Harris Simons (thích được gọi là Jim) sinh ngày 25 tháng 4 năm 1938 tại vùng ngoại ô Brookline của Boston và là con duy nhất trong một gia đình người Mỹ gốc Do

Thái. Ngay từ nhỏ, Simons đã bộc lộ năng khiếu và niềm yêu thích với toán học. Khi lên ba, cậu bé Jim đã tự nhàn rỗi chia đôi các con số và tìm ra lũy thừa của các số từ 2 tới 1024. Khi Jim bốn tuổi, trong một lần đi biển thì gia đình cậu phải dừng lại để đổ xăng. Điều này khiến cậu vô cùng bối rối vì theo suy luận của Jim thì chiếc xe của gia đình sẽ không bao giờ có thể hết xăng được, vì sau khi dùng hết một nửa bình xăng thì sẽ còn nửa còn lại, tiếp tới là nửa của số đó và cứ thế không bao giờ cạn. Như vậy một cách tình cờ, Jim đã phát hiện ra nghịch lý Zeno, một bài toán kinh điển với mức độ logic cao được nhà triết học Hy Lạp Zeno của xứ Elea đề cập tới vào khoảng thế kỷ thứ 5 trước Công nguyên. Nghịch lý Zeno đã thách thức các nhà toán học trong nhiều thế kỷ.

Năm 1958, Simons nhận bằng cử nhân toán học tại Viện Công nghệ Massachusetts (MIT). Năm 1961 ở tuổi 23 ông nhận bằng tiến sĩ toán học tại Đại học California tại Berkeley dưới sự giám sát của Giáo sư Bertram Kostant. Luận án tiến sĩ của Simons đưa ra một chứng minh mới về cách phân loại của Berger đối với các nhóm chính thể của đa tạp Riemann. Sau khi nhận bằng tiến sĩ, Simons giảng dạy tại MIT và Đại học Harvard.

¹ Đại học Osnabrueck, CHLB Đức

Năm 1964, Simons chuyển đến Princeton, New Jersey để nhận một công việc danh giá được trả lương cao tại Viện Phân tích Quốc phòng (IDA), một tổ chức nghiên cứu phi lợi nhuận thuê các nhà toán học để hỗ trợ Cơ quan An ninh Quốc gia Hoa Kỳ trong việc giải mã các mã và mật mã được Liên Xô sử dụng. Công việc này đã cho Simons thấy những khả năng trong việc tạo ra các thuật toán cho máy tính. Do các nhân viên của IDA được phép dành một nửa thời gian cho công việc cá nhân nên Simons dành một phần thời gian của mình để dự đoán những biến động ngắn hạn trên thị trường chứng khoán. Simons đã làm việc ở đây hơn ba năm trước khi mất việc vì công khai chỉ trích chủ tịch IDA – tướng lục quân Maxwell D. Taylor – về cuộc chiến ở Việt Nam.

Tuy nhiên, việc bị sa thải không phải là một bước lùi. Simons nhanh chóng nhận được lời đề nghị làm trưởng khoa toán tại Stony Brook – một đại học tương đối mới nằm trong hệ thống Đại học Bang New York. Ở đó, ông đã thu hút được các nhà toán học tài năng và tạo dựng được danh tiếng nổi bật cho khoa.



Trung tâm Simons cho Hình học và Vật lý tại Đại học Stony Brook.

Trong khoảng thời gian làm việc tại Stony Brook, Simons bắt đầu cộng tác với nhà toán học Shiing-Shen Chern. Cùng với nhau, Simons và Chern đã xuất bản một bài báo vào năm 1974 có tựa đề “Các dạng đặc trưng

và bất biến hình học”, qua đó giới thiệu các đặc trưng hình học của các đa tạp 3 chiều, sau này được gọi là bất biến Chern-Simons. Lúc đó cả hai đều không biết rằng công trình của họ sẽ đóng một vai trò quan trọng không chỉ trong toán học mà còn trong lý thuyết trường lượng tử, lý thuyết dây và vật lý vật chất ngưng tụ. Với những đóng góp cho toán học, bao gồm cả việc phát hiện ra bất biến Chern-Simons, Simons đã được Hiệp hội Toán học Hoa Kỳ (AMS) trao Giải thưởng Oswald Veblen, giải thưởng cao quý nhất trong lĩnh vực hình học, vào năm 1976.

2. Cách mạng hóa tài chính

Simons luôn quan tâm đến lĩnh vực kinh doanh, đặc biệt là tài chính. Trong quãng thời gian làm việc tại Đại học Berkeley cũng như sau đó, ông giao dịch cổ phiếu, đầu tư vào các hợp đồng tương lai (futures contract) và không ngừng tìm kiếm cơ hội đầu tư.

Năm 1978, ở tuổi 40 khi đang trên đỉnh cao của khoa học, Simons rời Đại học Stony Brook để thành lập Monometrics, một công ty quản lý quỹ phòng hộ (hedge fund) có trụ sở ở East Setauket, một khu yên tĩnh thuộc Long Island và nằm rất gần Đại học Stony Brook. Đến năm 1982, Monometrics đổi tên thành Renaissance Technologies.

Simons dần nhận ra rằng có thể tạo ra các mô hình toán học cho dữ liệu mà ông thu thập được nhằm dự đoán sự thay đổi giá. Bởi vậy, ông từ bỏ các công việc thông thường của người quản lý tiền và thay vào đó chủ yếu tập trung vào phân tích định lượng. Simons tìm đến một người bạn cũ và cũng là người phá mật mã từ IDA là Leonard Baum², người có các mô hình toán học có thể được sử dụng để giao dịch tiền tệ. Simons cũng mời James Ax, đồng nghiệp cũ tại Stony Brook³, để giám sát công việc của Baum.

Ax nhận ra rằng các mô hình mà Baum đã viết ra không chỉ hoạt động với các loại tiền

²Nhà toán học người Mỹ, nổi tiếng với thuật toán Baum-Welch và chuỗi Baum-Sweet.

tệ mà mà còn cho bất kỳ hàng hóa tương lai nào. Bởi vậy, Simons đã thiết lập tài khoản giao dịch cho riêng Ax, Axcorn Ltd. Tài khoản này cuối cùng đã dẫn đến sự ra đời của Medallion⁴, một quỹ phòng hộ của Renaissance, vào năm 1988.

Sau hai năm đầu tiên với nhiều xáo trộn thì đến năm 1990, Medallion tập trung hoàn toàn vào giao dịch ngắn hạn và đạt mức lợi nhuận 56% sau khi trừ các chi phí. Từ đó đến nay hiệu suất này không hề có dấu hiệu chậm lại. Tính trung bình từ năm 1988 đến 2023, Medallion đã tạo ra mức lợi nhuận hàng năm là gần 40% sau khi đã trừ đi những khoản phí khổng lồ. Với hiệu suất đáng kinh ngạc này thì 1000 USD đầu tư vào quỹ từ năm 1988 sẽ tăng lên khoảng 27 triệu USD vào cuối năm 2018, vượt xa mức lợi nhuận 107.000 USD từ Berkshire Hathaway của tỷ phú Warren Buffett⁵ hay tổng lợi nhuận 20.000 USD từ chỉ số chuẩn S&P500. Điều này giúp Simons và không dưới ba đồng nghiệp trở thành tỷ phú, còn Medallion được xem là một trong những quỹ phòng hộ thành công nhất từ trước đến nay.

Khách hàng và người trong cuộc đã trả số tiền lớn để giao phó tiền của họ cho Simons. Cuối cùng, ông đã tăng phí lên 5% tài sản và 44% lợi nhuận, thuộc hàng cao nhất trong ngành. Bởi vì ông tin rằng các thuật toán mà công ty sử dụng để giao dịch cổ phiếu, trái phiếu và hàng hóa sẽ không còn hoạt động nếu Medallion phát triển quá lớn. Do đó ông sớm bắt đầu hạn chế quyền truy cập vào quỹ.

Năm 1993, Simons ngừng nhận tiền mới từ khách hàng của Medallion. Năm 2005, ông loại trừ hoàn toàn người ngoài và chỉ cho phép nhân viên của mình đầu tư. Simons phân phối lợi nhuận hàng năm và giới hạn quy mô quỹ ở mức khoảng 10 tỷ USD.

Returns Comparison

Investor	Key Fund/Vehicle	Period	Annualized Returns*
Jim Simons	Medallion Fund	1988-2018	39.1%
George Soros	Quantum Fund	1969-2000	32%*
Steven Cohen	SAC	1992-2003	30%
Peter Lynch	Magellan Fund	1977-1990	29%
Warren Buffett	Berkshire Hathaway	1965-2018	20.5%*
Ray Dalio	Pure Alpha	1991-2018	12%

(Source: For Simons, Dalio, Cohen, Soros: reporting; for Buffett: Berkshire Hathaway annual report; for Lynch: Fidelity Investments.)

So sánh về lợi nhuận hàng năm giữa các quỹ và nhà quản lý.

Một điều thú vị là dù trụ sở của Renaissance Technologies chỉ cách Manhattan khoảng 100 km, Simons tránh tuyển dụng những cựu binh ở Phố Wall⁶, những người có nền tảng tài chính. Thay vào đó, ông tìm kiếm các nhà toán học, vật lý, thống kê hay các chuyên gia xử lý tín hiệu, những người có thể tìm thấy thông tin đầu tư hữu ích trong hàng Terabyte dữ liệu mà công ty ông tiếp thu hàng ngày về mọi thứ, từ vết đen mặt trời đến thời tiết ở nước ngoài. Trong số khoảng 300 nhân viên của Renaissance thì có khoảng 90 người đã có bằng tiến sĩ. Theo Isadore Singer, Giáo sư Toán học tại MIT và Berkeley – giải thưởng Abel 2004, thì văn phòng East Setauket của Renaissance là khoa vật lý và toán học tốt nhất thế giới. Lợi nhuận vượt trội của Medallion đã giúp tất cả các nhân

³ Là một nhà đại số và lý thuyết số nổi tiếng người Mỹ. Ông được trao Cole Prize, giải thưởng danh giá giành cho những đóng góp nổi bật trong lĩnh vực đại số.

⁴ Medallion là Huy chương. Tên gọi này được lấy cảm hứng từ việc cả hai người sáng lập quỹ đều giành các giải thưởng: giải Cole của Ax và giải Oswald Veblen của Simons.

⁵ Được xem là một trong những nhà đầu tư vĩ đại nhất mọi thời đại, Warren Buffett nằm trong danh sách những người giàu nhất thế giới với tổng giá trị tài sản trị giá 139 tỷ USD.

⁶ Một con phố ở Khu Tài chính của Manhattan ở New York, là nơi đặt trụ sở của Sở giao dịch chứng khoán New York, sàn giao dịch chứng khoán lớn nhất thế giới tính theo tổng vốn hóa thị trường, Ngân hàng Dự trữ Liên bang New York cũng như nhiều ngân hàng thương mại và công ty bảo hiểm. Tác động kinh tế trực tiếp của các hoạt động ở Phố Wall mở rộng trên toàn thế giới. Thuật ngữ "Phố Wall" đã trở thành ẩn dụ cho thị trường tài chính của Hoa Kỳ nói chung.

viên làm việc tại Renaissance trở thành triệu phú – với tài sản ít nhất 1 triệu USD để đầu tư, trong số đó khoảng 100 người có tài sản đầu tư giá trị ít nhất 5 triệu USD

Kỹ thuật của Simons thành công đến mức ông được mệnh danh là “Vua định lượng” (Quant King). Ngay cả khi sức mạnh máy tính trở nên rẻ hơn và các đối thủ cạnh tranh cố gắng bắt chước thành công của Renaissance bằng cách phát triển các thuật toán phức tạp của riêng mình để quản lý quỹ thì lợi nhuận của Medallion vẫn luôn vượt trội so với thị trường. Theodore Aronson, người sáng lập AJO Vista, một công ty đầu tư định lượng, nói với tạp chí Bloomberg Markets năm 2008: “Chỉ có một số ít người đã thực sự thay đổi cách chúng ta nhìn nhận thị trường. Warren Buffett là một trong số ít đó. Simons cũng vậy.”

Edward Witten⁷, giáo sư vật lý tại Viện Nghiên cứu Cao cấp ở Princeton, New Jersey và được nhiều đồng nghiệp của ông coi là nhà vật lý lý thuyết thành công nhất còn sống, cho biết: “Thật đáng kinh ngạc khi thấy một nhà toán học rất thành công như vậy đạt được thành công trong một lĩnh vực khác ...”

3. Những hoạt động từ thiện

Bên cạnh những thành công lớn với tư cách là nhà khoa học và cương vị nhà quản lý quỹ, Simons còn được xem là một trong những nhà hảo tâm thành công nhất trong lịch sử nước Mỹ.

Năm 1994, cùng với vợ mình là Marilyn Simons, Simons thành lập *Quỹ Simons* – một trong những tổ chức từ thiện lớn nhất Hoa Kỳ⁸ – để hỗ trợ nghiên cứu về toán học và khoa học cơ bản. Rất nhiều các học giả đã được hưởng lợi và tiếp tục được hưởng lợi từ nguồn tài trợ này. Quỹ Simons cũng là

nhà hảo tâm hàng đầu của Đại học Stony Brook, trường cũ của Marilyn và là một trong những nhà tài trợ chính cho các trường cũ của ông, Viện Công nghệ Massachusetts và Đại học Berkeley. Năm 2023, Quỹ Simons đã trao 500 triệu USD cho Đại học Stony Brook, khoản quyên góp lớn thứ hai cho một trường đại học công lập trong lịch sử Hoa Kỳ.



Marilyn và Jim Simons trao tặng 25 triệu USD cho Viện Toán IHES tại Paris vào năm 2021.

Vào tháng 1 năm 2004, Simons thành lập *Math for America*, một tổ chức phi lợi nhuận với sứ mệnh cải thiện giáo dục toán học ở các trường công lập Hoa Kỳ bằng cách tuyển dụng nhiều giáo viên có trình độ cao hơn. Trước năm 2012 ngân sách mỗi năm của tổ chức này là 20 triệu USD và từ 2013 được tăng lên 30 triệu USD mỗi năm để hỗ trợ việc mở rộng cho các giáo viên có kinh nghiệm.

Năm 2012, Quỹ Simons ra mắt *Quanta Magazine*, một ấn phẩm trực tuyến độc lập về mặt biên tập nhằm nâng cao hiểu biết của công chúng về khoa học. Tạp chí đề cập đến những bước tiến trong các lĩnh vực vật lý, toán học, sinh học và khoa học máy tính.

Trong buổi nói chuyện năm 2010 tại MIT, Simons đã chia sẻ năm nguyên tắc định hướng đã định hình cuộc đời và sự nghiệp

⁷ E. Witten là nhà vật lý duy nhất cho đến nay được trao giải thưởng Fields, giải thưởng được xem là danh giá nhất của Toán học, vào năm 1990 cho những hiểu biết sâu sắc của mình về toán học trong vật lý. Witten đã phát triển lý thuyết trường lượng tử tôpô – một khung lý thuyết kết hợp lý thuyết trường cổ điển, thuyết tương đối đặc biệt và cơ học lượng tử nhằm tính toán các bất biến tôpô – dựa trên các kết quả của Chern-Simons.

⁸ Năm 2022, quỹ Simons có tài sản trên 5 tỷ USD.

của ông trong các lĩnh vực toán học, đầu tư và từ thiện, đó là: “Làm điều gì đó mới mẻ, đừng chạy theo đám đông. Hãy để những người thông minh nhất mà bạn có thể tìm thấy vây quanh bạn. Để về đẹp dần dần. Đừng để dằn bỏ cuộc. Hy vọng vào may mắn!”

Jeff Cheeger, Giáo sư Toán học tại Viện Courant thuộc Đại học New York và là sinh viên của Simons, cho biết: “Jim có ba sự nghiệp phi thường – là một nhà toán học, là người tiên phong về các phương pháp định lượng trong giao dịch và là một nhà từ thiện. Ông ấy là một trong những người đàn ông vĩ đại trong thời đại của chúng ta.”

Nhằm vinh danh những đóng góp của

Simons cho toán học và hoạt động từ thiện, năm 2016 Liên đoàn Thiên văn Quốc tế đã đặt tên cho tiểu hành tinh 6618, được phát hiện vào năm 1936, là Jimsimons.

Tài liệu tham khảo

[1] Chern, S.-S.; Simons, J., *Characteristic forms and geometric invariants*, Annals of Mathematics. Second Series. 99 (1): 48 – 69.

[2] Gregory Zuckerman, *The Man Who Solved the Market: How Jim Simons Launched the Quant Revolution*, Penguin (2019)

[3] Simons Foundation, *Remembering the Life and Careers of Jim Simons*.

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Ông Anh phải đến họp vào ngày thứ Sáu (không thể nghỉ hai ngày liên tiếp). Khi đó ông Chát không tham gia buổi thứ Sáu (đã có một ngày tham gia chung với ông Anh) và phải tham gia buổi thứ Năm (không thể vắng mặt hai ngày liên tiếp).

	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Anh	–	+	+	–	+
Bửu	+	+	–	+	+
Chát	+	–	+	+	–
Duy	+	–	+	–	–
Đồng	–	+	–	+	–

Vào ngày thứ Năm đã có 3 người tham gia họp, nên ông Duy không tham gia họp vào thứ Năm, và phải đi họp hôm thứ Sáu (không được vắng mặt hai ngày liên tiếp).

	Thứ Hai	Thứ Ba	Thứ Tư	Thứ Năm	Thứ Sáu
Anh	–	+	+	–	+
Bửu	+	+	–	+	+
Chát	+	–	+	+	–
Duy	+	–	+	–	–
Đồng	–	+	–	+	–

Vậy buổi họp hôm thứ Sáu chỉ có ba điều tra viên tham gia là Anh, Bửu và Duy.

Đố vui

Dễ thấy, với một người trợ giúp thì nhà thám hiểm không thể vượt qua được sa mạc (mà không có người nào chết, nhà thám hiểm hay người trợ giúp). Với 2 người trợ giúp thì nhà thám hiểm có thể đi qua sa mạc theo cách như sau. Nhà thám hiểm và 2 người trợ giúp đi bộ 1 ngày vào sa mạc. Sau đó, người trợ giúp thứ nhất chia đều 2 phần nước và thực phẩm (mỗi phần tương ứng với 1 ngày dùng) còn lại của mình cho người trợ giúp 2 và nhà thám hiểm, giữ lại cho mình 1 phần. Khi này, người trợ giúp thứ nhất có 1 phần nước và thực phẩm còn người trợ giúp thứ hai và nhà thám hiểm có 4 phần nước và thực phẩm. Sau đó người trợ giúp nhất đi bộ trở về còn nhà thám hiểm và người trợ giúp thứ hai tiếp tục hành trình. Hai người đó đi bộ thêm một ngày. Lúc này, mỗi người có 3 phần nước và thực phẩm. Người trợ giúp thứ hai chia cho nhà thám hiểm 1 phần và giữ lại 2 phần. Khi này, người trợ giúp thứ hai có 2 phần còn nhà thám hiểm có 4 phần. Sau đó, người trợ giúp quay trở lại còn nhà thám hiểm tiếp tục hành trình với lượng nước và thực phẩm đủ để hoàn thành quãng đường còn lại.

HÀNH TRÌNH ĐẾN TRƯỜNG VỚI CÁC BẠN HỌC SINH CỦA PI TRONG NĂM 2023

BÙI THỊ NGOAN¹

Năm 2023 vừa qua, cảm ơn sự hỗ trợ của các mạnh thường quân Tạp chí Pi đã thực hiện trao tặng gần 6000 cuốn Pi đến tay các bạn học sinh, thư viện các trường trên khắp cả nước. Mong muốn truyền cảm hứng đến các bạn trẻ trong việc tìm hiểu về Toán học và ứng dụng của Toán trong đời sống thực tế. Đồng thời là cơ hội để Pi được giao lưu, kết nối trở thành người bạn thân thiết với các bạn học sinh.

GS. Lê Văn Thuyết – Chủ tịch Hội Toán học Thừa Thiên - Huế, thay mặt Tòa soạn trao tặng tạp chí cho các bạn học sinh một số trường THCS ở Huế.



Hình 1.



Hình 2.

Hình 1 & 2: Buổi trao tặng Pi tại Trường THCS Nguyễn Duy, Thừa Thiên - Huế.



Hình 3.



Hình 4.

Hình 3 & 4: Tặng Pi tại Trường THCS Đặng Dung, Thừa Thiên - Huế.



Hình 5.

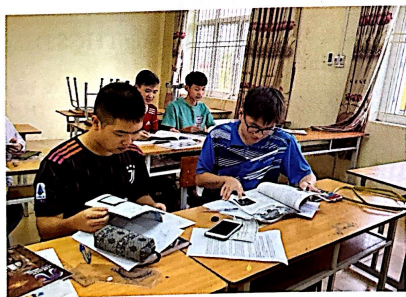


Hình 6.

Hình 5 & 6: Tặng Pi tại THCS Nguyễn Tri Phương và trường THCS Trần Cao Vân ở Thừa Thiên – Huế



Hình 7.



Hình 8

Hình 7 & 8: Các bạn học sinh ở Thư viện trường THCS Lê Quý Đôn – Bắc Giang.



Hình 9.



Hình 10.

Hình 9 & 10: Tặng Pi ở trường THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang (ảnh trái) và trường THCS Hùng Vương, Kiên Giang (ảnh phải).



Hình 11: Anh Trịnh Sơn Hà đại diện Tòa soạn trao tặng Pi cho trường tiểu học Sìn Suối Hồ, Lai Châu.

Pi rất vui khi nhận được những bức hình nói lên cảm xúc của các bạn khi nhận những cuốn tạp chí. Bên cạnh sự hỗ trợ của các mạnh thường quân, cảm ơn các thầy cô giáo ở mỗi điểm trường luôn là cầu nối giúp Pi thực hiện thành công chương trình trao tặng tạp chí.



HÌNH HỌC PHI EUCLID

Phần III: Kiểm chứng sự tồn tại

LÊ VŨ MINH TRÍ VÀ NGUYỄN DUY ANH¹

Trong phần còn lại của hành trình, chúng ta sẽ cùng đi qua một chứng minh cho định lý quan trọng nhất khẳng định sự “đúng đắn” của vũ trụ mới – hình học hyperbolic:

Định lý toán học siêu hình²: *Nếu các tiên đề của hình học Euclid không dẫn tới mâu thuẫn nào, thì các tiên đề của hình học hyperbolic cũng vậy.*

Để có thể đào sâu vào hai vũ trụ hình học hyperbolic và elliptic khác biệt đến vậy, chúng ta buộc phải truy ngược về những điều căn bản nhất – các tiên đề. Tất nhiên, chúng tôi sẽ cố gắng để bài báo vẫn giữ được nét đẹp từ việc nhìn và cảm nhận các hình vẽ như ở hình học Euclid. Suy cho cùng, các tiên đề ban đầu lập ra chính là để đảm bảo ghi lại được những cảm nhận đó bằng logic.

Hy vọng rằng qua đây, độc giả thấy được sự quen thuộc của hai thế giới phi Euclid tưởng xa lạ, và có một cái nhìn mới mẻ hơn về hình học Euclid, quê hương thân thuộc của ta.

Tiên đề của hình học Euclid

Khi nền toán học phát triển và logic chặt chẽ hơn, con người dần hiểu ra rằng một chứng minh phụ thuộc vào hình vẽ và các ngộ nhận sẽ không chính xác. Năm tiên đề của Euclid

đưa ra, được ca tụng là đỉnh cao chặt chẽ suốt hai thiên niên kỷ còn là quá ít. Chúng ta có thể bóc tách một vài chứng minh của Euclid để nhận ra những gì còn thiếu, và trong quá trình đó đặt ra hình học Euclid cần tới những tiên đề nào.

Tiết toán đầu tiên của năm lớp Sáu, chúng ta được học thể nào là tập hợp: nó là một khái niệm nguyên thủy, sẽ không có định nghĩa. Muốn định nghĩa tập hợp là gì thì học sinh sẽ phải biết một khái niệm cơ bản hơn từ trước, và như thế thì phải có tiết nào đó trước tiết về tập hợp để nói về nó, cứ như vậy thì lùi mãi, làm sao năm học có thể bắt đầu! Một trong các sai lầm Euclid mắc phải chính là cố định nghĩa hết các khái niệm cơ bản như đường thẳng và điểm.

Ta cùng nhìn vào vài ví dụ từ *Elements* để chỉ ra các thiếu sót của Euclid.

Định lý 1: *Luôn tồn tại một tam giác đều có cạnh dài bằng AB với mỗi đoạn AB cho trước.*

Chứng minh của Euclid: Theo Tiên đề 3, ta vẽ được đường tròn tâm A bán kính AB và đường tròn tâm B bán kính BA. Nối cạnh từ một giao điểm C nào đó của hai đường tròn tới A và B thì $AC = AB$ và $BC = BA$ theo định

¹ THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.

² Metamathematics: bộ môn nghiên cứu về toán học bằng các phương pháp toán học, chẳng hạn như liệu một hệ tiên đề có chứa mâu thuẫn nào không.

nghĩa đường tròn, từ đó theo định đề 1 thì tam giác ABC là tam giác đều.

Euclid ở đây đã không để ý đến việc chứng minh sự tồn tại của giao điểm C , năm tiên đề ông đưa ra cũng không đủ để chứng minh điều này. Ngoài “nhìn hình ta có”, có thể hiểu một cách trực quan là hai đường tròn phải “liên tục” nên sẽ cắt nhau. Hệ thống tiên đề lại chưa nói gì về điều này, nên cách giải quyết duy nhất là thêm một tiên đề mới. Một giải pháp khả dĩ là một tiên đề về “tính liên tục”:

Nếu một đường thẳng/đường tròn chứa trên nó một điểm trong và một điểm ngoài một đường tròn khác, hai đối tượng sẽ có hai giao điểm.

Hay Định lý 4, trường hợp bằng nhau cạnh-góc-cạnh: Với hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BAC = B'A'C'$, ta dịch chuyển tam giác ABC sao cho A trùng A' và cạnh AB được đặt lên $A'B'$. Do $AB = A'B'$ nên B trùng B' , và do góc $A = \text{góc } A'$, AC và $A'C'$ cùng hướng, hai cạnh lại bằng nhau nên C trùng C' nốt. Hai tam giác trùng khớp hoàn toàn, nên chúng bằng nhau.

Ở đây ta lại thấy xuất hiện sự “dịch chuyển” vốn không được quy định ở đâu trong năm tiên đề, và Euclid ngầm cho rằng sau quá trình “dịch chuyển” này thì tam giác ABC vẫn giữ nguyên tính chất vốn có. Để tránh phiền phức, tiêu chuẩn bằng nhau này của tam giác đã được cho làm một tiên đề về quan hệ “bằng nhau”.

Ngoài hai mảng lớn trên, chúng ta còn phải quy định thêm về quan hệ “nằm trên/đi qua” (incidence) của điểm và đường thẳng, quan hệ “nằm giữa” (betweenness), và quan hệ “song song” (parallelism), vấn đề chính của ta. Chúng ta cùng thử xây dựng một vài tiên đề cho quan hệ “nằm trên/ đi qua” (NTĐQ)

Ta bắt đầu với bốn khái niệm nguyên thủy: điểm, đường, quan hệ nằm trên và quan hệ đi qua, và các tiên đề sau:

0. Điểm P nằm trên đường thẳng $l \Leftrightarrow$ Đường thẳng l đi qua điểm P

1. Với hai điểm P, Q phân biệt bất kỳ, tồn tại đúng 1 đường thẳng đi qua cả P và Q . Đây là tiên đề 1 của Euclid.

2. Có ít nhất hai điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng l bất kỳ. Một sự thật nhỏ nhỏ là khác với chúng ta ngày nay, có vẻ như người Hy Lạp cổ đại không nghĩ về đường thẳng như được cấu thành từ các điểm. Thế mới thấy, lần nữa, có những mệnh đề đôi khi ta quên mất là mình ngầm thừa nhận, do đó cần phải phát biểu đầy đủ các tiên đề.

3. Tồn tại ba điểm phân biệt sao cho không có đường thẳng nào đi qua đồng thời cả ba điểm này. Điều này đảm bảo sự tồn tại của tam giác trên mặt phẳng hình học Euclid. Một ví dụ thỏa mãn cho thấy sự cần thiết chính là một đường thẳng và các điểm nằm trên đó: cấu trúc này vẫn cứ thỏa mãn những tiên đề trên, và những tam giác vuông hay đường tròn lại không hề tồn tại ở đây.

Ví dụ cho mô hình

Để minh họa cho những gì vừa thiết lập, chúng ta sẽ xét những “mô hình” của hệ tiên đề này. Một mô hình hiểu nôm na là một cách gán các khái niệm nguyên thủy và các quan hệ cơ bản với các đối tượng cho sẵn, sao cho các tiên đề là các mệnh đề đúng trong hệ thống đối tượng đó. Nghe có hơi trừu tượng, nên sau đây là số một ví dụ.

Xét ba nhà Toán học là Gauss, Bolyai, và Lobachevsky. Mỗi người ta hiểu là một “điểm”, và mỗi “đường” là một cặp nhà toán học có nghiên cứu về hình học phi Euclid. Một điểm được gọi là nằm trên một đường nếu trong cặp nhà toán học có chứa người đó. Đây chính là một mô hình của những gì ta vừa thiết lập.

Điều chúng ta vừa làm nghe hơi kỳ, do cách hiểu điểm và đường thẳng này là khác với thông thường. Nhưng nhớ rằng chúng là các khái niệm nguyên thủy, điều cần quan tâm

duy nhất khi nhìn nhận “điểm” và “đường thẳng” dưới con mắt logic là cách chúng vận hành. Và ở đây không khó để kiểm tra rằng thiết lập như trên thỏa mãn các tiên đề đã đặt ra. Với những ai có một số kiến thức cơ bản về lý thuyết đồ thị, bài toán với các đối tượng như “người” – “quen nhau”, “thành phố” – “có đường bay giữa hai nơi”, “bạn bè” – “ngồi cạnh nhau” có thể coi là những mô hình cho các kết quả về “điểm” – “cạnh” của đồ thị.

Quay lại với mô hình ba “điểm” vừa dựng, có một tính chất hiển nhiên là hai đường thẳng bất kỳ trong mô hình đều có giao điểm. Một cách không khó hiểu, ta gọi một mô hình như thế này là có tính chất elliptic.

Và bởi không có tính chất nào trong số các tiên đề ta vừa nêu nói rằng đường thẳng phải “dài”, ta hoàn toàn có thể xét mô hình như sau và có các kết quả tương tự: quy ước các “điểm” là các cặp nhà toán học {Gauss, Bolyai}, {Bolyai, Lobachevsky}, {Lobachevsky, Gauss} và các “đường thẳng” là Lobachevsky, Gauss và Bolyai. Một điểm P được gọi là nằm trên một đường thẳng d nếu cặp nhà toán học biểu diễn P chứa nhà toán học đại diện cho d .

Với mô hình với bốn điểm A, B, C, D , hai điểm đôi một có một đường thẳng đi qua, tiên đề song song của Euclid lại đúng, ví thử như với đường thẳng qua A, B , xét điểm C , thì có đúng một đường thẳng là CD đi qua C và song song AB , ta gọi mô hình như vậy là có tính chất Euclid. Với năm điểm A, B, C, D, E , mô hình lại thỏa mãn tính chất hyperbolic: chẳng hạn với cạnh AB và điểm C thì có CD, CE song song (không có giao điểm) với AB (lưu ý toàn bộ các điểm ở đây ta xét chỉ gồm A, B, C, D, E , nếu vẽ trên giấy mà các đường thẳng có giao nhau tại một điểm không thuộc năm điểm kia, ta không tính).

Như vậy, chúng ta đã thấy những ví dụ chứng tỏ rằng hình học với những tính chất phi Euclid phần nào có tồn tại, và thật ra, không có gì khó hiểu cả. Tuy nhiên, ta mới

chỉ dựng ra được những mô hình thỏa mãn các tiên đề nằm trên/đi qua, một góc nhỏ của hình học Euclid. Hãy cùng đến với một ví dụ gần với hình học Euclid hơn nữa.

Từ tỷ số kép tới một nửa địa cầu

Dù hình học phi Euclid ban đầu hiện lên xa lạ với cảm nhận của con người, ta có thể tiếp cận nó ngay từ những ý tưởng trong chính hình học Euclid chúng ta được làm quen ngay từ trung học cơ sở. Trước tiên ta nhắc lại một khái niệm quen thuộc với những người học hình học Euclid – tỷ số đơn, tỷ số kép.

Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và đôi một phân biệt, tỷ số đơn (AB, C) là số thực $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$,

có giá trị tuyệt đối bằng $\frac{CA}{CB}$, mang dấu âm nếu $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ ngược hướng, tức là khi C nằm giữa A và B , và mang dấu dương trong các trường hợp còn lại.

Xét thêm điểm D trên cùng đường thẳng với ba điểm trên, định nghĩa tỷ số kép (AB, CD) là:

$$(AB, CD) = (AB, C) : (AB, D)$$

Phép chiếu xuyên tâm được định nghĩa như sau: với hai đường thẳng d, d' và một điểm P không nằm trên chúng, khi ấy phép chiếu xuyên tâm P từ d vào d' là phép biến điểm A thành $A' = PA \cap d'$.

Nhờ vào định lý hàm số sin, ta liên hệ được tỷ số đơn với số đo góc của ba tia cắt nhau: Cho 3 điểm A, B, C cùng thuộc đường thẳng d , O không thuộc d , thì

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{OA \cdot \sin(\vec{OC}, \vec{OA})}{OB \cdot \sin(\vec{OC}, \vec{OB})}$$

Hệ quả là định lý sau: *phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép*. Do đó có thể mở rộng khái niệm này cho chùm đường thẳng như sau: cho 4 đường thẳng a, b, c, d đi qua cùng một điểm O . Khi ấy $O(ab, cd) = (AB, CD)$, với A, B, C, D là 4 giao điểm của một đường

thẳng e bất kỳ, khác cả 4 đường thẳng đó, với lần lượt a, b, c, d .

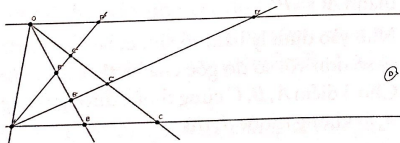
Ngoài ra còn có khái niệm tỷ số kép cho bốn điểm trên đường tròn, định nghĩa được nhờ định lý sau:

Với mọi tập hợp 5 điểm A, B, C, D, E nằm trên cùng một đường tròn, trong đó 4 điểm đầu tiên phân biệt, ta có $|E(AB, CD)| = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$, tỷ số kép này dương khi C, D cùng phía đối với AB , và âm khi C, D khác phía đối với AB . Gọi $E(AB, CD)$ là tỷ số kép của bộ 4 điểm A, B, C, D , ký hiệu là (AB, CD) .

Thế nhưng có một vấn đề phát sinh: Cho chùm đường thẳng $O(ab, cd)$, đường thẳng δ song song với d , cắt a, b, c tại A, B, C . Khi ấy ta chuyển toàn bộ tỷ số kép của chùm này lên δ thế nào? Ta có thể quay trở lại với định nghĩa chỉ có góc của chùm, nhưng nó sẽ giới hạn khả năng áp dụng các phép chiếu xuyên tâm một cách linh hoạt. Để giải quyết vấn đề này, người ta thêm vào khái niệm điểm vô cùng – giao điểm của hai đường song song. Qua vài ví dụ sau đây, vai trò của điểm vô cùng sẽ rõ.

Nói về các chùm điều hòa (tức là có tỷ số kép bằng -1) cơ bản, có định lý:

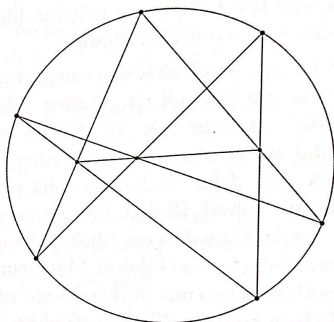
Cho chùm điều hòa $O(ab, cd)$, đường thẳng delta song song với d , cắt a, b, c tại A, B, C . Khi ấy B là trung điểm AC .



Hơi khó nhớ, nhưng nếu ta viết: “nếu $-1 = (AB, C\infty)$ thì $\frac{BA}{BC} = -1$, hay B là trung điểm AC ”, định lý sẽ dễ nhớ hơn.

Giải thích cho phát biểu vừa rồi là: khi cho C ngày càng xa khỏi A theo chiều của tia AB thì (AB, C) sẽ dương và ngày càng gần với 1, khi C “tại điểm xa vô cùng” thì cho tỷ số đơn đó bằng 1 là việc hợp lý, nên ta

quy ước $(AB, \infty) = 1$. Khi cho C chạy theo chiều tia BA xa khỏi B thì thu được kết quả y hệt. Nên ta hiểu điểm “vô cùng” (nếu có) ở hai đầu đường thẳng là một. Định lý trên không phải trường hợp duy nhất mà sẽ được đơn giản hóa khi thêm vào điểm “vô cùng”: chẳng hạn như định lý Pascal và Desargues có thể bớt đoạn “hoặc đôi một song song” trong kết luận, vì có thể quy ước giao điểm của các đường song song khi này là điểm ở xa vô cùng, giống như cách hai đường ray song song khi kéo dài ra chân trời sẽ tạo cảm giác như là chúng cắt nhau.

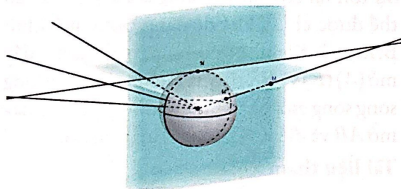


Lục giác huyền bí của cậu thiếu niên Blaise Pascal 17 tuổi, tổng quát hóa hơn 400 định lý hình học từ thời cổ đại đến lúc ấy. Chứng minh bằng tỷ số kép sẽ bao quát được mọi thể hình và các trường hợp suy biến.

Dựa trên sự thuận tiện ấy, ta sẽ quy ước những đường thẳng cùng song với một đường thẳng l cho trước thì cùng đi qua một điểm gọi là điểm vô cùng ứng với l . Hai đường có chung điểm vô cùng khi và chỉ khi chúng song song hoặc trùng nhau. Để Tiên đề 1 về NTĐQ đã nêu trên không bị vi phạm, ta cần thêm một đường thẳng “ở vô cùng” mà đi qua tất cả và chỉ những điểm vô cùng. Sau khi thêm vào mặt phẳng Euclid thông thường những điểm này, ta được một mặt phẳng mà các tiên đề NTĐQ của ta vẫn đúng và có tính chất elliptic. Ta gọi đây là một mặt phẳng xạ ảnh.

Xét một điểm N không phải điểm vô cùng trên mặt phẳng ấy, vẽ một mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng vừa xây dựng tại N . Với mỗi điểm M trên mặt phẳng, biến M thành giao điểm của OM với bán cầu chứa N của mặt cầu. Riêng với điểm vô cùng, do khi một điểm đi dọc một đường thẳng chứa N ra xa khỏi N theo hai phía thì ảnh của nó tiến dần tới hai điểm đối xứng nhau qua O , mà đường thẳng lại chỉ có 1 điểm vô cùng, ta sẽ quy ước hai điểm đối xứng nhau qua O như là 1 điểm. Và thế là ta được một mô hình khác cho một không gian mà tiên đề song song của hình học elliptic đúng và tuân thủ các tiên đề về “nằm trên đi qua” đã nêu. Tất nhiên không gian này còn thiếu những khái niệm góc, độ dài cạnh, diện tích, nhưng tạm thời thế đã.

Mô hình này chỉ ra rằng: chính hành tinh què nhà chúng ta sống là một bề mặt nơi mà mọi đường thẳng (ở đây là các đường tròn lớn) đều cắt nhau.



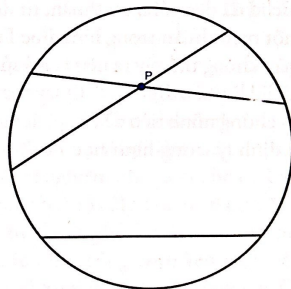
Khi các điểm ra xa khỏi N theo cùng một hướng thì ảnh của chúng gần lại với một điểm trên xích đạo.

Giờ là lúc đến với một mô hình của hình học hyperbolic, mô hình Beltrami-Klein

4. Mô hình Beltrami-Klein

Chúng tôi sẽ không trình bày y hệt như công trình gốc của Klein để đỡ phức tạp, nhưng những ý tưởng chủ đạo vẫn là do Klein cải thiện từ luận án của Beltrami. Cũng giống với hình học Euclid, hình học hyperbolic cũng có mặt phẳng xạ ảnh để hoàn thiện cho không gian hyperbolic thông thường. Dựa vào đó, Klein đã xây dựng mô hình dưới đây từ mặt phẳng đó để nghiên cứu rõ hơn. Xét

một đường tròn γ với tâm O và bán kính R trên mặt phẳng Euclid, gọi phần bên trong của γ là tập hợp các điểm X sao cho $OX < R$ (tức là không bao gồm điểm nằm trên đường tròn). Một dây cung của đường tròn là một đoạn nối hai điểm trên đường tròn đó. Trong mô hình Beltrami – Klein, tập hợp các điểm sẽ là phần bên trong của đường tròn, và với mỗi hai điểm A, B từ tập hợp đó, ta định nghĩa “đường thẳng” nối A, B là dây cung của γ đi qua AB và bỏ đi hai đầu mút. Ta gọi một dây cung như vậy là dây mở và ký hiệu là $A)(B$. Quan hệ “nằm trên” được định nghĩa giống hệt với trong hình học Euclid: P nằm trên $A)(B$ nếu P nằm trên đường thẳng AB theo nghĩa hình học Euclid và P nằm giữa A và B . Quan hệ “nằm giữa” với hình học hyperbolic ở đây là y như quan hệ nằm giữa trong hình học Euclid. Quan hệ “bằng nhau” sẽ được định nghĩa ở phần tới, do nó phức tạp hơn. Hình vẽ dưới đây là một minh họa để thấy tiên đề song song của hình hyperbolic đúng trong mô hình này: hai đường qua điểm P không hề có giao điểm với dây còn lại trong mô hình. Nhìn thì có vẻ hiển nhiên, nhưng riêng việc xét mô hình này đã là một ý tưởng đột phá rồi.



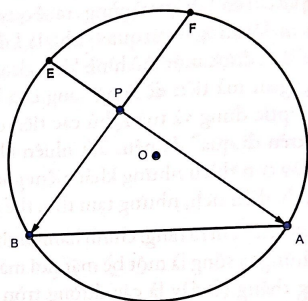
Để chứng minh tính phi mâu thuẫn của hình học hyperbolic tương đối với hình học Euclid, đầu tiên ta dịch các khái niệm nguyên thủy (“điểm”, “đường”, “nằm trên”, “nằm giữa” và “bằng nhau”) trong hình học hyperbolic sang một cách diễn giải trong

hình học Euclid, như cách mà ta đã làm với bốn khái niệm đầu tiên. Các đối tượng có định nghĩa cũng sẽ được dịch sang hình học Euclid một cách tương tự. Ví dụ: thay mọi từ “đường thẳng” trong phát biểu cho mối quan hệ song song trong hình học Euclid thành từ “dây mở”, và ta thu được định nghĩa cho quan hệ “song song” trong hình học hyperbolic. Sau khi các khái niệm được chuyển đổi xong, ta có thể chuyển sang cắt nghĩa các tiên đề. Chẳng hạn như một tiên đề NTĐQ được dịch về mô hình Beltrami – Klein như sau:

Tiên đề NTĐQ 1 (Klein): Với mỗi hai điểm A, B phân biệt ở phần bên trong đường tròn γ , tồn tại đúng một dây mở l của γ sao cho A và B nằm trên l .

Nhiệm vụ tiếp theo của ta là chỉ ra tiên đề hyperbolic này là một định lý trong hình học Euclid, và làm điều này với tất cả các diễn giải tiên đề còn lại. Một khi các tiên đề hình học hyperbolic trong mô hình Beltrami – Klein đã trở thành định lý trong hình học Euclid, thì mọi chứng minh là hình học hyperbolic có mâu thuẫn sẽ có nghĩa là một tập hợp các mệnh đề đúng (chính là các tiên đề hình học hyperbolic trong mô hình của ta) trong hình học Euclid đã dẫn tới mâu thuẫn, từ đó cho thấy một mâu thuẫn trong hình học Euclid. Điều này không thể xảy ra nếu ta giả sử hình học Euclid là phi mâu thuẫn. Quay trở lại, ta vẫn cần chứng minh tiên đề vừa phát biểu kia là một định lý trong hình học Euclid. Thật

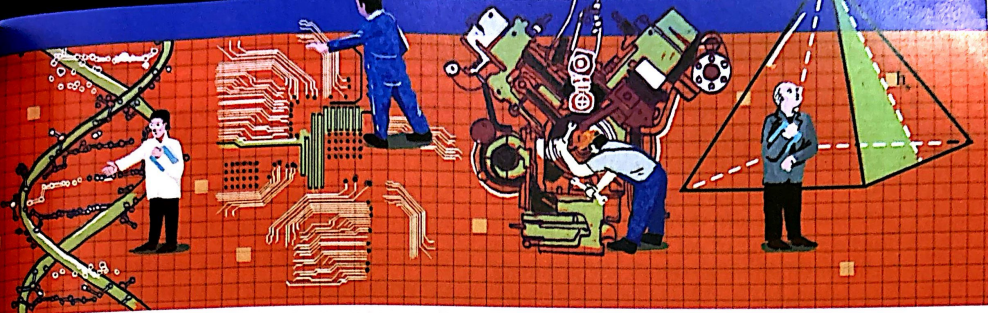
vậy, gọi l là đường thẳng theo nghĩa trong hình học Euclid đi qua A và B . Bởi l có đi qua điểm nào đó nằm trong γ , nó sẽ có đúng hai giao điểm với γ , gọi là C và D (Nguyên lý liên tục đường thẳng – đường tròn của hình học Euclid). Khi ấy dây mở CD chính là “đường thẳng” đi qua A và B , và theo tiên đề NTĐQ của hình học Euclid ta có sự tồn tại duy nhất của CD .



Sự tồn tại của đường song song giới hạn có thể được chỉ ra khá dễ dàng trong mô hình Beltrami–Klein. Nhìn hình ta thấy, hai dây mở $(A)(E)$ và BF đi qua P chính là hai đường song song giới hạn khi xét đường thẳng là dây mở AB và điểm P không nằm trên đó.

Tài liệu tham khảo

- [1] *Euclidean and Non-Euclidean geometries – Development and History* (Marvin Jay Greenberg)
- [2] *The History of Mathematics An Introduction* (David M. Burton)



HIỆU ỨNG DOPPLER

NGUYỄN HOÀNG VŨ¹

Hiệu ứng Doppler xuất hiện trong nhiều hiện tượng tự nhiên và đời sống nhưng thường chỉ được các tài liệu nhắc đến tương đối sơ lược. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng tìm hiểu đôi nét về quá trình khám phá cũng như một số ứng dụng liên quan đến hiện tượng này.

1. Christian Doppler



Christian Doppler (1803 – 1853)

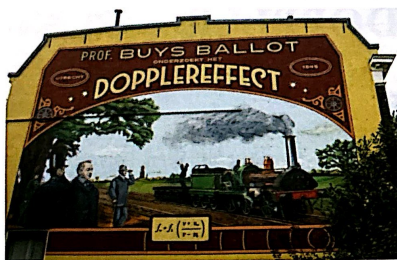
Christian Andreas Doppler ra đời ngày 29 tháng 11 năm 1803 tại Salzburg, Áo trong một dòng họ có truyền thống xây dựng các công trình bằng đá. Tuy nhiên, do ông có sức khỏe kém nên gia đình đã định hướng cho ông đi theo con đường học tập. Sau khi học

hết cấp 1 và cấp 2 tại Linz, ông bắt đầu học toán học và cơ học tại Viện Polytechnique ở Wien theo lời khuyên của các giáo viên. Sau khi hoàn thành chương trình cấp 3 ở Salzburg, vào năm 1829, ông trở thành trợ lý giáo sư cho A. Burg và có công trình khoa học đầu tiên liên quan đến các đường thẳng song song. Trong một khoảng thời gian dài từ năm 1833, Doppler không tìm được việc và có ý định di cư sang Mỹ. Tuy nhiên, ông lại tìm được công việc giảng dạy toán ở Prague và chính thức trở thành giáo sư toán vào năm 1841.

Năm 1842, ông công bố một báo bài đề xuất rằng chuyển động của nguồn sáng và của vị trí quan sát có thể thay đổi tần số sóng ánh sáng quan sát được. Ý tưởng này gặp phải rất nhiều ý kiến hoài nghi. Năm 1845, Buys Ballot với mục đích phủ định Doppler đã thực hiện một thí nghiệm mà sau này được gọi là “thí nghiệm nhà ga tàu hỏa”. Trong thí nghiệm này, một đầu tàu mà Ballot đã mượn được từ chính phủ Hà Lan sẽ chở một toa gồm các nhạc công chơi kèn trumpet chạy ngược và xuôi dọc theo đường ray. Ở dưới đất, các nhạc công khác sẽ nghe và ghi lại cảm nhận của mình về tiếng nhạc từ toa tàu. Kết quả cho thấy âm thanh từ toa tàu có tần số cao hơn khi đoàn tàu lại gần vị trí ga và thấp hơn khi đoàn tàu đi ra xa ga. Ngược lại mục

¹ Hà Nội.

đích ban đầu, thí nghiệm của Ballot đã trở thành sự kiện đầu tiên khẳng định sự tồn tại của hiệu ứng Doppler, ít nhất là cho sóng âm. Trong đời sống hàng ngày, ta cũng có thể quan sát thấy hiện tượng tương tự khi lắng nghe âm thanh từ còi cảnh báo của các xe chuyên dụng như xe cảnh sát, xe cứu thương, xe cứu hỏa, ...



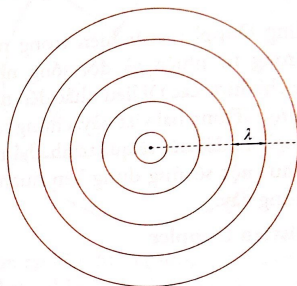
Hình 1. Bức tranh trên tường một ngôi nhà tại Utrecht, nơi Buys Ballot tiến hành thí nghiệm với nhạc công trên đoàn tàu hỏa, được vẽ vào năm 1845. Công thức của hiệu ứng Doppler xuất hiện ở phần dưới của bức tranh.

Sau Doppler 6 năm, nhà vật lý người Pháp Fizeau cũng phát hiện một cách độc lập về hiệu ứng Doppler cho sóng điện từ nên trong một số tài liệu hiệu ứng này còn gọi là hiệu ứng Fizeau-Doppler. Tuy nhiên, phải đến đầu thế kỷ 20, nhờ những tiến bộ về cả mặt lý thuyết lẫn thực nghiệm người ta mới khẳng định được rằng hiệu ứng này cũng áp dụng được cho sóng điện từ.

2. Hiệu ứng Doppler

Chúng ta hãy cùng thiết lập công thức của hiệu ứng Doppler cho sóng âm. Trong trường hợp đơn giản nhất, giả sử ta có một nguồn âm cố định phát ra âm thanh với tần số f , tức là trong một giây ta sẽ có f dao động từ nguồn âm phát ra. Mỗi dao động này sẽ lan truyền dưới dạng một mặt sóng (mặt cầu trong trường hợp sóng âm lan truyền trong không khí).

Gọi v là vận tốc lan truyền sóng trong không khí. Tại các thời điểm khác nhau, vị trí của mỗi mặt sóng đều khác nhau nhưng khoảng cách giữa hai mặt sóng liên tiếp luôn bằng một bước sóng $\lambda = \frac{v}{f}$. Khi một người quan sát cố định nghe được sóng âm thì khoảng cách giữa hai thời điểm mà hai mặt sóng liên tiếp đến tai người này cũng bằng với chu kỳ của nguồn âm nên tần số mà ta nghe được không bị thay đổi so với tần số gốc.



Hình 2. Sóng âm phát ra từ nguồn âm. Khoảng cách giữa hai mặt sóng phát ra ở hai thời điểm cách nhau một chu kỳ sẽ đúng bằng một bước sóng.

Tiếp theo, ta hãy xét đến trường hợp nguồn âm di chuyển với một vận tốc v_s ra xa người quan sát. Dao động được phát ra vào một thời điểm t sẽ có mặt sóng là một mặt cầu có tâm là vị trí của nguồn tại thời điểm được phát ra. Do đó, sau mỗi chu kỳ T , mỗi mặt sóng đều có bán kính tăng thêm một khoảng $v \cdot T$ nhưng khoảng cách giữa hai mặt sóng liên tiếp sẽ lớn hơn so với trường hợp nguồn âm cố định và bằng $\lambda_1 = \lambda + v_s T$.

Mà $\lambda = vT$ nên

$$\lambda_1 = vT + v_s T = \frac{v}{f} + \frac{v_s}{f}.$$

Gọi f' là tần số mà người quan sát nghe được, ta có:

$$\frac{v}{f'} = \frac{v}{f} + \frac{v_s}{f}$$

hay

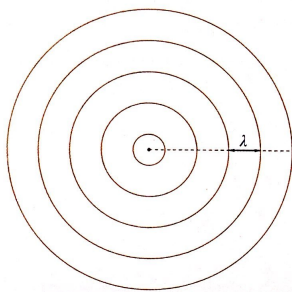
$$f' = f \left(\frac{v}{v + v_s} \right)$$

tức là tần số ta nghe được sẽ giảm đi khi nguồn âm chuyển động ra xa.

Tương tự, khi nguồn âm chuyển động lại gần người quan sát, ta có $\lambda_2 = \lambda - v_s T$ nên

$$f' = f \left(\frac{v}{v - v_s} \right)$$

tức là tần số nghe được sẽ tăng lên.



Hình 3. Trong trường hợp nguồn chuyển động, khoảng cách giữa hai mặt sóng được phát ra ở hai thời điểm cách nhau một chu kỳ (màu cam và màu xanh) sẽ bị thay đổi tùy theo chiều chuyển động của nguồn âm. Các đường nét đứt trong hình biểu diễn mặt sóng tại các thời điểm trước thời điểm hiện tại tại một số nguyên lần chu kỳ. Đường tròn nét liền biểu diễn mặt sóng tại thời điểm hiện tại. Người quan sát có vị trí ở phía bên trái của hình.

Tiếp tục, ta hãy xét trường hợp nguồn âm đứng yên còn người quan sát chuyển động. Khi người quan sát chuyển động về phía nguồn âm với vận tốc v' , thời gian giữa hai dao động liên tiếp mà tai nghe được sẽ là:

$$T' = \frac{\lambda}{v + v'} = \frac{vT}{v + v'}.$$

Gọi f' là tần số tai nghe được. Do $f' = \frac{1}{T'}$ nên:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} \left(\frac{v}{v + v'} \right)$$

$$\text{hay } f' = f \left(\frac{v + v'}{v} \right).$$

Tương tự, nếu người chuyển động ra xa nguồn âm, ta có:

$$f' = f \left(\frac{v - v'}{v} \right).$$

Trong trường hợp cả người lẫn nguồn âm đều chuyển động, ta vẫn có thể phân tích tương tự như phần trên và có công thức tổng quát cho trường hợp này:

$$f' = f \left(\frac{v + v'}{v + v_s} \right)$$

với $v' > 0$ khi người chuyển động hướng về nguồn và $v_s > 0$ khi nguồn đi ra xa người.

Trong trường hợp phương chuyển động của nguồn hoặc người quan sát không trùng với phương từ nguồn đến người quan sát thì công thức sẽ phức tạp hơn so với các phân tích ở trên.

Liên quan đến hiệu ứng Doppler cho sóng điện từ, ngay từ ban đầu Doppler đã đưa ra một số giải thích sai lầm do sự chưa hoàn thiện về lý thuyết của thời điểm đó. Việc thiết lập các công thức của hiệu ứng này cho sóng điện từ (bao gồm cả sóng ánh sáng) yêu cầu các kiến thức liên quan đến thuyết tương đối hẹp của Einstein nên chúng ta sẽ không trình bày chúng ở đây. Bạn đọc quan tâm đến lĩnh vực này có thể tham khảo các giáo trình vật lý hiện đại.

3. Hiệu ứng Doppler trong tự nhiên và đời sống

3.1 Hiệu ứng Doppler và định vị bằng sóng âm ở động vật

Nhiều loài động vật sử dụng sóng âm để định vị khi di chuyển và săn mồi. Một số loài sử dụng sóng âm với nhiều tần số khác nhau và dựa trên khoảng thời gian phản xạ ngược lại của mỗi tần số để xác định vị trí các vật thể xung quanh. Trong khi đó, một số loài khác chỉ sử dụng một tần số và dựa vào hiệu ứng Doppler để xác định các con mồi chuyển động. Trong khi phương pháp nhiều tần số

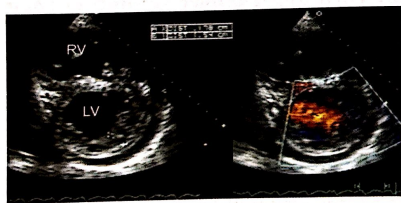
có độ phân giải cao, nó cần lượng năng lượng sóng âm lớn để trải khắp các tần số nên nó chỉ phù hợp với các loài dơi săn mồi ở không gian hẹp. Ngược lại, việc sử dụng một tần số và hiệu ứng Doppler phù hợp với cách săn mồi ở không gian trống trải với các con mồi chuyển động. Một số loài dơi sử dụng kết hợp cả hai phương pháp này.



Hình 4. Một số loài dơi, ví dụ như dơi móng ngựa có những cấu trúc đặc biệt ở trên mặt phục vụ việc sử dụng sóng âm để định vị và săn mồi. Chúng cũng cảm nhận được sự thay đổi tần số do hiệu ứng Doppler gây ra để xác định được tốc độ của con mồi.

3.2 Các ứng dụng thực tế của hiệu ứng Doppler liên quan đến sóng âm

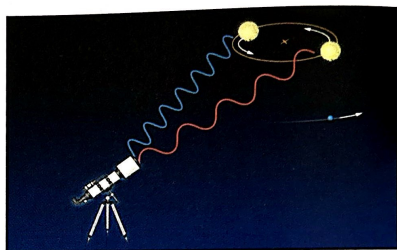
Các radar sóng âm thường được sử dụng để phát hiện các vật thể dưới nước bằng cách đo thời gian sóng bị phản xạ lại. Trong trường hợp vật thể chuyển động như tàu ngầm hay mìn, hiệu ứng Doppler có thể được sử dụng để xác định vận tốc của vật thể.



Hình 5. Hiệu ứng Doppler được sử dụng trong nhiều xét nghiệm y tế, ví dụ như xác định vận tốc của máu trong hệ tuần hoàn sử dụng sóng âm.

Hiệu ứng Doppler cũng được ứng dụng rộng rãi trong chẩn đoán y học. Kết hợp với thiết bị siêu âm y khoa, nó cho phép xác định vận tốc di chuyển của máu trong mạch máu hay buồng tim dưới dạng xét nghiệm không xâm lấn, giúp cho việc khám và điều trị các bệnh liên quan trở nên dễ dàng hơn. Nhiều phương pháp khác nhau dựa trên hiệu ứng Doppler cũng đang được tiếp tục phát triển nhằm phục vụ chẩn đoán và điều trị cho một số loại bệnh ở người.

3.3 Các ứng dụng thực tế của hiệu ứng Doppler liên quan đến sóng điện từ



Hình 6. Một hành tinh không quan sát được có thể gây lệch chuyển động của ngôi sao. Độ lệch này có thể được phát hiện từ hiệu ứng Doppler khi phân tích quang phổ thu được.

Hiệu ứng Doppler có nhiều ứng dụng trong thiên văn học. Như đã nói ở trong số tháng 3 năm 2024, các ngôi sao đi ra xa khỏi Trái Đất sẽ có quang phổ bị lệch về phía màu đỏ còn các ngôi sao lại gần ta sẽ có quang phổ lệch về phía màu xanh. Nhờ hiện tượng này mà người ta kết luận được rằng các thiên hà đang đi ra xa nhau và vũ trụ đang giãn nở. Hiệu ứng Doppler cũng có thể được sử dụng để phát hiện các hành tinh ở các hệ Mặt trời ở xa chúng ta. Ta không thể xác định được các hành tinh này một cách trực tiếp nhưng khi một hành tinh quay quanh một ngôi sao, nó có thể làm ngôi sao này dao động nhẹ quanh trục. Sự dao động này sẽ làm thay đổi quang phổ của ngôi sao và các nhà thiên văn học có thể dựa trên việc này để xác định sự tồn tại và

các đặc điểm của hành tinh. Tuy chỉ có các hành tinh cỡ lớn như Sao Mộc có thể được xác định theo phương pháp này, đến nay đã có hơn 4000 hành tinh được phát hiện nhờ hiệu ứng Doppler. Một điểm đáng lưu ý là khả năng ứng dụng của hiệu ứng này trong thiên văn học cũng đã được chính bản thân Doppler dự đoán ngay từ bài báo đầu tiên của ông về nó.



Hình 7. Ở phần mũi của các máy bay đều có trang bị hệ thống radar thời tiết. Radar này là kết hợp của radar xung và radar Doppler. Thời gian phản xạ của các xung điện từ được sử dụng để đo khoảng cách còn hiệu ứng Doppler được sử dụng để đo vận tốc. Nhờ đó máy bay có thể phát hiện và đo đạc các hiện tượng thời tiết xấu ở phía trước giúp phi công có thời gian phản ứng.

Các hệ thống radar sử dụng hiệu ứng Doppler để xác định tốc độ của các vật thể trên không như máy bay bắt đầu được ứng dụng rộng rãi từ chiến tranh thế giới thứ hai. Các công nghệ này cũng được sử dụng cho các radar sử dụng trong hàng không. Tín hiệu từ các radar Doppler cũng được sử dụng trong ngành khí tượng để nghiên cứu các hiện tượng thời tiết, đặc biệt là cấu trúc của các vùng mưa dông hay các cơn bão. Mặt khác, các thiết bị laser sử dụng hiệu ứng Doppler được dùng để đo vận tốc gió. Cơ chế tương tự sử dụng laser cũng xuất hiện trong các thiết bị công nghiệp đo vận tốc dòng chảy dựa trên các tia sáng bị phản xạ từ các hạt lơ lửng hoặc bong bóng khí trong chất lỏng. Thiết bị dạng này cũng có thể được dùng để

đo vận tốc dao động của các bề mặt.

Hiệu ứng Doppler cũng được dùng để đo nhiệt độ của dòng plasma trong các thí nghiệm phản ứng nhiệt hạch. Các hạt plasma có tốc độ cao sẽ chảy theo hướng ra xa lẫn lại gần người quan sát dẫn đến việc mở rộng phổ của dải sóng điện từ thu được. Việc đo độ mở rộng phổ này sẽ cho biết tốc độ dịch chuyển của các hạt trên. Thông qua vận tốc di chuyển của chúng, ta có thể tính được nhiệt độ của dòng hạt.

Một ứng dụng quen thuộc hơn là các thiết bị đo vận tốc mà cảnh sát giao thông sử dụng để đo vận tốc của xe cộ di chuyển trên đường. Là một radar Doppler thu nhỏ, nó phát ra sóng radio về phía phương tiện và đo tần số của sóng phản xạ lại. Vận tốc của phương tiện được tính theo công thức:

$$v = \frac{\Delta f}{f} \cdot \frac{c}{2}$$

với Δf là độ lệch tần số của sóng phản xạ lại so với sóng ban đầu còn c là vận tốc ánh sáng. Hệ số 2 ở đây xuất hiện do tần số bị lệch 2 lần, một lần từ nguồn phát đến phương tiện đang chuyển động và lần thứ 2 từ phương tiện đang chuyển động về tới nguồn thu âm.

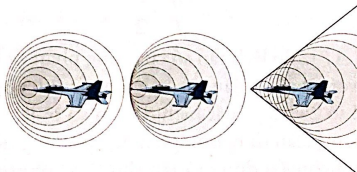


Hình 8. Thiết bị đo vận tốc phương tiện giao thông sử dụng hiệu ứng Doppler.

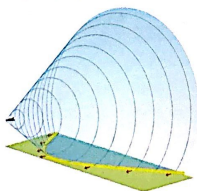
4. Nhanh hơn vận tốc âm thanh

Khi phân tích về hiệu ứng Doppler, ta chưa xét đến trường hợp chuyển động của nguồn âm nhanh hơn vận tốc truyền sóng âm trong không khí. Vậy khi đó sẽ có hiện tượng gì xảy ra?

Ta hãy xét trường hợp một máy bay phản lực bay với các vận tốc khác nhau. Khi vận tốc của nó nhỏ hơn vận tốc âm thanh, các mặt sóng âm máy bay gây ra khi chuyển động sẽ tương tự với hình bên trái của Hình 9. Đến khi vận tốc máy bay ngang bằng với vận tốc âm thanh (còn gọi là vận tốc Mach 1), mặt sóng của các sóng sinh ra sau và các sóng trước đó sẽ cùng tiếp xúc ở đầu máy bay. Còn khi vận tốc của máy bay lớn hơn vận tốc âm thanh, mũi của máy bay sẽ đi trước cả sóng âm mà nó sinh ra, làm cho không khí tại vị trí mà máy bay đi qua sẽ bị nén lại, gây ra tiếng nổ lớn. Các sóng xung kích trong trường hợp này sẽ tạo thành một mặt nón như trong hình. Khi máy bay đi qua phía trên người quan sát, người này sẽ không nghe thấy gì, tuy nhiên khi mặt nón đến vị trí quan sát thì tai sẽ nghe thấy tiếng nổ lớn.



Hình 9. Trái: Các mặt sóng trong trường hợp máy bay có vận tốc nhỏ hơn vận tốc của sóng âm trong không khí. Giữa: Khi máy bay có vận tốc bằng với vận tốc của sóng âm trong không khí, các mặt sóng dính lại với nhau ở mũi máy bay. Phải: Khi máy bay có vận tốc lớn hơn vận tốc sóng âm trong không khí, sẽ hình thành sóng xung kích dạng mặt nón.



Hình 10. Khi mặt nón của sóng xung kích chạm mặt đất thì người quan sát ở dưới mặt đất mới nghe thấy tiếng nổ từ chuyển động siêu thanh của máy bay dù máy bay đã đi qua từ trước đó.

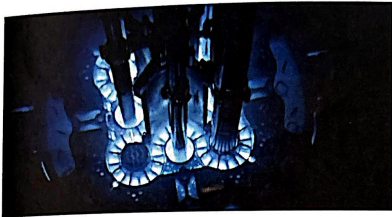
Số Mach biểu diễn tỷ lệ vận tốc của một vật chuyển động so với vận tốc âm thanh được đặt tên theo nhà vật lý người đức Ernst Mach. Ông đã có nhiều đóng góp trong các nghiên cứu về âm thanh, đặc biệt là lý thuyết về sự hình thành sóng xung kích cũng như các thí nghiệm chụp ảnh các sóng này. Sin của góc mà đường sinh của mặt nón của sóng xung kích tạo với phương chuyển động của vật thể sẽ tỷ lệ nghịch với số Mach: $\sin \alpha = \frac{1}{M}$.



Ernst Mach (1838 – 1916).

Một hiện tượng tương tự trong vật lý hạt nhân cũng được nhà khoa học Liên Xô Pavel Cherenkov phát hiện ra vào năm 1934. Trong môi trường nước, vận tốc của ánh sáng bị suy giảm nên các hạt như proton hay electron với động năng cao có thể có vận tốc cao hơn so với vận tốc ánh sáng trong môi trường! Do đó ta cũng có thể quan sát được hiện tượng các sóng xung kích tạo thành một mặt nón như với sóng âm. Trong các lò phản ứng hạt nhân, tương tác giữa hạt và nguyên tử nước sẽ cho ra sóng ánh sáng với bước sóng ngắn màu xanh lam. Việc đo bức

xạ Cherenkov có thể giúp định lượng tính phóng xạ của các thanh nhiên liệu đã qua sử dụng để đánh giá mức độ an toàn của lò phản ứng. Bức xạ Cherenkov cũng được sử dụng trong nhiều thí nghiệm vật lý hạt nhân khác. Người ta cũng có thể trộn các chất phóng xạ vào các chất khác như thuốc và dùng bức xạ Cherenkov để định lượng tương tác giữa chúng với các phân tử sinh học khi được truyền vào cơ thể sinh vật.



Hình 11. Bức xạ Cherenkov với bước sóng phát ra màu xanh trong lò phản ứng hạt nhân.

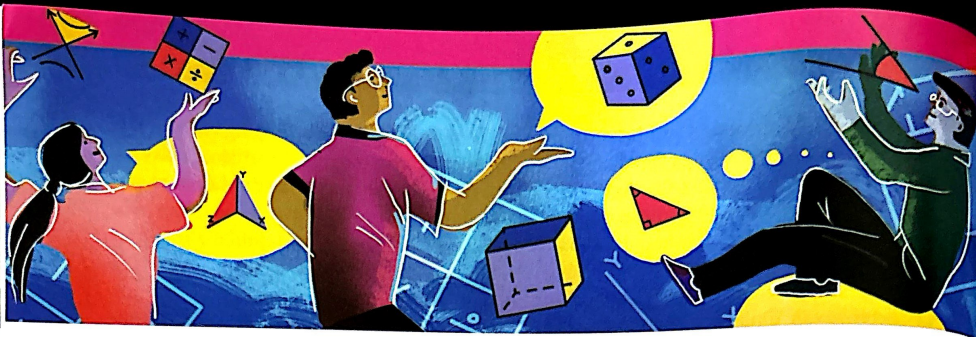
4. Lời kết

Năm 1850, Doppler trở thành giám đốc đầu tiên của Viện Vật lý Wien. Tuy nhiên sức khỏe ông suy giảm nhanh chóng vì bệnh phổi và ông mất sau một thời gian ngắn vào năm 1853. Có lẽ ông cũng không ngờ được rằng hiện tượng vật lý mà mình phát hiện ra lại có ảnh hưởng đến nhiều lĩnh vực của vật lý và y

tế đến vậy. Tác giả cũng hy vọng bài viết này có thể trở thành một nguồn tài liệu có ích cho các giáo viên và học sinh khi dạy và học về các nội dung vật lý có liên quan.

Tài liệu tham khảo

- [1] COMAN, I. "Christian Andreas Doppler? The Man and His Legacy." *European Journal of Echocardiography*, vol. 6, no. 1, Jan. 2005, pp. 7 – 10, academic.oup.com/ehjciimaging/article/6/1/7/2367221, <https://doi.org/10.1016/j.euje.2004.06.004>.
- [2] Eden, Alec. *The Search for Christian Doppler*. Springer Science & Business Media, 6 Dec. 2012.
- [3] Toman, Kurt. "Christian Doppler and the Doppler Effect." *Eos, Transactions American Geophysical Union*, vol. 65, no. 48, 1984, p. 1193, <https://doi.org/10.1029/e0065io48p01193>.
- [4] V Katsi, et al. "Christian Andreas Doppler: A Legendary Man Inspired by the Dazzling Light of the Stars." *PubMed*, 1 Apr. 2013. Accessed 3 Apr. 2024.
- [5] White, D.N. "Johann Christian Doppler and His Effect—a Brief History." *Ultrasound in Medicine & Biology*, vol. 8, no. 6, Jan. 1982, pp. 583 – 591, [https://doi.org/10.1016/0301-5629\(82\)90114-4](https://doi.org/10.1016/0301-5629(82)90114-4).



TRÒ CHƠI VỀ HÌNH CÓ TÂM ĐỐI XỨNG

Phần III: Gấp hoa sen bằng giấy

NGUYỄN THỤY VIỆT ANH¹

Hoa sen là loài hoa vô cùng quen thuộc với người dân Việt Nam. Từ xưa đến nay, hoa sen được xem là biểu tượng của sự thuần khiết với nét đẹp bình dị, thôn dã mà vẫn thanh cao, lúc nào cũng tỏa hương thơm ngan ngát. Với nét đẹp ấy, hoa sen đã nhẹ nhàng đi vào những bài ca dao của người dân Việt Nam, chẳng hạn như:

*“Hoa sen nở đẹp trong đầm
Mùi hương tinh khiết âm thầm tỏa bay
Yêu thương vun bón tháng ngày
Nay hoa hé nụ lòng đầy nao nao”*

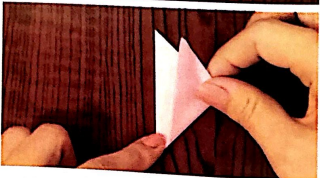
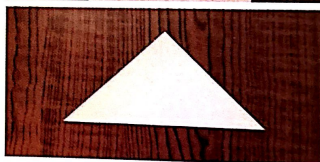
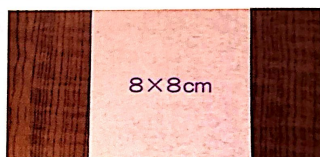


Hoa sen (Ảnh: Internet)

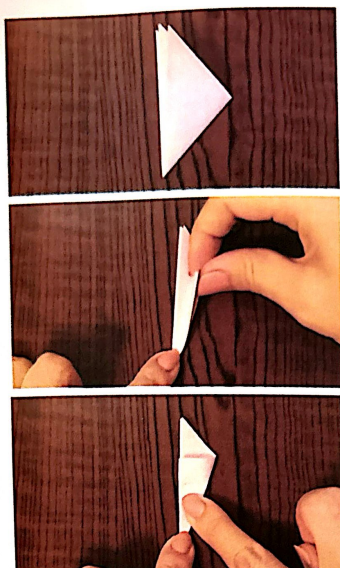
Ngày hôm nay, chúng ta sẽ cùng nhau làm những bông hoa sen bằng giấy nhé!

Chuẩn bị: Giấy màu, hồ dán, kéo, thước kẻ, bút.

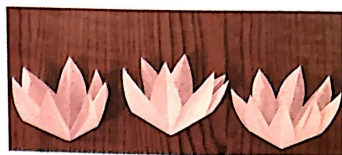
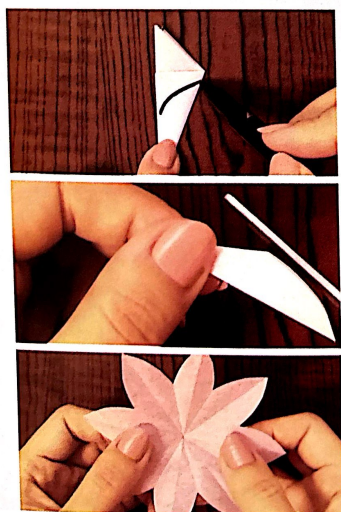
Bước 1: Cắt 3 mảnh giấy màu hồng có hình vuông với độ dài mỗi cạnh là 8cm. Sau đó gấp như các hình minh họa.



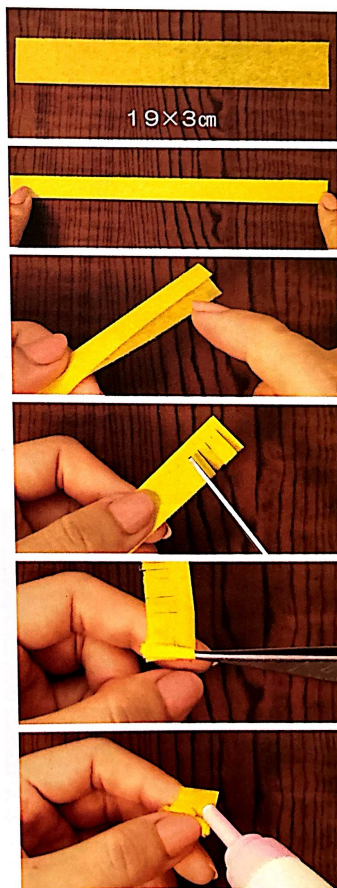
¹ Quảng Trị.



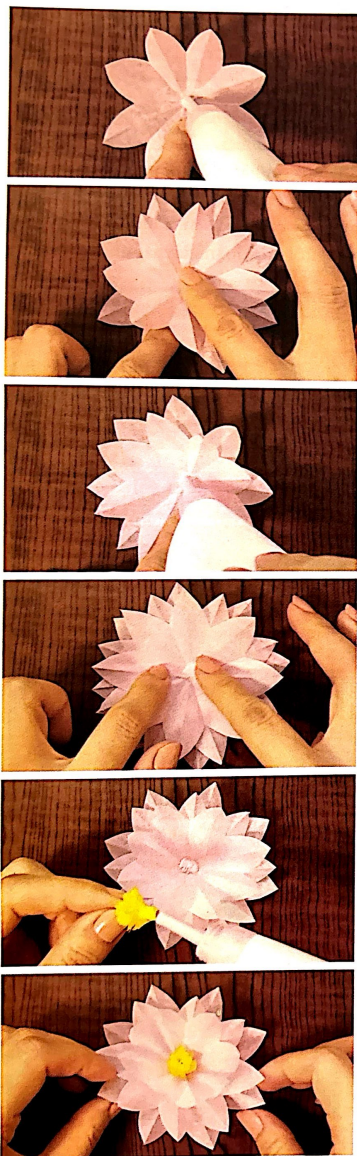
Bước 2: Dùng bút vẽ lên mảnh giấy màu hồng như hình minh họa, sau đó dùng kéo cắt theo nét bút rồi mở ra. Làm tương tự với các mảnh giấy màu hồng còn lại.



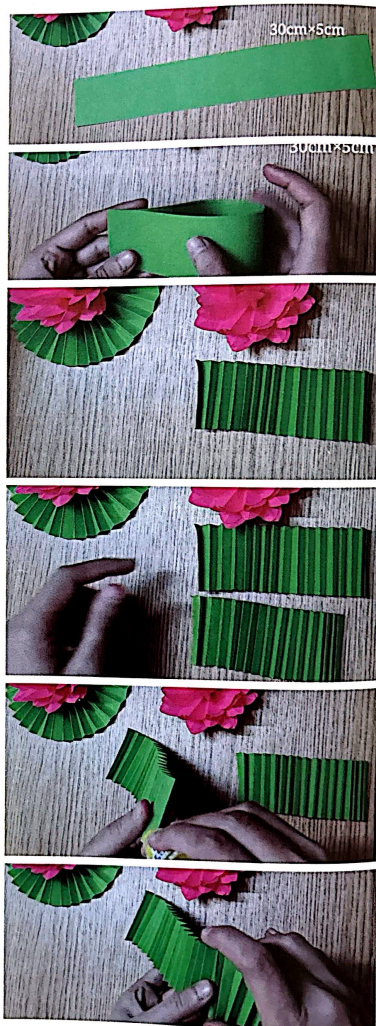
Bước 3: Cắt một mảnh giấy màu vàng hình chữ nhật với chiều dài là 19cm, chiều rộng là 3cm. Sau đó gấp đôi mảnh giấy lại rồi dùng kéo cắt và cuộn tròn như hình minh họa để làm nhụy của hoa sen. Dùng hồ dán để dán phần cuối của đoạn giấy làm nhụy hoa.



Bước 4: Dùng hồ dán để dán các cánh hoa sen và nhụy hoa sen với nhau.



Bước 5: Cắt 2 mảnh giấy màu xanh lá cây có hình chữ nhật với chiều dài là 30cm, chiều rộng là 5cm để làm lá của hoa sen. Gấp đôi nhiều lần mảnh giấy rồi mở ra. Làm tương tự với mảnh giấy màu xanh còn lại, sau đó dùng keo dán hai mảnh giấy màu xanh lá cây lại với nhau như hình minh họa.





Bước 6: Dùng tay lật phần trong của mảnh giấy màu xanh lá cây ra ngoài để tạo thành hình như bên dưới.



Bước 7: Dùng keo để dán lá cây và hoa sen lại với nhau.



Vậy là các em đã làm xong bông hoa sen rồi!



Tài liệu tham khảo

- [1] <https://www.youtube.com/watch?v=qLePKda3ETE>
- [2] <https://www.youtube.com/watch?v=x4SK6wz78-A&t=212s>

THỰC HÀNH ĂN KIÊNG¹

ELENA STANTE²

DIET



Chữ cái Σ trong tiếng Hy Lạp được dùng để viết tắt cho một tổng (summation). Để tính diện tích hay thể tích một hình, người ta chia nó thành từng lát nhỏ, rồi tính xấp xỉ từng lát đó, sau đó cộng lại. Chia càng nhỏ, kết quả càng chính xác. Kết quả cuối cùng, thay vì dùng Σ người ta sử dụng ký hiệu $\int$.

* Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>

¹ Giáo viên toán, Trung học Aristosseno, Taranto (Puglia), Italy.



MVSM NƠI ƯƠM MẦM TOÁN HỌC TRẺ

Trong bối cảnh cách mạng công nghệ phát triển như vũ bão, thị trường lao động thế giới ngày càng thêm "khát" nhân sự giỏi Toán và tiếng Anh.

Trường Toán Minh Việt - Minh Việt School of Math (MVSM) đã kết hợp với The Arts of Problem Solving (AoPS) - Chương trình giáo dục Toán học nâng cao số 1 tại Hoa Kỳ và hàng đầu thế giới, để mở ra mô hình học tập Toán ưu việt nhất.



SỨ MỆNH MVSM

Khởi đầu
Tinh yêu
Toán học

Khả năng
Sáng tạo

Tư duy
Logic

Nghệ thuật
giải quyết
các vấn đề

CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO

- **Đối tượng:** Học sinh tiểu học từ lớp 1 tới lớp 5
- **Giáo trình học:** Beast Academy của AoPS
- **Phương thức:** Học sinh học Online cùng giáo viên Mỹ
- **Thời gian học:**
 - **Lớp Toán:** 1 buổi/ tuần, chỉ với 5 triệu đồng/năm
 - **Lớp Tiếng Anh bổ trợ:** 4 buổi/tuần, 6 triệu đồng/năm.

Những học sinh xuất sắc của MVSM sẽ được tặng học bổng một phần hoặc toàn phần và được giới thiệu học Câu lạc bộ Toán Kỳ Lân với những Giáo sư Toán học hàng đầu Việt Nam.

**Beast
ACADEMY**
By Art of Problem Solving



NĂM HỌC 2024-2025

- **Mở đăng ký: 1/4/2024**
- **Khai giảng: 24/6/2024**

Phụ huynh có thể đăng ký cho con **chỉ học Toán, chỉ học Tiếng Anh** hoặc học cả **Toán và Tiếng Anh**.

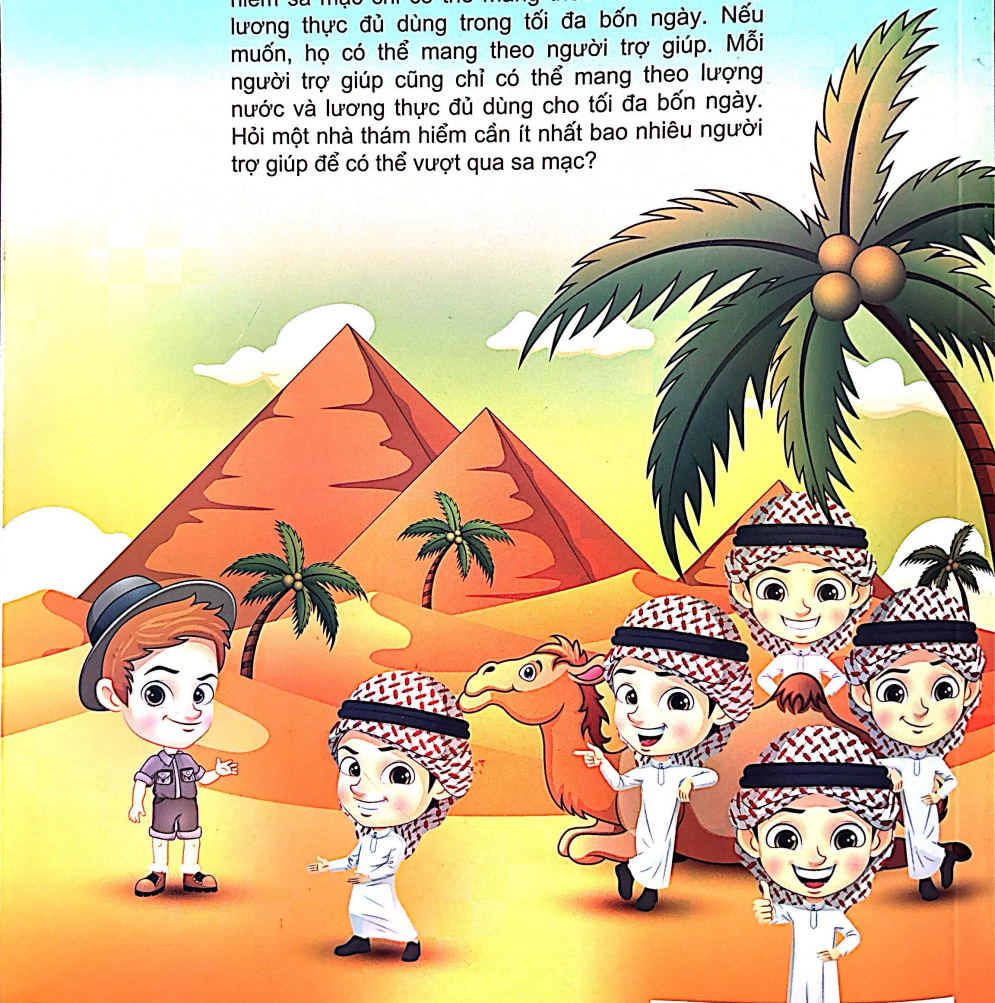
ĐỌC THÊM



ĐỐ VUI

Hoàng Phương (st)

Người ta chỉ có thể vượt qua sa mạc nọ bằng cách đi bộ và hành trình đó cần sáu ngày. Mỗi nhà thám hiểm sa mạc chỉ có thể mang theo nước và lương thực đủ dùng trong tối đa bốn ngày. Nếu muốn, họ có thể mang theo người trợ giúp. Mỗi người trợ giúp cũng chỉ có thể mang theo lượng nước và lương thực đủ dùng cho tối đa bốn ngày. Hỏi một nhà thám hiểm cần ít nhất bao nhiêu người trợ giúp để có thể vượt qua sa mạc?



Tài trợ bởi

M MINH VIỆT
ACADEMY



facebook.com/
pijournal



Giá: 35.000 đồng
www.pi.edu.vn