

TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 8 - SỐ 5

THÁNG 5, 2024

Thấu kính Fresnel và ngon hải đăng



ISSN 2525-2437



TÌM ĐỌC TRONG SỐ NÀY

Chuyên mục **Đời sống toán học** giới thiệu bài viết về nhà toán học người Pháp Michel Talagrand, chủ nhân của **Giải thưởng Abel** năm 2024, cùng một số đóng góp nổi bật của ông. Và trong chuyên mục **Đối thoại Toán học** tiếp tục cuộc trò chuyện giữa hai nhà toán học Terrence Tao và Steven Strogatz xung quanh câu hỏi **Thế nào là toán học tốt**.

Chuyên mục **Lịch sử toán học** mời các bạn đến với phần tiếp theo của câu chuyện dài về hình học phi Euclid. Cũng liên quan đến chủ đề lịch sử, bài viết trong chuyên mục **Quán toán** sẽ đưa chúng ta đi tìm câu trả lời cho câu hỏi **Ai là nhà toán học đầu tiên làm báo cáo bằng tiếng Anh ở Việt Nam**.

Chuyên mục **Tim hiểu Khoa học** có bài viết giới thiệu về **Thấu kính Fresnel** và những ứng dụng của nó từ thế kỷ 19 đến nay.

Trong chuyên mục **Toán của Bì**, các bạn đọc nhỏ tuổi có thể tiếp tục tìm hiểu về phép dời hình và công thức tính diện tích, cùng thám tử Xuân Phong chuẩn bị cho giải bóng đá của các thổ dân trên hòn đảo kỳ lạ. Cũng dành cho các bạn nhỏ, chuyên mục **Vui cùng Pi** hướng dẫn làm những chiếc quạt đồ chơi đơn giản từ những vật liệu dễ kiếm như que kem hay vỏ chai nước.

Góc toán Olympic số này giới thiệu một số bài toán trong kỳ thi toán chung Nam Phi – Estonia 2023.

Mời các bạn cùng đọc!

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (Tổng Biên tập)
Phùng Hồ Hải (Phó Tổng Biên tập)
Nguyễn Chu Gia Vương (Phó Tổng Biên tập)
Vũ Thế Khởi (Thư ký Tòa soạn)
Ngô Bảo Châu (Ủy viên)
Trần Nam Dũng (Ủy viên)
Phạm Triều Dương (Ủy viên)
Hà Duy Hưng (Ủy viên)
Nguyễn Khắc Minh (Ủy viên)
Nguyễn Hoàng Thạch (Ủy viên)

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phạm Huy Điển, Ngô Trung Hiếu, Nguyễn Thành Nam,
Ngô Văn Minh, Trần Văn Nhung, Tạ Duy Phương,
Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Duy Thái Sơn, Đỗ Đức Thái,
Phạm Văn Thiệu, Vũ Kim Thủy, Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn,
Lê Anh Vinh

Chế bản: Nguyễn Thái Hiệp
Đồ họa: Nguyễn Trần, Đoàn Xuân Trường
Nguyễn Chu Chloé Huệ Chi

Ảnh bìa 1: Đoàn Xuân Trường

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYỆN

Hà Vũ Anh, Bùi Văn Biên, Võ Quốc Bá Cẩn, Lưu Công,
Lưu Thị Thanh Hà, Nguyễn Hiệp, Phan Thanh Hồng,
Trần Quang Hùng, Trần Quốc Luật, Kiều Đình Minh,
Nguyễn Thị Nhung, Vũ Hồng Sơn, Lưu Bá Thắng,
Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thắng, Nguyễn Xuân Th,
Nguyễn Mạnh Toàn, Nguyễn Hoàng Vũ (phụ trách mục
Tim hiểu Khoa học).

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty TNHH Đầu tư TM In Hồng Đức
Tập chí ra hàng tháng
Giá: 35.000 đồng

TÒA SOẠN

Phòng 107, Nhà A5, Viện Toán học,
18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội
Email gửi bài: btt@pi.edu.vn
Email giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com
Điện thoại: (024) 3215.1407.
Website: www.pi.edu.vn

MỤC LỤC

ĐỐI THOẠI TOÁN HỌC

- 2 Điều gì tạo nên toán học tốt (Phần II)
(Người dịch: Nguyễn Đăng Khải Hoàn và Nguyễn Khánh Hưng)

TOÁN CỦA BỊ

- 10 Phép dời hình và công thức tính diện tích
Phần III: Phép dời hình (tiếp theo)
Ngô Văn Minh, Phan Ngọc Minh và Nguyễn Thị Nhung
- 14 Ai là fan của đội nào
Gia Dương
- 14 Các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi
- 16 Lời giải các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi (Số 1-2 năm 2024)
- 18 Perfect squares are everywhere (Part II)
Nghĩa Doan

QUÁN TOÁN

- 20 Ai là nhà toán học đầu tiên làm báo cáo bằng tiếng Anh ở Việt Nam
Ngô Việt Trung

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

- 22 Để ra kỳ này
- 23 Giải bài kỳ trước

CÁC KỲ THI TOÁN

- 38 Góc toán Olympic

ĐỜI SỐNG TOÁN HỌC

- 40 Michael Talagrand, chủ nhân giải Abel 2024
(Người dịch: Cấn Văn Hảo)

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

- 44 Hình học Phi Euclid
Phần II: Những nhà tiên phong
Lê Vũ Minh Trí và Nguyễn Duy Anh

TÌM HIỂU KHOA HỌC

- 50 Thấu kính Fresnel và ngọn hải đăng
Nguyễn Hoàng Vũ

VUI CÙNG PI

- 58 Trò chơi về hình có tâm đối xứng
Phần II: Làm quạt đồ chơi từ que kem và nhựa tái chế
Nguyễn Thụy Việt Anh
- 61 Lãi suất
DGFM
- 62 Sự khám phá ra số vô tỷ
Nicole Defend
- 63 Cho Pi lên hình
Dion Beatrice Baula
- 64 Câu chuyện về nghịch lý lạc đà
Papa Assunta



ĐIỀU GÌ TẠO NÊN TOÁN HỌC TỐT (Phần II)

(Người dịch: Nguyễn Đăng Khải Hoàn và Nguyễn Khánh Hưng)

Strogatz: Chúng ta hãy quay lại với bài báo của anh. Khi anh viết nó, trong thời điểm khá sớm của sự nghiệp, không hẳn lúc mới bắt đầu nhưng đại khái thế. Tại sao lúc ấy anh nghĩ việc định nghĩa thế nào là toán học tốt lại quan trọng?

Tao: À, tôi nghĩ... Tại thời điểm đó, tôi đã bắt đầu hướng dẫn nghiên cứu sinh, và tôi để ý rằng có một vài quan niệm sai lầm về việc cái gì là tốt hay cái gì không. Tôi cũng đã nói chuyện với một vài nhà toán học trong các lĩnh vực khác. Các lĩnh vực khác nhau có đóng góp khác nhau cho toán học, thế nhưng theo một nghĩa nào đó chúng ta đều đang nghiên cứu cùng một ngành.

Đôi khi ai đó lên tiếng khiến tôi thấy không hài lòng, như: “Loại toán học này chả có ứng dụng gì, vì vậy nó chả có giá trị nào.” Hoặc là, “Chứng minh này quá phức tạp; do đó nó chẳng có ích gì,” hay những câu tương tự thế. Hoặc ngược lại là, anh biết đấy, kiểu “Chứng minh này quá tầm thường, nên nó vô giá trị...” Nhiều người khá hóm hỉnh, có phần tỏ vẻ, đôi khi tôi muốn chống lại họ.

Theo kinh nghiệm của tôi, loại toán học tốt nhất đến khi ta có thêm một quan điểm, một cách suy nghĩ về toán học, hay từ một người ở lĩnh vực khác và áp dụng nó vào vấn đề mà ta

quan tâm. Vì vậy kinh nghiệm của tôi là làm sao sử dụng toán học một cách thuần thực, làm sao vận hành nó, điều này rất khác so với những cái như “một cách làm toán đúng đắn duy nhất”. Tôi đã cảm thấy luận điểm này cần được đưa ra, là thực sự có nhiều cách để làm toán, trong khi toán học vẫn thống nhất.

Strogatz: Đó thật là một sự hé lộ, bởi vì tôi đã từng tự thắc mắc, như trong phần giới thiệu đã đề cập đến rất nhiều nhánh toán học khác nhau mà anh đã khám phá, thậm chí tôi còn thiếu một vài ngành. Tôi có thể nhớ rằng, chỉ vài năm trước, các công trình của anh liên quan đến các bí ẩn của động lực học chất lưu, liệu rằng một vài phương trình nhất định mà chúng ta nghĩ là đủ tốt để xấp xỉ các chuyển động của nước hay không khí. Tôi không muốn đi sâu vào chi tiết, tôi chỉ muốn nói rằng mọi người nghĩ anh nghiên cứu lý thuyết số hay giải tích điều hòa, và bất chợt anh làm việc với các câu hỏi trong động lực học chất lưu. Tôi biết, đó là các phương trình đạo hàm riêng. Nhưng có vẻ những mối quan tâm rộng rãi của anh liên quan đến sự phóng khoáng chấp nhận các quan điểm khác nhau, các ý tưởng giá trị khác nhau từ tất cả các cách làm toán tốt.

Tao: Tôi đã quên nhắc đến điều này, nhưng có hai kiểu làm toán: kiểu nhím và kiểu cáo.

¹ Nguồn: “The Joy of Why” – một chuyên mục của Quanta Magazine <https://www.quantamagazine.org/what-makes-for-good-mathematics-20240201/>.

Cáo là kiểu biết một ít về mọi thứ, còn nhím là biết một thứ rất rất sâu. Và không có cái loại nào là tốt hơn cả, họ bổ trợ cho nhau. Nghĩa là, trong toán học, anh cần một số người rất sâu trong một lĩnh vực, và họ tường tận một chuyên ngành. Và anh cũng cần những người có thể thấy các kết nối giữa ngành này và ngành khác. Tôi chắc chắn tự nhận mình là cáo, nhưng tôi làm việc cùng với rất nhiều nhím. Công trình mà tôi tự hào nhất thường là hợp tác kiểu như vậy.

Strogatz: Vâng, họ có nhận ra họ là nhím hay không?

Tao: À, vai trò thay đổi theo thời gian. Kiểu như, một vài sự kết hợp mà ở đó tôi là nhím và người khác là cáo. Nó không phải kiểu cố định, anh biết đó, nó không nằm trong DNA của anh.

Strogatz: À, thú vị thật. Chúng ta có thể chọn một; hoặc chúng ta có thể khoác cả hai chiếc áo.

Thế các phản hồi với bài báo ấy thời điểm đó thì sao? Mọi người có nói gì lại với anh không?

Tao: Nói chung tôi nhận được sự phản hồi khá tích cực. Ý tôi là, Tập san của Hội Toán học Mỹ không phải là một tạp chí được biết đến rộng rãi. Và thực ra tôi cũng chẳng nói gì quá gây tranh cãi. Bên cạnh đó, trong các phương tiện truyền thông thời đó, có lẽ một vài blog toán đã đăng, nhưng bấy giờ không có Twitter. Chẳng có điều gì làm nó trở nên phổ biến được cả.

Tôi cũng thấy các nhà toán học không ưu tiên bỏ vốn thời gian và trí lực cho việc đầu cơ. Đại khái, một nhà toán học khác tên Minhyong Kim đã đưa ra một phép ẩn dụ rằng với các nhà toán học, sự tín nhiệm giống tiền tệ vậy. Nếu bạn chứng minh các định lý và thể hiện rằng mình hiểu về chủ đề đó, bạn đang tích trữ loại tiền bạc uy tín trong ngân hàng. Và khi bạn có đủ tiền, bạn có thể có khả năng đầu cơ một chút bằng cách trở nên tỏ ra

triết lý và nói những điều có thể là đúng thay vì những gì bạn có thể thực sự chứng minh.

Nhưng chúng ta có xu hướng thận trọng, và không muốn rút quá số tiền trong ngân hàng. Anh biết đó, chúng ta không muốn hầu như mọi công trình chỉ mang tính suy diễn và chỉ một phần trăm là các chứng minh thực sự.

Strogatz: Vâng, tôi có thể hiểu được điều ấy. Nhiều năm đã trôi qua, chúng ta đang nói về điều gì nhỉ? Đã hơn 15 năm rồi đấy.

Tao: Vâng, thời gian trôi mau thật.

Strogatz: Quan điểm của anh có thay đổi không? Có điều gì đó chúng ta cần xem lại không?

Tao: Văn hóa toán học đang thay đổi khá nhiều. Tôi đã từng có một tầm nhìn rộng đối với toán học, và bây giờ tôi thậm chí còn thấy rộng hơn.

Có một thí dụ cụ thể: Các chứng minh được sự hỗ trợ từ máy tính vẫn còn gây tranh cãi vào năm 2007. Có một giả thuyết nổi tiếng được gọi là giả thuyết Kepler, liên quan đến cách hiệu quả nhất để sắp xếp các quả bóng đơn vị trong không gian ba chiều. Và có một cách sắp xếp tiêu chuẩn, tôi nghĩ nó được gọi là cách sắp xếp trung tâm hình khối hoặc gì đó, mà Kepler phỏng đoán đó là cách sắp xếp tốt nhất có thể.

Điều này cuối cùng đã được giải quyết, nhưng chứng minh được hỗ trợ rất nhiều bởi máy tính. Nó khá phức tạp, và [Thomas] Hales cuối cùng đã thực sự tạo ra cả một ngôn ngữ máy tính để chính thức xác minh lời giải, nhưng nó không được chấp nhận như một chứng minh thực sự trong thời gian dài. Tuy vậy, sự kiện này minh họa rõ ràng cho tính gây tranh cãi của một lời giải cần sự hỗ trợ của máy tính.

Trong những năm qua, đã có rất nhiều ví dụ khác ngoài sự kiện kể trên, trong đó con người đã có thể quy dẫn một vấn đề phức tạp về một thứ cần máy tính để kiểm tra. Và

rồi sau đó máy tính thực sự đã giúp đỡ hoàn tất công việc. Chúng tôi đã phát triển các cách thức để làm điều này một cách có trách nhiệm. Bạn biết đấy, như việc làm sao công khai mã, dữ liệu, cách kiểm tra và những thứ liên quan đến mã nguồn mở, v.v. Và hiện nay, các chứng minh có sự hỗ trợ của máy tính đã được chấp nhận rộng rãi.

Bây giờ, tôi nghĩ, sự thay đổi văn hóa tiếp theo sẽ là liệu các chứng minh do AI tạo ra có được chấp nhận hay không. Hiện tại, các công cụ AI chưa đạt đến trình độ có thể tạo ra chứng minh để thực sự nâng cao các nghiên cứu toán học. Có thể các bài tập về nhà ở trình độ đại học, chúng có thể giải quyết được, nhưng chúng vẫn chưa đạt đến trình độ nghiên cứu. Tuy vậy, đến một khoảng nào đó, chúng ta sẽ bắt đầu thấy các bài báo có sự hỗ trợ của AI xuất hiện và sẽ có một cuộc tranh luận.

Dòng chảy của văn hóa toán học cũng đã thay đổi theo một số hướng. Trở lại năm 2007, chỉ một số ít các nhà toán học công bố tiền ấn phẩm trước khi xuất bản. Các tác giả sẽ giữ khư khư tiền ấn phẩm của mình cho đến khi nhận được thông báo chấp nhận từ tạp chí. Sau đó, họ mới có thể chia sẻ.

Nhưng bây giờ mọi người đều đưa bài viết của mình lên các máy chủ công cộng như *arXiv*. Có nhiều sự cởi mở hơn trong việc đăng video và bài trên blog, về nguồn gốc của ý tưởng của một bài báo. Bởi vì mọi người nhận ra rằng điều này khiến công việc có ảnh hưởng và tác động mạnh mẽ hơn. Nếu bạn cố gắng không công khai tác phẩm của mình và giữ bí mật về nó, nó sẽ không gây được tiếng vang lớn.

Toán học đã trở nên hợp tác hơn nhiều. Bạn biết đấy, 50 năm trước, tôi có thể nói rằng phần lớn các bài báo toán học là của một tác giả. Hiện nay, chắc chắn phần nhiều lại là hai, ba hoặc bốn tác giả. Và mới đây, chúng ta đã có thể bắt đầu thấy những dự án thực sự lớn như điều vẫn thường diễn ra trong các khoa

học khác, anh biết đấy, như hàng chục, hàng trăm người cộng tác. Điều đó vẫn còn khó khăn đối với toán, nhưng tôi nghĩ chúng ta sẽ đạt được.

Đồng thời, toán học đang trở nên liên ngành hơn nhiều. Chúng ta đang làm việc nhiều hơn với các lĩnh vực toán học khác nhau hay thậm chí là các ngành khoa học khác. Và nhờ có internet, chúng ta có thể cộng tác với mọi người trên khắp thế giới, cách chúng ta làm toán thực sự đang thay đổi.

Tôi hy vọng trong tương lai chúng ta sẽ có thể tận dụng được cộng đồng toán nghiệp dư nhiều hơn. Có những lĩnh vực khác như thiên văn học, nơi các nhà thiên văn học tận dụng rất nhiều từ cộng đồng thiên văn không chuyên, chẳng hạn như, anh biết đấy, rất nhiều sao chổi được tìm thấy bởi những người nghiệp dư.

Nhưng đối với các nhà toán học, có một số lĩnh vực toán học biệt lập như lát gạch, lát gạch hai chiều hay phá các kỷ lục về việc tìm số nguyên tố mà những người nghiệp dư có thể đóng góp và họ được hoan nghênh. Nhưng vẫn còn rất nhiều rào cản. Trong hầu hết các chuyên ngành, người học cần được đào tạo bài bản, cũng như phải được trang bị những tri thức mang tính bản chất, cho nên không thể nào huy động được một cộng đồng lớn tham gia. Nhưng điều này có thể thay đổi trong tương lai. Có lẽ tác động của AI cho phép các nhà toán học nghiệp dư đóng góp một cách có ý nghĩa cho toán học.

STROGATZ: Điều này rất thú vị. Vì vậy, những người nghiệp dư có thể, với sự trợ giúp của AI, đặt những câu hỏi mới hữu ích hoặc giúp khám phá tốt các câu hỏi hiện có, đại loại như vậy?

TAO: Tôi thấy có nhiều phương thức khác nhau. Chẳng hạn, hiện nay có những dự án để hình thức hóa các chứng minh các định lý lớn bằng những công cụ được gọi là trợ lý chứng minh, giống như ngôn ngữ máy tính

có thể xác minh 100% rằng một định lý có đúng hay không hay đã được chứng minh hay chưa. Điều này thực sự tạo điều kiện cho sự hợp tác quy mô lớn trong toán học.

Trước đây, nếu bạn cộng tác với 10 người khác để chứng minh một định lý và mỗi người đóng góp một bước thì mọi người phải xác minh lập luận của những người khác. Bởi vì vấn đề của toán học là nếu một bước mắc lỗi, toàn bộ mọi thứ có thể sụp đổ.

Vì vậy, bạn cần sự tin tưởng, và do đó điều này gây cản trở sự hợp tác thực sự ở quy mô lớn trong toán học. Nhưng hiện nay, đã có những ví dụ thành công về việc các định lý lớn được hình thức hóa ở những cộng đồng lớn, tất cả bọn họ không biết nhau, không tin tưởng lẫn nhau, nhưng cùng giao tiếp thông qua việc tải lên kho lưu trữ *GitHub* hoặc các hệ thống tương tự, chẳng hạn như, chứng minh các bước riêng lẻ trong toàn lập luận lớn. Và phần mềm chứng minh hình thức sẽ xác minh mọi thứ, nên bạn không cần phải lo lắng về độ tin cậy. Vì vậy, điều này đang kích hoạt các phương thức cộng tác mới mà trước đây chúng ta chưa từng thấy.

STROGATZ: Thật thú vị khi nghe được tầm nhìn của anh, Terry. Đó là một ý tưởng hấp dẫn. Anh đã nghe nói về cộng dân khoa học, nhưng tại sao lại không phải là cộng dân toán học chứ?

Nhưng tôi chỉ thắc mắc, có xu hướng nào khiến anh lo lắng không, chẳng hạn như chứng minh được hỗ trợ bởi máy tính hoặc chứng minh do AI tạo ra? Liệu chúng ta có biết rằng một số kết quả nhất định là đúng nhưng lại không hiểu tại sao?

TAO: Đó là một vấn đề. Ý tôi là, nó đã là một vấn đề ngay cả trước khi AI ra đời. Vì vậy, có nhiều lĩnh vực mà các bài viết về một chủ đề ngày càng dài hơn, hàng trăm trang. Và tôi hy vọng rằng ngược lại, AI thực sự có thể giúp đơn giản hóa và nó có thể giải thích cũng như chứng minh.

Vì vậy, đã có phần mềm thử nghiệm, chẳng hạn như nếu anh lấy một chứng minh đã được hình thức hóa, anh thực sự có thể chuyển đổi nó thành một tài liệu tương ứng mà con người có thể đọc được, nơi ta có chứng minh và thấy các bước giải. Nếu có một câu anh không hiểu anh có thể nhấp đúp vào nó và nó sẽ mở rộng thành các bước nhỏ hơn. Tôi nghĩ ta cũng có thể sớm có một chatbot AI ngồi cạnh trong khi đang xem xét chứng minh, nó có thể đặt câu hỏi và có thể giải thích từng bước như thể là tác giả. Tôi nghĩ chúng ta đã rất gần với điều đó.

Có những lo ngại. Chúng ta phải thay đổi cách giáo dục học sinh, đặc biệt là về cách giao bài tập về nhà truyền thống hiện nay, gần như những công cụ AI có thể trả lời ngay lập tức nhiều câu hỏi thi tiêu chuẩn. Vì vậy, chúng ta cần dạy cho học sinh những kỹ năng mới, như cách xác minh xem kết quả do AI tạo ra có chính xác hay không, và cách đưa ra ý kiến khác.

Và chúng ta có thể thấy sự xuất hiện của một khía cạnh thực nghiệm hơn trong toán học. Có vẻ như toán học gần như hoàn toàn mang tính lý thuyết, trong khi hầu hết các ngành khoa học đều có cả thành phần lý thuyết và thực nghiệm. Cuối cùng, chúng ta có thể có những kết quả mà lần đầu tiên chỉ được chứng minh bằng máy tính và như anh nói, chúng ta không hiểu. Nhưng sau khi chúng ta có dữ liệu mà AI và các chứng minh do máy tính cung cấp, chúng ta có thể tiến hành thử nghiệm.

Bây giờ có một chút toán học thực nghiệm. Người ta nghiên cứu những tập dữ liệu lớn về nhiều thứ khác nhau, chẳng hạn như các đường cong elliptic. Nhưng nó có thể trở nên lớn hơn nhiều trong tương lai.

STROGATZ: Anh có cái nhìn rất lạc quan khá giống tôi. Nó không giống như thời kỳ hoàng kim trong quá khứ. Nếu tôi nghe không nhầm thì anh nghĩ rằng sẽ còn rất nhiều điều thú vị ở phía trước.

TAO: Vâng, rất nhiều công cụ công nghệ mới có tính năng rất cao. Ý tôi là, AI nói chung có nhiều ưu và nhược điểm phức tạp. Đối với bên ngoài khoa học, nó có rất nhiều khả năng gây gián đoạn cho nền kinh tế, hay quyền sở hữu trí tuệ, v.v. Nhưng trong toán học, tôi nghĩ phần trăm tốt cao hơn nhiều các lĩnh vực khác.

Và anh biết đấy, internet thực sự đã thay đổi cách chúng ta làm toán. Bản thân cộng tác với rất nhiều người ở nhiều lĩnh vực khác nhau, tôi không thể làm điều này nếu không có internet. Thực tế là tôi có thể truy cập Wikipedia hoặc bất cứ trang web nào tương tự để bắt đầu học một chủ đề, hoặc tôi có thể gửi email cho ai đó và chúng tôi có thể cộng tác trực tuyến. Nếu tôi phải làm những việc theo kiểu cũ, nơi tôi chỉ có thể nói chuyện với mọi người trong khoa của mình và sử dụng thư tín cho mọi việc khác, thì tôi không thể làm toán như bây giờ.

STROGATZ:Ồ, vâng. Tôi phải cần nhấn mạnh những gì anh vừa nói, bởi vì tôi chưa bao giờ nghĩ trong một triệu năm nữa tôi sẽ nghe điều này: Terry Tao đọc Wikipedia để học toán?

TAO: Đó thường là lúc bắt đầu. Ý tôi không phải lúc nào cũng là Wikipedia, mà chỉ là để lấy từ khóa, sau đó tôi sẽ thực hiện tìm kiếm chuyên nghiệp hơn trên MathSciNet hoặc một số cơ sở dữ liệu khác. Nhưng đúng vậy, tôi có đọc Wikipedia.

STROGATZ: Đó không phải là một lời chỉ trích, thú thật, tôi cũng làm điều tương tự. Nếu có bất kỳ lời chỉ trích nào về toán học trên Wikipedia, thì có lẽ đôi khi nó hơi quá cao đối với người đọc nó hướng đến, tôi nghĩ vậy. Tất nhiên không phải lúc nào cũng thế, còn tùy vào bài viết. Mức độ đại chúng thay đổi rất nhiều từ bài viết này sang bài viết khác. Nhưng thật thú vị, tôi thích sự bộc bạch này của anh.

TAO: Ý tôi là, những công cụ này, ta phải có

khả năng kiểm tra đầu ra. Anh biết đấy, lý do tại sao tôi có thể sử dụng Wikipedia để làm toán là vì tôi đã đủ hiểu biết về toán học để có thể nghĩ thấy liệu một bài viết về toán học trên Wikipedia có đáng ngờ hay không. Nó có thể trích dẫn một số nguồn và một trong số chúng sẽ là nguồn tốt hơn các nguồn khác. Và tôi biết các tác giả, cũng như biết tài liệu tham khảo nào sẽ tốt hơn. Nếu tôi sử dụng Wikipedia để tìm hiểu về một chủ đề mà chưa có kinh nghiệm nào thì nó sẽ kiểu như một biến ngẫu nhiên vậy.

STROGATZ: Vậy là chúng ta đã nói khá nhiều về điều gì tạo nên toán học tốt, tương lai có thể có cho những loại hình toán học tốt mới nào. Nhưng có lẽ chúng ta nên giải quyết câu hỏi: Tại sao điều này lại quan trọng? Tại sao việc học tốt môn toán lại quan trọng?

TAO: À, vậy, trước hết, tại sao chúng ta lại có các nhà toán học? Tại sao xã hội đánh giá cao các nhà toán học và cung cấp cho chúng ta nguồn lực để làm những gì chúng ta làm? Anh biết đấy, đó là vì chúng ta tạo ra những giá trị. Chúng ta có thể có ứng dụng cho thế giới thực. Có sự quan tâm đến tri thức hay một số lý thuyết mà chúng ta phát triển vì cuối cùng nó sẽ mang lại cái nhìn sâu sắc trong những hiện tượng khác.

Và không phải tất cả các phần của toán học đều có giá trị như nhau. Ý tôi là, ta có thể tính toán nhiều và nhiều hơn nữa các chữ số thập phân của số pi, nhưng ở một điểm nào đó, ta không học thêm được gì nữa. Mọi chủ đề đều cần đánh giá vai trò của nó vì chúng ta phải phân bổ các nguồn lực. Có rất nhiều loại toán học. Những tiến bộ nào anh muốn nhấn mạnh và quảng bá để cho người khác biết, và những tiến bộ nào chỉ nên ngồi im lặng trong một tạp chí nào đó?

Ngay cả khi ta nghĩ về một chủ đề hoàn toàn khách quan và, kiểu như, chỉ có đúng hoặc sai, chúng ta vẫn phải đưa ra sự lựa chọn. Anh biết đấy, chỉ bởi vì thời gian là tài nguyên hữu hạn. Sự tập trung là tài nguyên hữu

hạn. Tiền bạc là tài nguyên hữu hạn. Vì vậy, những câu hỏi này luôn quan trọng.

STROGATZ: Vâng, rất thú vị khi anh đề cập đến việc quảng bá, vì đó là đặc điểm khác biệt trong công việc của anh. Bởi anh cũng đã rất nỗ lực để làm cho toán học trở nên dễ tiếp cận với công chúng thông qua blog của mình, qua các bài viết khác nhau anh đã viết. Tôi nhớ đã thảo luận về một bài viết mà anh viết trong tạp chí *American Scientist* về sự phổ quát và ý tưởng đó. Tại sao việc làm cho toán học trở nên dễ tiếp cận và dễ hiểu cho công chúng lại quan trọng? Mục tiêu của anh là gì khi anh cố gắng làm điều ấy?

TAO: Nó xảy ra một cách khá tự nhiên. Đầu sự nghiệp của tôi, World Wide Web vẫn rất mới, và các nhà toán học bắt đầu có các trang web với nhiều nội dung khác nhau, nhưng không có nhiều thứ mục trung tâm. Trước khi có Google và các công cụ tìm kiếm khác, việc tìm các nguồn tài nguyên cá nhân thực sự là khó khăn.

Vì vậy, tôi bắt đầu tạo ra những thư mục nhỏ trên trang web của mình. Và tôi cũng tạo các trang web cho các bài báo của riêng tôi, và tôi viết một số bình luận cho chúng. Ban đầu, điều đó nhằm đến lợi ích của bản thân tôi, nó đơn giản chỉ là một công cụ tổ chức, chỉ để giúp tôi tìm thấy các thứ mình cần. Như một sự khuyến mãi, nó công khai cho mọi người, nhưng tôi mới là người sử dụng chính của trang cá nhân này.

Nhưng tôi nhớ rất rõ, có một lần khi tôi viết một bài báo và tôi đăng nó lên trang web. Tôi có một trang con gọi là “Có gì mới?” Và tôi chỉ ghi rằng, “Đây là một bài báo. Trong đó có một câu hỏi mà tôi vẫn chưa thể trả lời, và tôi không biết cách giải quyết nó.” Tôi chỉ làm một bình luận nhỏ như thế. Nhưng sau đó khoảng hai ngày, tôi nhận được một email nói, “Ồ, tôi chỉ đang ngó qua trang chủ của anh. Tôi biết câu trả lời cho điều này. Có một bài báo sẽ giải quyết vấn đề của anh.”

Và điều đó làm cho tôi nhận ra, trước hết, là thực sự có người đang truy cập vào trang web của tôi, điều mà tôi thực sự không biết. Nhưng sự tương tác đó với cộng đồng thực sự có thể – vâng, nó có thể giúp tôi trực tiếp giải quyết các câu hỏi của mình.

Có một quy luật gọi là “định luật Metcalfe” trong mạng lưới, anh biết, nếu anh có n người, và họ đều nói chuyện với nhau, có khoảng n^2 kết nối giữa họ. Và vì vậy, càng nhiều công chúng thì diễn đàn nơi mỗi người có thể nói chuyện với mọi người khác càng lớn. Do đó, càng nhiều kết nối tiềm năng anh có thể tạo ra và càng nhiều điều tốt đẹp có thể xảy ra.

Trong sự nghiệp của tôi, rất nhiều khám phá mà tôi đã tìm ra, hoặc các kết nối mà tôi đã thực hiện là do sự tình cờ không mong đợi trước. Toàn bộ trải nghiệm trong sự nghiệp của tôi nói rằng nhiều kết nối hơn thì nhiều điều tốt đẹp xảy đến hơn.

STROGATZ: Tôi đã nghĩ tới một ví dụ tuyệt vời về điều anh vừa đề cập, nhưng tôi muốn nghe anh kể chi tiết hơn. Đó là những hợp tác mà anh đã có với những người trong lĩnh vực khoa học dữ liệu, dự án quan tâm đến các câu hỏi liên quan đến chụp ảnh cộng hưởng từ, MRI. Anh có thể chia sẻ cho chúng tôi thêm một chút về câu chuyện đó được không?

TAO: Vâng, khoảng năm 2006, 2005, nếu không nhầm. Vào thời điểm đó, có một chương trình liên ngành ở UCLA về phân tích hình học đa tỷ lệ, hoặc điều gì đó tương tự như thế, nơi họ kết hợp các nhà toán học thuần túy quan tâm đến loại hình học đa tỷ lệ theo cách của riêng họ, và những người có sẵn các vấn đề liên quan đến dữ liệu cụ thể.

Lúc ấy, tôi vừa mới bắt đầu làm việc trên một số vấn đề trong lý thuyết ma trận ngẫu nhiên, vì thế tôi được biết đến như một người có thể thao tác với các ma trận. Và tôi đã gặp một người quen, Emmanuel Candès, vì khi đó

anh ấy làm việc ở Viện công nghệ California (CalTech) ngay gần UCLA. Anh ta cùng với một đối tác khác, Justin Romberg, họ đã phát hiện ra hiện tượng kỳ lạ.

Chẳng hạn, họ xem xét các hình ảnh MRI, nhưng chúng rất chậm. Để thu thập đủ hình ảnh có độ phân giải thực sự cao của cơ thể con người hoặc đủ để có thể phát hiện được khối u hoặc bất kỳ đặc điểm y tế quan trọng nào mà ta muốn tìm, thường phải mất vài phút vì máy phải quét tất cả các góc độ khác nhau rồi tổng hợp dữ liệu. Và đây thực sự là một vấn đề, bởi vì với trẻ nhỏ chẳng hạn, ngồi yên ba phút trong máy MRI là cả một vấn đề.

Vì vậy, họ đang thử nghiệm một cách khác, sử dụng một chút đại số tuyến tính. Họ hy vọng sẽ cải thiện hiệu suất tốt hơn 10%, 20%. Anh biết đấy, hình ảnh sắc nét hơn một chút bằng cách tinh chỉnh thuật toán tiêu chuẩn.

Thuật toán tiêu chuẩn được gọi là xấp xỉ bình phương tối thiểu, còn lúc đó họ đang làm một việc khác, gọi là tối thiểu hóa biến phân toàn phần. Nhưng sau đó, khi họ chạy phần mềm máy tính, họ đã tái tạo được hình ảnh thử nghiệm gần như hoàn hảo. Đó là một cải tiến lớn, rất lớn. Nhưng họ không thể giải thích điều này.

Emmanuel có tham gia chương trình này và chúng tôi đang trò chuyện trong tiệc trà hay đại loại thế. Anh ấy vừa đề cập đến điều này và thực ra, suy nghĩ đầu tiên của tôi là anh chắc chắn đã mắc sai lầm trong tính toán của mình, rằng những gì anh ấy đang nói thực tế là không thể xảy ra. Và tôi nhớ khi về nhà, đêm đó tôi đã cố gắng viết ra một chứng minh rằng những gì họ đang thấy không thể

thực sự xảy ra. Nhưng rồi được nửa chừng, tôi nhận ra mình đã đưa ra một giả định sai lầm. Sau đó tôi phát hiện rằng điều ấy thực sự có thể đúng. Tôi đã tìm ra điều có thể là lời giải thích, và sau đó chúng tôi làm việc cùng nhau và thực sự đã tìm ra một câu trả lời hợp lý. Cuối cùng chúng tôi công bố nó.

Khi chúng tôi làm điều đó, mọi người nhận ra rằng có nhiều tình huống khác mà anh phải thực hiện một phép đo thường yêu cầu rất nhiều dữ liệu và trong một số trường hợp, anh có thể lấy lượng dữ liệu nhỏ hơn nhiều mà vẫn đạt được kết quả có độ phân giải thực sự cao.

Vì vậy, hiện nay, các máy MRI hiện đại chẳng hạn – một lần quét trước đây mất ba phút giờ có thể chỉ mất 30 giây nhờ có phần mềm này, thuật toán này đã được cài cứng hay mã hóa cứng vào máy.

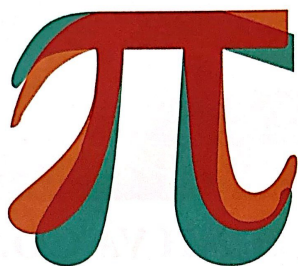
STROGATZ: Đó là một câu chuyện tuyệt đẹp và tuyệt vời. Ý tôi là, nó thể hiện toán học đang thay đổi cuộc sống, theo nghĩa đen, như trong ví dụ về hình ảnh y tế. Tôi thích sự tình cờ của nó và sự cời mờ của anh, anh biết đấy, khi nghe ý tưởng này và sau đó nghĩ, “điều này là không thể, tôi có thể chứng minh nó.” Và rồi nhận ra, thực ra là có thể. Thật tuyệt vời khi thấy toán học có những tác động như thế.

Được rồi, tôi nghĩ đã đến lúc chúng ta dừng lại, Terry. Tôi thực sự rất vui khi được thảo luận về bản chất của toán học tốt với anh. Cảm ơn rất nhiều vì đã tham gia cùng chúng tôi ngày hôm nay.

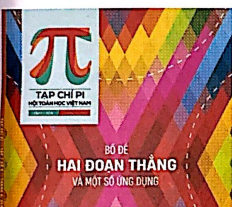
TAO: Vâng, rất hân hạnh.



Hội Toán học Việt Nam



Tạp chí Toán học cho mọi người



Tạp chí *Pi* là một ấn phẩm của Hội Toán học Việt Nam, với mục đích quảng bá Toán học tới cộng đồng. *Pi* được xuất bản hàng tháng, và được in màu toàn bộ (kể từ tháng 1/2020). Tạp chí mang vẻ đẹp toán học, kiến thức toán học tới mọi người qua các chuyên mục đa dạng với các nội dung phong phú, thân thiện và nhiều màu sắc.

Chúng tôi hy vọng rằng mỗi độc giả, từ trẻ em tới người lớn tuổi, với các kiến thức về Toán học khác nhau, đều tìm được những điều lý thú về Toán học cùng những ích lợi của nó, qua các chuyên mục phù hợp trong *Pi*.



Pi.edu.vn



: Pi của bạn



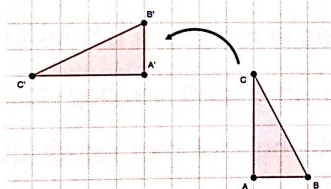
PHÉP DỜI HÌNH VÀ CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH

Phần III: Phép dời hình (tiếp theo)

NGÔ VĂN MINH, PHAN NGỌC MINH VÀ NGUYỄN THỊ NHUNG

3. Phép quay

Một trong những phép dời hình cũng rất hay gặp trong thực tế là phép quay. Phép quay xoay một hình xung quanh một điểm cố định cho trước được gọi là tâm quay.



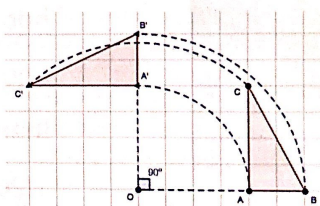
Hình 1

Ở hình minh họa trên, ta đã quay hình tam giác theo hướng ngược chiều kim đồng hồ đến một vị trí mới. Trong một phép quay hình tùy ý luôn có một điểm mà hình đó quay xung quanh, giống như tâm của một chiếc đồng hồ cùng với kim phút và kim giây.



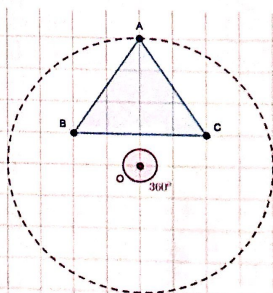
Hình 2

Trong ví dụ đưa ra ở trên, điểm đó được đánh dấu bằng điểm O như hình dưới đây.



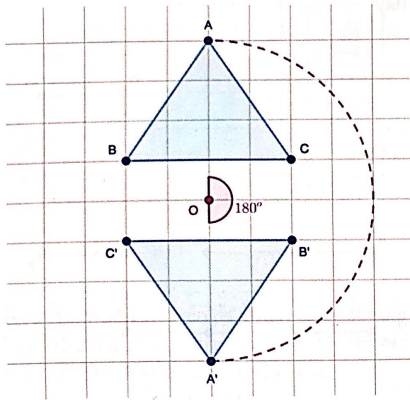
Hình 3

Khi một hình thực hiện hết một vòng quay và trở về vị trí ban đầu thì nó đã thực hiện một phép quay 360 độ,



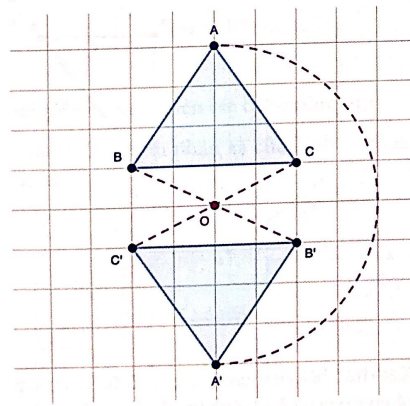
Hình 4

còn nếu quay nửa vòng thì nó thực hiện góc quay 180 độ.



Hình 5

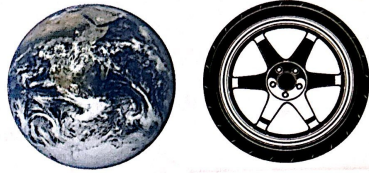
Từ đây ta có ngay một nhận xét: Một phép quay 180 độ là một phép đối xứng tâm. Mỗi điểm trong hình mới luôn tương ứng với một điểm trong hình cũ có khoảng cách đến tâm quay bằng nhau.



Hình 6

Phép quay cũng như phép phản xạ hay phép đối xứng tâm không làm thay đổi hình dạng cũng như kích thước của hình ban đầu và do đó không làm thay đổi diện tích của hình được quay.

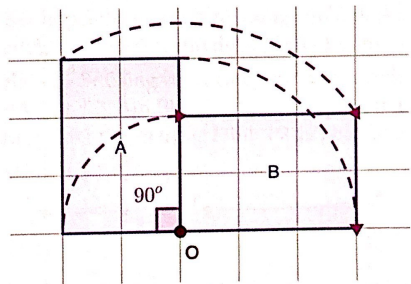
Phép quay được tìm thấy trong nhiều hoạt động trong cuộc sống: Trái đất quay, bánh xe quay, trò chơi vòng quay, ...



Hình 7

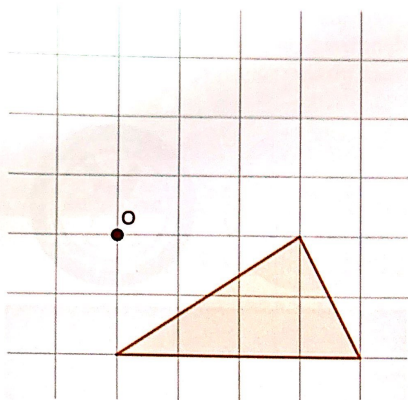
Dưới đây là ví dụ và bài tập để các bạn thực hành với cách dời hình bằng phép quay nhé.

Ví dụ 3.1: Trong hình vẽ dưới đây, hình chữ nhật B thu được bằng cách cho hình chữ nhật A quay một góc 90 độ (theo chiều kim đồng hồ) quanh điểm O.



Hình 8

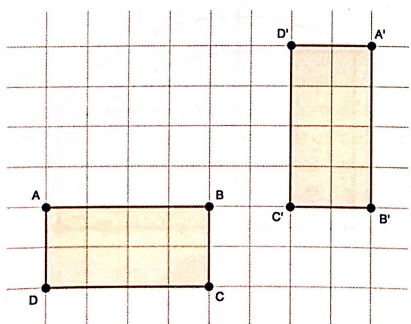
Bài tập 1: Hãy quay tam giác sau theo góc 90 độ ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm O.



Hình 9

Nếu cho trước tâm quay O thì tìm ảnh của một hình qua phép quay với tâm O khá nhanh chóng. Tuy nhiên cho trước hai hình là ảnh của nhau qua một phép quay, việc tìm tâm quay không đơn giản. Trong một số trường hợp thuận lợi, dựa vào một số tính chất của phép quay, chúng ta có thể “đoán” được tâm quay, như trong ví dụ dưới đây.

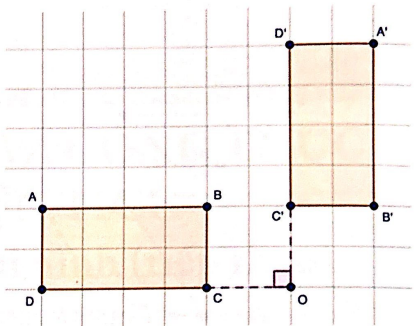
Ví dụ 3.2: Hình vẽ sau cho biết hình chữ nhật $ABCD$ được quay một góc 90° theo chiều kim đồng hồ để thu được hình chữ nhật $A'B'C'D'$. Hãy xác định vị trí tâm quay.



Hình 10

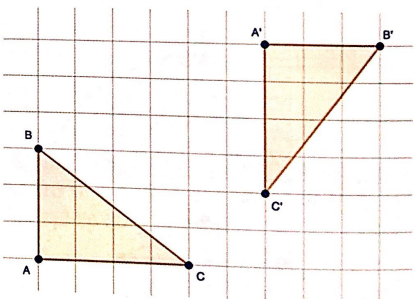
Lời giải: Ta thấy 2 điểm C và C' đều là đỉnh của một hình vuông cỡ 2×2 . Do đó tâm

quay cũng phải là một đỉnh của hình vuông đó và tâm quay O được cho như hình dưới đây.



Hình 11

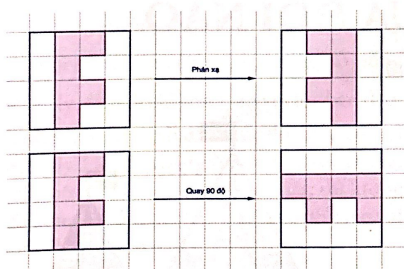
Bài tập 2: Hình vẽ dưới đây cho biết tam giác ABC được quay một góc 90° cùng chiều kim đồng hồ để thu được tam giác $A'B'C'$. Hãy xác định vị trí tâm quay.



Hình 12

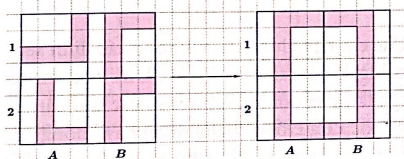
Kết thúc bài viết này, các em cùng luyện tập phép quay và ôn lại phép phản xạ bằng cách làm ví dụ sau nhé.

Ví dụ 3.3: Bạn An đã viết một chương trình máy tính để biến đổi hình ảnh của các viên gạch. Chương trình chỉ bao gồm hai thao tác: phản xạ theo chiều dọc hoặc quay 90° theo chiều kim đồng hồ.



Hình 13

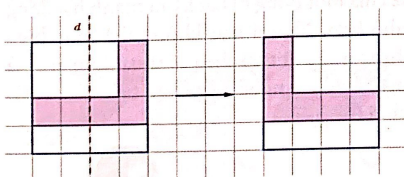
Nếu An muốn chuyển từ hình thứ nhất sang hình thứ hai như Hình 14 dưới đây thì các thao tác cần thực hiện như thế nào?



Hình 14

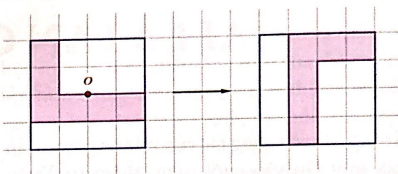
Lời giải: Ta thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Lấy ảnh phản xạ của hình A1 qua trục d .



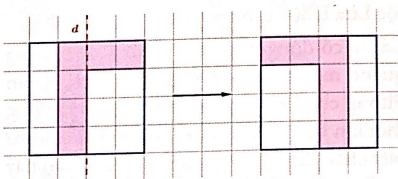
Hình 15

Sau đó xoay ảnh phản xạ quanh tâm O một góc 90 độ theo chiều kim đồng hồ.



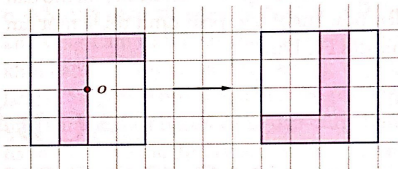
Hình 16

Bước 2: Lấy ảnh phản xạ của hình B1 qua trục d .



Hình 17

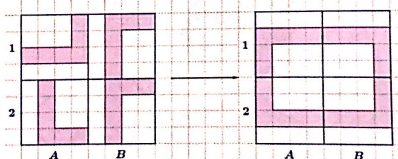
Bước 3: Xoay hình B2 quanh O một góc 180 độ theo chiều kim đồng hồ.



Hình 18

Kết hợp ảnh của các hình cùng với hình A2 giữ vị trí như cũ ta thu được hình cần tìm.

Bài tập 3: Cũng với chương trình máy tính ở Ví dụ 3.3, bạn Bình lại muốn chuyển sang hình thứ hai như trong Hình 19 thì phải thao tác như thế nào?



Hình 19

AI LÀ FAN CỦA ĐỘI NÀO

GIA DƯƠNG

Trong chuyến công tác của mình tại hòn đảo nọ, một lần vào cuối tuần, thám tử Xuân Phong mời 50 thổ dân tới nhà mình cùng ăn mừng lễ mở màn giải đá bóng mới của hòn đảo. Ta biết rằng, người dân đảo gồm hai bộ tộc: bộ tộc Trung thực, luôn nói thật, và bộ tộc Lừa Dối – luôn nói dối.

Cả 50 cổ động viên nhiệt thành ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn, trong khi Xuân Phong chạy đi chạy lại để phục vụ và đồng thời kín đáo theo dõi các thổ dân. Thám tử biết chắc chắn rằng, trong số 50 thổ dân này có đúng 25 thổ dân là fan của đội FC Dừa và 25 thổ dân là fan của đội FC Chuối, không ai là fan của cả hai đội này và 50 thổ dân cũng biết rõ người nào là fan của đội nào. Sau khi đã ngồi ổn định quanh bàn tròn, mỗi thổ dân đều nói: “ngồi bên phải cạnh tôi là một fan của đội FC Dừa”.



Các em hãy giúp Xuân Phong xác định xem trong số các fan của đội FC Dừa và trong số các fan của đội FC Chuối số các thổ dân từ bộ tộc Lừa Dối có bằng nhau hay không?

CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Nhà cách mạng trẻ tuổi Lý Tự Trọng sinh vào năm nào, nếu biết rằng năm đó có chữ số hàng chục bé hơn 9 lần so với chữ số hàng trăm, và bé hơn bốn lần so với chữ số hàng đơn vị?



2. Có ba đồng bi: đồng thứ nhất có 10 viên bi, đồng thứ hai có 15 viên bi và đồng thứ

ba có 20 viên bi. Hai người tham gia một trò chơi như sau: mỗi một người đến lượt mình sẽ chia một đồng bi bất kỳ ra thành hai đồng nhỏ hơn. Người nào không thể thực hiện được nước đi tiếp theo sẽ thua. Hỏi ai sẽ là người thắng: người chơi đầu tiên hay người chơi thứ hai?



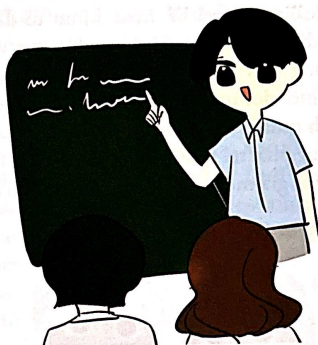
3. Sau khi bạn Hoa lấy $\frac{1}{3}$ số thạch trên châu ra khỏi ly trà sữa của mình, lượng đồ uống trong ly giảm đi chỉ còn $\frac{3}{4}$ so với lúc ban đầu. Bạn lấy bút dạ đánh dấu mức đồ uống còn lại trong ly. Hỏi nếu bây giờ Hoa tiếp tục lấy hết toàn bộ số thạch ra khỏi ly trà sữa, thì lượng đồ uống sẽ giảm đi còn bao nhiêu phần so với mức được đánh dấu bút dạ?



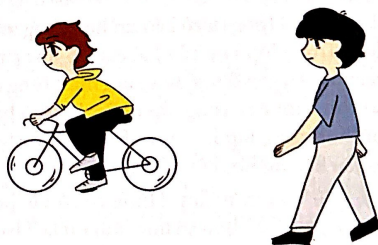
4. Có ba bạn Nam, Vũ và Minh đi vào rừng chơi lúc trời mưa, mỗi bạn đều mang theo ô và ủng đi mưa. Các bạn có ba chiếc ô với ba màu khác nhau là vàng, đỏ và xanh. Các đôi ủng đi mưa của các bạn cũng có đúng ba màu như vậy (mỗi đôi ủng của mỗi bạn đều cùng một màu, không có bạn nào đi ủng hai màu ở hai chân), tuy nhiên chỉ có Nam là có ủng và ô cùng một màu. Cả ủng và ô của Vũ đều không có màu xanh, còn Minh lại đi ủng đỏ. Em hãy xác định màu của ô và màu của ủng của mỗi bạn.



5. Trong lớp học có một thầy giáo và một số học sinh có mặt. Biết rằng tuổi của thầy giáo lớn hơn trung bình cộng của tuổi của tất cả các em học sinh là 24 tuổi, và tuổi của thầy giáo lớn hơn trung bình cộng của tuổi của tất cả những người có mặt trong lớp là 20 tuổi. Hỏi trong lớp có bao nhiêu em học sinh?

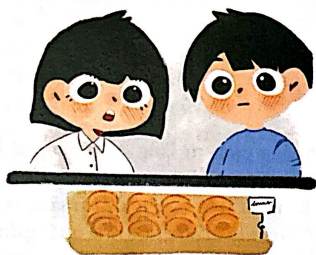


6. Khoảng cách từ làng A tới làng B là 40 km. Ông Lâm đi bộ với vận tốc không đổi, khởi hành từ làng A vào lúc 4h sáng về phía làng B. Sau khi đi bộ được nửa quãng đường, ông Lâm bị một người đi xe đạp cũng khởi hành từ A vào lúc 7h 20 phút đuổi kịp. Sau đó 1h, ông Lâm lại gặp một người đi xe đạp thứ hai khác khởi hành từ làng B vào lúc 8h 30. Biết rằng vận tốc của hai người đi xe đạp là như nhau. Em hãy xác định vận tốc đi bộ của ông Lâm.



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 1-2 năm 2024)

1. Ở tiệm bánh ngọt có bán hai loại bánh donut, loại to và loại bé. Loại donut to đắt gấp đôi loại donut bé. Hai bạn Hương và Bình cùng đến mua bánh donut, Hương mua 5 chiếc donut loại to và 3 chiếc loại bé, còn Bình mua 5 chiếc loại bé và 3 chiếc loại to. Hương phải trả nhiều hơn Bình là 20000 đồng. Hỏi giá mỗi loại donut là bao nhiêu tiền?



Lời giải. Số tiền mà Hương đã trả mua được 3 chiếc donut loại bé, còn số tiền Bình đã trả mua được 5 chiếc donut loại bé. Hiệu số giữa số bánh đã mua của hai bạn là 2 chiếc loại bé, còn hiệu số tiền phải trả là 20000 đồng. Vậy mỗi chiếc donut bé giá 10000 đồng, còn giá chiếc donut to là 20000 đồng.

Đáp số: 10000 đồng và 20000 đồng.

2. Cậu bé Hùng và cô bé Lan học cùng một lớp. Trong lớp học của hai em, số học sinh nam nhiều gấp đôi số học sinh nữ. Hùng có số bạn nam học cùng lớp nhiều hơn số bạn nữ học cùng lớp là 7 bạn. Hỏi Lan có bao nhiêu bạn nữ học cùng lớp?

Lời giải. Do trong lớp Hùng có số các học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ là 7 bạn, nên toàn bộ số học sinh nam nhiều hơn số học sinh nữ là 8 bạn. Hơn nữa, vì số học sinh

nam nhiều gấp đôi số học sinh nữ nên trong lớp có 16 bạn nam và 8 bạn nữ.

Đáp số: 7 bạn nữ.



3. Bé Tít được tặng một gói kẹo gồm kẹo sô-cô-la và kẹo caramel. Trong 10 phút đầu tiên, Tít ăn hết 20% số kẹo, hơn nữa có 25% trong số đó là kẹo caramel. Tiếp theo Tít lại ăn thêm 3 chiếc sô-cô-la, vì thế phần kẹo caramel trong số kẹo mà Tít đã ăn bị giảm xuống còn 20%. Hỏi trong túi kẹo ban đầu mà Tít được tặng có tất cả bao nhiêu chiếc kẹo?

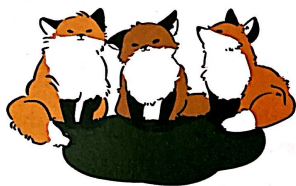


Lời giải. Trong lần ăn kẹo đầu tiên, số kẹo sô-cô-la nhiều gấp 3 lần số kẹo caramel. Sau đó, số kẹo sô-cô-la được ăn lại nhiều gấp 4 lần số kẹo caramel. Như vậy, lúc đầu Tít ăn

3 chiếc kẹo caramel và 9 chiếc kẹo sô-cô-la, và 12 chiếc kẹo này chiếm 20% tổng số kẹo. Suy ra, ban đầu trong túi có 60 chiếc kẹo.

Đáp số: 60 chiếc.

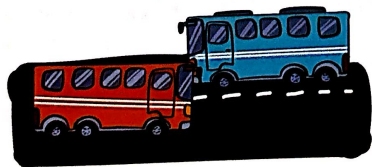
4. Có ba chú cáo là Bobby, Tommy và Ricky nói chuyện với nhau trên đồng cỏ. Tommy nói: “Bobby không phải là chú cáo ranh mãnh nhất trong số chúng ta”. Bobby nói: “Tôi ranh mãnh hơn Tommy”, Ricky nói: “Bobby ranh mãnh hơn tôi”. Biết rằng chú cáo ranh mãnh nhất trong ba chú nói dối, còn hai chú còn lại nói thật. Hỏi chú cáo ranh mãnh nhất tên là gì?



Lời giải. Bobby không thể ranh mãnh nhất, vì nếu chú ta ranh mãnh nhất, chú ta sẽ ranh mãnh hơn Tommy, và khi đó Bobby lại nói thật, trong khi chú cáo ranh mãnh nhất nói dối. Tommy cũng không thể là chú cáo ranh mãnh nhất, vì khi đó chú ta nói thật về Bobby, trong khi chú cáo ranh mãnh nhất nói dối. Như vậy còn một khả năng, đó chính là Ricky.

Đáp số: Ricky.

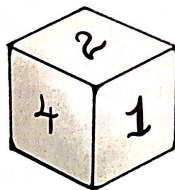
5. Hai chiếc xe bus đi ngược chiều về phía nhau trên cùng một con đường với các vận tốc không đổi. Chiếc thứ nhất khởi hành từ Hà Nội lúc 11h sáng và tới Hạ Long vào lúc 16h chiều, chiếc thứ hai khởi hành từ Hạ Long lúc 12h trưa và đến Hà Nội lúc 17h chiều. Hỏi hai chiếc gặp nhau lúc mấy giờ?



Lời giải. Do cả hai chiếc xe bus đều đi hết 5h, nên sau mỗi giờ chúng cùng đi được một khoảng cách là $S/5$, trong đó S là khoảng cách từ Hà Nội tới Hạ Long. Vào thời điểm chiếc thứ hai xuất phát, chiếc thứ nhất đã đi được $S/5$. Sau đó, mỗi chiếc xe bus phải vượt được quãng đường như nhau là $2S/5$ tới điểm gặp nhau. Vì thế, hai chiếc xe sẽ gặp nhau sau 2h tính từ lúc chiếc thứ hai rời Hà Long.

Đáp số: Sau 2 giờ.

6. Trên 6 mặt của một con xúc xắc hình lập phương được ghi các số từ 1 tới 6 theo một cách nhất định. Người ta gieo con xúc xắc đó hai lần. Ở lần thứ nhất, tổng các số ở bốn mặt bên của xúc xắc bằng 12, ở lần thứ hai tổng các số ở bốn mặt bên của xúc xắc bằng 15. Hỏi số ở mặt đối diện với mặt được ghi số 3 là số nào?



(Con xúc xắc có 6 mặt, bao gồm 4 mặt xung quanh, một mặt đáy và một mặt trên cùng).

Lời giải. Tổng tất cả các số trên các mặt của xúc xắc bằng 21. Trong lần gieo đầu tiên và lần gieo thứ hai, tổng các số ở mặt đáy và mặt trên bằng 9 và 6 một cách tương ứng.

Sau lần gieo thứ nhất, ta thấy hai mặt đáy và mặt trên chỉ có thể là 4 đối diện với 5 hoặc 3 đối diện với 6.

Giả sử 4 đối diện với 5. Sau lần gieo thứ hai, hoặc hai ô ở đáy và trên cùng sẽ là 1 đối diện với 5 hoặc 2 đối diện với 4 (mâu thuẫn).

Suy ra 3 đối diện với 6.

Đáp số: 6.



PERFECT SQUARES ARE EVERYWHERE (Part II)

NGHIA DOAN¹

This article is the second part of the series on expedition to find *Perfect Squares*.

Example 6. a, b, c are positive integers such that ab and bc are perfect squares. Prove that ca is also a perfect square.

Solution. Let $ab = m^2, bc = n^2$, then $(ab)(bc) = (mn)^2$, so $(ac)b^2 = (mn)^2$. It is easy to see that if p is a prime factor of b , then it is also a prime factor of mn , thus by canceling these prime factors of b , then $\frac{(mn)^2}{b^2}$ is an integer and a perfect square. Hence ac must be a perfect square.

Example 7. Prove that if x and y are sum of two perfect squares, then xy is also a sum of two perfect squares. In other words, if a, b, c, d integers such that $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ then $xy = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ can be written as a sum of two perfect squares.

Prove that if x and y are sum of a perfect square and twice of another perfect square, then xy is also a sum of a perfect square and twice of another perfect square. In other words, if a, b, c, d are integers such that $x = a^2 + 2b^2, y = c^2 + 2d^2$ then $xy(a^2 + 2b^2)(c^2 + 2d^2)$ can be written as a sum of a perfect square and twice of another perfect square.

Solution. See below,

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= (ac + bd)^2 + (ac - bd)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a^2 + 2b^2)(c^2 + 2d^2) \\ &= (ac + 2bd)^2 + 2(ac - bd)^2 \end{aligned}$$

Example 8. x, y, z are positive integers and their greatest common divisor is 1, such that

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}.$$

Prove that $x + y$ is a perfect square.

Solution. It is easy to transform the given equation as follow,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{z} \Rightarrow z(x + y) = xy \\ &\Rightarrow z^2 = (x - z)(x - y). \end{aligned}$$

Let d be a common divisor of $x - z$ and $y - z$, then d^2 is a common divisor of z^2 , thus $d \mid z$. But $x = (x - z) + z, y = (y - z) + z$, therefore $d \mid x, d \mid y$, which means that d is a common divisor of x, y, z . Therefore $\gcd(x - z, y - z) = 1$.

Thus, there exist k, l positive integers such that $x - z = k^2, y - z = l^2$, or $(kl)^2 = z^2$, so $kl = z$, which means that:

$$\begin{aligned} x + y &= (z + k^2) + (z + l^2) = k^2 + l^2 + 2kl \\ &= (k + l)^2. \end{aligned}$$

Example 9. A number n is called *interesting* if it can be written as $3x^2 + 32y^2$, where x, y are integers. Prove that if n is an *interesting* number, then $97n$ is an *interesting* number too.

¹ Ottawa, Canada.

Solution. Note that

$$\begin{aligned} 96n &= 96 \cdot 3x^2 + 96 \cdot 32y^2 \\ &= 3(32)y^2 + 32(3x^2). \end{aligned}$$

Thus, $96n$ is an *interesting* number. Now,

$$\begin{aligned} &97n \\ &= n + 96n \\ &= [3x^2 + 32y^2] + [3(32)y^2 + 32(3x^2)] \\ &= 3[x^2 + (32y)^2] + 32[y^2 + (3x)^2] \\ &= 3[x^2 + 64xy + (32y)^2] + 32(y^2 - 6yx + (3x)^2) \\ &= 3(x + 32y)^2 + 32(y - 3x)^2. \end{aligned}$$

Thus $97n$ is an *interesting* number too.

Example 10. Determine all perfect squares in the sequence $\{a_1, a_2, \dots\}$, where

$$a_3 = 91, a_{n+1} = 10a_n + (-1)^n, \forall n \geq 0.$$

Solution. Note that $a_2 = 9$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$ are perfect squares. By induction we can

prove that, for all $n \geq 2$,

$$\begin{cases} a_{2n} \equiv 5 \pmod{8} \\ a_{2n+1} \equiv 3 \pmod{8} \end{cases}$$

Since every odd perfect square is congruent to $1 \pmod{8}$, thus none of them can be a perfect square. The answer is $a_2 = 9$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$.

Vocabulary

Congruent: (t.t) đồng dư

Determine: (đ.t) xác định

Factor: (d.t) thừa số

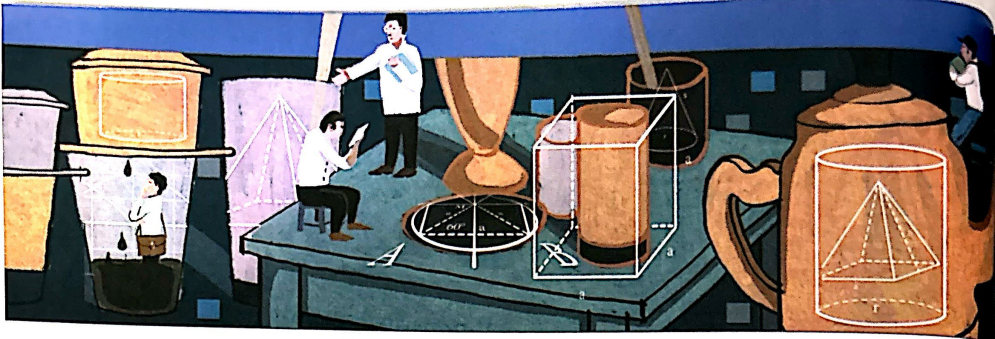
None: (d.t) không ai (cái gì)

none of them: không một ai trong họ (không một cái nào trong chúng)

Prime factor: thừa số nguyên tố

Twice: (d.t) gấp đôi, hai lần

Interesting: (tt) thú vị



AI LÀ NHÀ TOÁN HỌC ĐẦU TIÊN LÀM BÁO CÁO BẰNG TIẾNG ANH Ở VIỆT NAM

NGÔ VIỆT TRUNG¹

Đây là câu hỏi anh Vũ Văn Khu² đặt ra cho tôi. Rất khó trả lời câu hỏi này. Chắc nhiều người nghĩ đó là Neal Koblitz, người đến thăm Viện Toán lần đầu năm 1978. Tôi có nghe báo cáo của Koblitz và người phiên dịch hình như là GS Nguyễn Đình Ngọc.



GS Neal Koblitz và phu nhân, Ann Koblitz, chụp cùng GS Hoàng Tụy và GS Phạm Hữu Sạch tại Viện Toán học, năm 1984 (nguồn: Viện Toán học).

Trước đó có thể có một số nhà toán học Đông Âu đến thăm Việt Nam. Tôi đoán họ

báo cáo bằng tiếng nước họ vì tìm những người biết các thứ tiếng Đông Âu còn dễ hơn tìm người biết tiếng Anh do ta gửi nhiều sinh viên du học khắp Đông Âu. Ngay sau Koblitz có Jan-Eric Bjork và Kyoji Saito đến thăm Viện Toán. Tôi được phân công đưa đón họ mặc dù chỉ vẽ về chút ít tiếng Anh.

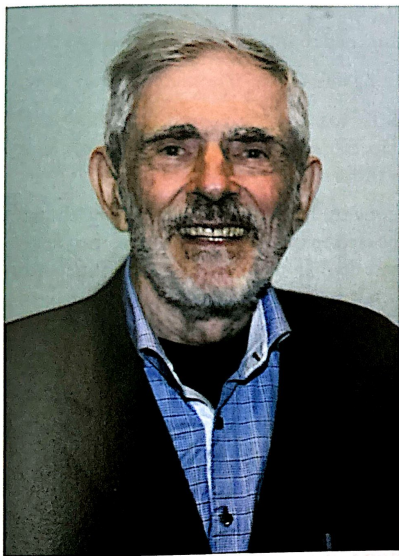
Tôi biết có một nhà toán học người Mỹ đến thăm Việt Nam trước 1978 tên là Chandler Davis. Ông ấy có liên hệ với tôi về chuyện gửi tạp chí cho thư viện Viện Toán khi tôi phụ trách trao đổi tạp chí Acta Mathematica Vietnamica những năm 90. Davis lúc đó là tổng biên tập tạp chí Mathematical Intelligencer về văn hoá toán học. GS Hoàng Tụy nói ông Davis rất có cảm tình với Việt Nam. Thông tin trên Internet cho thấy ông đến thăm VN năm 1971, lúc đó còn trong chiến tranh chống Mỹ. Ông có bài báo "Mathematics in China and Vietnam - what we can learn?" đăng trong tập san Science for the People, Vol. 4, No. 2, 1972. Theo bài viết, Davis có gặp GS Hoàng Tụy. Lúc đó Viện Toán đã thành lập nên tôi đoán rằng ông ấy có làm báo cáo khoa học.

Tìm trên mạng theo từ khoá "mathematician visit Hanoi Vietnam war" tôi chỉ tìm thấy

¹ Viện Toán học.

² Hiện đang làm việc tại Nanyang Techninical University, Singapore.

có nhà toán học Mỹ Robert Greenblatt đến thăm Việt Nam năm 1968 trong một phái đoàn của phong trào phản chiến tại Mỹ trước 1971. Ông là chủ tịch “Ủy ban vận động quốc gia nhằm kết thúc chiến tranh Việt Nam”. Một thành viên phái đoàn có bài viết “Trip to Hanoi” đăng trên tờ Esquire Magazine 9/1968.



Chandler Davis (1926 – September 24, 2022), ảnh chụp năm 2012 (nguồn Wikipedia).

Bài viết kể về chuyến đi gặp sáu nhà toán học ở Đại học Tổng hợp Hà Nội. Có thể đoán

Greenblatt không làm báo cáo vì ông mới bảo vệ luận án tiến sĩ và có duy nhất một công bố lúc đó. Greenblatt là người Do Thái gốc Hung, lúc 6 tuổi bị đưa vào trại tập trung của phát xít Đức, được Hồng quân Liên Xô giải phóng. Ông từng bị đi tù vì các hoạt động chống chiến tranh Việt Nam.

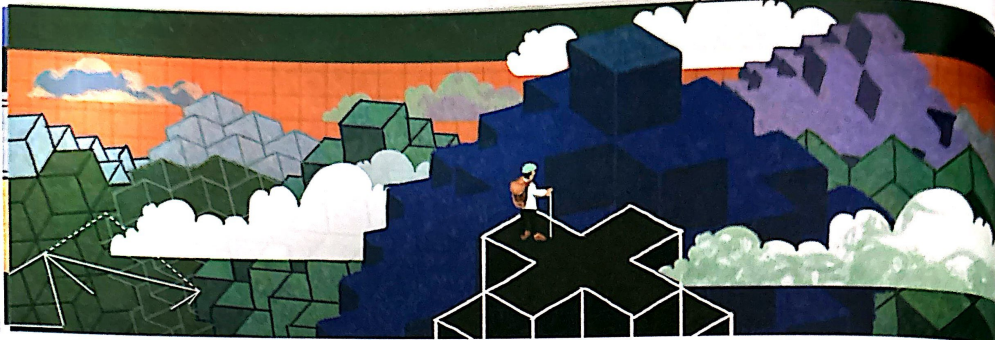
Trước 1975 có rất ít nhà toán học từ phương Tây đến Việt Nam, hầu hết từ Pháp. Không kể các giảng viên Pháp của Đại học Đồng Dương hay Đại học Sài Gòn, Alexander Grothendieck có lẽ là nhà toán học phương Tây đầu tiên đến giảng bài ở Việt Nam năm 1967. Sau đấy là Laurent Schwartz năm 1968. Cho đến năm 1971 thì không thấy ai nữa. Như vậy có thể tạm thời kết luận ông Chandler Davis là nhà toán học làm báo cáo bằng tiếng Anh đầu tiên ở Việt Nam.

Chandler Davis là đảng viên đảng cộng sản Mỹ, từng bị đi tù vì không hợp tác với Ủy ban hạ viện về những hành vi không phù hợp Mỹ (House Unamerican Activities Committee). Một công trình của ông viết trong tù ghi nhận “Nghiên cứu được hỗ trợ bởi hệ thống nhà tù liên bang. Các quan điểm thể hiện trong bài báo này là của tác giả, không nhất thiết là của Cục nhà tù liên bang”.

Tham khảo

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Chandler_Davis

[2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Greenblatt_\(anti_war_activist\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Greenblatt_(anti_war_activist))



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục “Thách thức kỳ này” cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A , và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm LaTeX, Word tới btt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P801–P810: trước ngày 15/6/2024.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P801. (Mức B) Bác An có một mảnh đất hình chữ nhật kích thước $25\text{ m} \times 35\text{ m}$, trong đó có 3 khu vườn trồng hoa hình tròn có đường kính 5 m . Chứng minh rằng, cho dù 3 khu vườn đó ở vị trí nào trong mảnh đất, bác An vẫn có thể làm thêm một khu vườn hình chữ nhật, có kích thước $10\text{ m} \times 15\text{ m}$ trên mảnh đất ấy.

Đặng Hải, Hà Nội

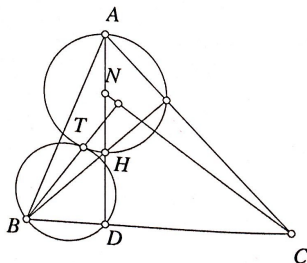
P802. (Mức B) Biết rằng, phương trình

$$x^4 + x - 1 = 0$$

có đúng hai nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng, tổng của hai nghiệm đó là nghiệm của phương trình $x^6 + 4x^2 - 1 = 0$.

Trần Quốc Luật, Tp. Hồ Chí Minh

P803. (Mức B) Cho tam giác nhọn, không cân ABC , với đường cao AD và trực tâm H . N là trung điểm AH . Qua các điểm B, D vẽ một đường tròn tiếp xúc ngoài với đường tròn đường kính AH , tại điểm T . Chứng minh BT vuông góc với CN .



Nguyễn Nhật Huy, Nghệ An

P804. (Mức B) Cho a, b là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + 4ab + 2 \geq 3(a + b).$$

Hoàng Ngọc Minh, Hà Nội

P805. (Mức B) Cho các số nguyên dương a, d . Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho số $a + kd$ có 4 chữ số đầu tiên, tính từ trái sang phải, lần lượt là 2, 0, 2, 4.

Trịnh Bá Hiếu, Nghệ An (st)

P806. (Mức B) Cho bảng ô vuông kích thước 8×8 . Tìm số nguyên dương $n \geq 4$ nhỏ nhất có tính chất: khi tô màu n ô vuông bất kỳ của bảng, luôn tồn tại một hình bình hành có bốn đỉnh là tâm của bốn ô vuông được tô màu.

Nguyễn Tiến Lâm, Hà Nội

P807. (Mức A) Giả sử $P(x)$ là đa thức hệ số thực thỏa mãn

$$P(x)^{2024} - P(2x - 1)^{2023} = P(x^{2024} + x - 1)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $P(x)$ là đa thức hằng.

Kiều Đình Minh, Phú Thọ

P808. (Mức A) Ta gọi một đa thức một biến là đa thức đẹp, nếu mỗi hệ số của nó là 0 hoặc 1, và tổng các hệ số bằng 2024. Chứng minh rằng

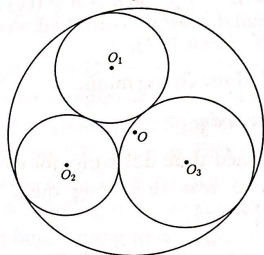
a) Với mỗi số tự nhiên k , nếu $P(x)$ là một đa thức đẹp thì đa thức $P(x)^2$ có không quá $2024 - 2k$ hệ số bằng $2k + 1$.

b) Với mỗi $k \in \{1, \dots, 1012\}$, tồn tại một đa thức đẹp $P(x)$ sao cho đa thức $P(x)^2$ có đúng $2024 - 2k$ hệ số bằng $2k + 1$.

Bùi Khánh Vinh, Tp. Hồ Chí Minh

P809. (Mức A) Cho đường tròn (O, R) và các đường tròn $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3)$ cùng tiếp xúc trong với (O) và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng minh rằng

$$R_1 + R_2 + R_3 \leq 3(2\sqrt{3} - 3)R.$$



Nguyễn Minh Hà, Bùi Viết Lộc, Hà Nội

P810. (Mức A) Cho số nguyên dương $n \geq 2$, và cho tập S có $n + 1$ phần tử. Ký hiệu H_n là tập hợp tất cả các hoán vị của n phần tử đôi một khác nhau thuộc S .

Ta gọi hai hoán vị, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, thuộc H_n là hai hoán vị "giao nhau", nếu tồn tại $i, k \in \{1; 2; \dots; n\}, i \neq k$, sao cho $x_i = y_k$. Hỏi, có thể lấy ra từ H_n tối đa bao nhiêu hoán vị đôi một "giao nhau"?

Nguyễn Khắc Minh, Hà Nội (st)

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P727. (Mức A) Cho số nguyên $k \geq 3$. Xét các số thực không âm x, y, z thỏa mãn

$$x + y + z \leq 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^k (y^{k-1} + z^{k-1}) + y^k (z^{k-1} + x^{k-1}) + z^k (x^{k-1} + y^{k-1}).$$

Lời giải.

◊ Cách 1 (dựa theo Đáp án do BBT cung cấp).

Trước hết, ta có Nhận xét sau:

Nhận xét. Với a, b là hai số thực không âm, $b \leq a$, ta có:

$$a^n + b^n \leq \left(a + \frac{b}{2}\right)^n,$$

với mọi số nguyên $n \geq 2$.

Chứng minh.

Xét số nguyên $n \geq 2$ tùy ý.

Do $a, b \geq 0$, nên theo công thức Nhị thức Newton, ta có:

$$\begin{aligned} & \left(a + \frac{b}{2}\right)^n \\ & \geq a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot \frac{b}{2} \\ & \geq a^n + n \cdot b^{n-1} \cdot \frac{b}{2} \quad (\text{do } a \geq b \geq 0 \text{ và } n \geq 2) \\ & \geq a^n + b^n \quad (\text{do } n \geq 2). \end{aligned}$$

Nhận xét được chứng minh.

Trở lại bài toán.

Do P là biểu thức đối xứng đối với x, y, z , nên không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$.

Đặt $u = x + \frac{z}{2}$ và $v = y + \frac{z}{2}$. Theo giả thiết của bài toán, ta có $u, v \geq 0$ và

$$0 \leq u + v = x + y + z \leq 1. \quad (*)$$

Do $z \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} P & \leq x^k (y^{k-1} + z^{k-1}) + y^k (z^{k-1} + x^{k-1}) \\ & \quad + z^k (x^{k-1} + z^{k-1} + y^{k-1} + z^{k-1}). \end{aligned}$$

Từ đó, do $0 \leq z \leq x, y$ và $k \geq 3$, nên theo Nhận xét trên, suy ra

$$\begin{aligned} P & \leq x^k \cdot v^{k-1} + y^k \cdot u^{k-1} + z^k (u^{k-1} + v^{k-1}) \\ & = u^{k-1} (y^k + z^k) + v^{k-1} (x^k + z^k) \\ & \leq u^{k-1} \cdot v^k + v^{k-1} \cdot u^k \\ & = (uv)^{k-1} \cdot (u + v) \\ & \leq (uv)^{k-1} \quad (\text{do } (*)) \\ & \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^{2(k-1)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2(k-1)} = \frac{1}{4^{k-1}}. \end{aligned}$$

Hơn nữa, dễ thấy $x = y = \frac{1}{2}, z = 0$ là các số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và tại đó $P = \frac{1}{4^{k-1}}$.

Vì vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\frac{1}{4^{k-1}}$.

♦ **Cách 2** (của thầy Võ Quốc Bá Cẩn).

Ký hiệu lại P bởi $P(x, y, z)$.

• Dễ thấy, tại $x = y = z = 0$, ta có

$$P(0, 0, 0) = 0. \quad (1)$$

• Xét x, y, z không đồng thời bằng 0, và thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Khi đó, $0 < x + y + z \leq 1$. (2)

Đặt $t = \frac{1}{x + y + z}$. Do (2) nên $t \geq 1$.

Đặt $a = tx, b = ty, c = tz$; ta có $a, b, c \geq 0$ và

$$a + b + c = t(x + y + z) = 1. \quad (3)$$

Do $x, y, z \geq 0$ và $t \geq 1$, nên

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c.$$

Từ đó, do $k > 0$ và $k - 1 > 0$ (vì $k \geq 3$), suy ra

$$\begin{aligned} 0 & \leq x^k \leq a^k, 0 \leq y^k \leq b^k, 0 \leq z^k \leq c^k; \\ 0 & \leq x^{k-1} \leq a^{k-1}, 0 \leq y^{k-1} \leq b^{k-1}, 0 \leq z^{k-1} \leq c^{k-1}. \end{aligned}$$

Vì vậy, $P(x, y, z) \leq P(a, b, c)$. (4)

Xét $P(a, b, c)$.

Do $P(a, b, c)$ là biểu thức đối xứng toàn phần đối với a, b, c , nên không mất tính tổng quát, giả sử

$$a \geq b \geq c \geq 0.$$

Khi đó, ta có:

$$a \geq \frac{a + b + c}{3} = \frac{1}{3} \quad (\text{do } (3)), \quad (5)$$

và

$$\begin{aligned} 0 & \leq bc \leq ca \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ & \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \\ & = \frac{1}{4} \quad (\text{do } (3)). \end{aligned}$$

Vì thế

$$\begin{aligned}
 &P(a, b, c) \\
 &= a^k (b^{k-1} + c^{k-1}) + b^k (c^{k-1} + a^{k-1}) \\
 &\quad + c^k (a^{k-1} + b^{k-1}) \\
 &= (ab)^{k-1} (a+b) + (bc)^{k-1} (b+c) \\
 &\quad + (ca)^{k-1} (c+a) \\
 &= (ab)^{k-2} \cdot ab(1-c) + (bc)^{k-2} \cdot bc(1-a) \\
 &\quad + (ca)^{k-2} \cdot ca(1-b) \text{ (do (3))} \\
 &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \cdot ab(1-c) + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \cdot bc(1-a) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2} \cdot ca(1-b) \\
 &= \frac{1}{4^{k-2}} (ab(1-c) + bc(1-a) + ca(1-b)) \\
 &= \frac{1}{4^{k-2}} (a(b+c) + bc(1-3a)) \\
 &\leq \frac{1}{4^{k-2}} \cdot a(b+c) \text{ (do (5))} \\
 &\leq \frac{1}{4^{k-2}} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4^{k-1}} \text{ (do (3))}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Từ (4) và (6), suy ra

$$P(x, y, z) \leq \frac{1}{4^{k-1}}. \tag{7}$$

• Từ (1) và (7), suy ra ta có (7) với mọi x, y, z thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Hơn nữa, dễ thấy $x = y = \frac{1}{2}, z = 0$ là các số thực thỏa mãn các điều kiện của đề bài, và tại đó $P = \frac{1}{4^{k-1}}$.

Vì vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $\frac{1}{4^{k-1}}$.

Bình luận và Nhận xét

1. So với cách giải 1, cách giải 2 tuy có phần “dài dòng” hơn, nhưng nó cho thấy sự không cần thiết của giả thiết “nguyên” của k . Vì thế, cách giải 2 cho ta một khái quát của bài đã ra:

Bài toán khái quát. Cho số thực $\alpha \geq 2$. Xét các số thực không âm x, y, z thỏa mãn

$$x + y + z \leq 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^\alpha (y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1}) + y^\alpha (z^{\alpha-1} + x^{\alpha-1}) + z^\alpha (x^{\alpha-1} + y^{\alpha-1}).$$

2. Cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tập chí vẫn chưa nhận được lời giải nào từ bạn đọc.

Võ Quốc Bá Cẩn – Nguyễn Khắc Minh

P771. (Mức B) Để chuẩn bị cho việc biên soạn đề thi Olympic các môn khoa học năm 2024, Ban tổ chức đã huy động một số giảng viên tham dự 10 cuộc họp. Biết rằng, mỗi cuộc họp có đúng 20 giảng viên tham dự và không có hai giảng viên nào cùng có mặt ở hai cuộc họp. Chứng minh rằng, có ít nhất 63 giảng viên được huy động để tham dự các cuộc họp.

Lời giải (của người chấm bài).

Đánh số 10 cuộc họp lần lượt bởi 1, 2, 3, ..., 10.

Với mỗi $k \in \{1; 2; 3; \dots; 10\}$, ta gọi cuộc họp được đánh số k là cuộc họp thứ k .

Ký hiệu s_1 là số giảng viên tham dự cuộc họp thứ 1; và với mỗi $k \in \{2; 3; \dots; 10\}$, ký hiệu s_k là số giảng viên tham dự cuộc họp thứ k , nhưng không tham dự cuộc họp nào trong các cuộc họp từ thứ 1 đến thứ $k-1$.

Khi đó, gọi n là số giảng viên được huy động tham dự các cuộc họp, ta có:

$$n = s_1 + s_2 + \dots + s_{10}. \tag{*}$$

Vì mỗi cuộc họp có đúng 20 giảng viên tham dự, và không có hai giảng viên nào cùng có mặt ở hai cuộc họp, nên $s_1 = 20$, và

$$s_k \geq 20 - (k-1) = 21 - k,$$

với mỗi $k \in \{2; 3; \dots; 10\}$.

Do đó, từ (*) ta có:

$$n \geq 20 + 19 + \dots + 11 = 155.$$

Do $155 > 63$ nên ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, với các giả thiết của bài đã ra, *không thể* chỉ ra được trường hợp số giảng viên được huy động tham dự các cuộc họp đúng bằng 63. Vì vậy, để đảm bảo tính chính xác toán học, cụm từ “ít nhất” trong kết luận của đề bài cần được thay bởi cụm từ “không ít hơn” (hoặc “không dưới”).

2. Với các giả thiết của bài đã ra, để đảm bảo chỉ ra trường hợp số giảng viên được huy động tham dự các cuộc họp đúng bằng 155. Vì thế, *từ lời giải trên đây dễ dàng có được lời giải cho bài toán, nhận được từ bài đã ra bằng cách giữ nguyên giả thiết, và thay phần kết luận bởi yêu cầu mạnh hơn: “Hỏi, có ít nhất bao nhiêu giảng viên đã được Ban tổ chức huy động tham dự các cuộc họp?”*

3. Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai, và một lời giải tuy có ý giải đúng, nhưng các lập luận khá lơ mơ, thiếu rõ ràng.

Nguyễn Khắc Minh

P772. (Mức B) Cho a là một số vô tỷ. Chứng minh rằng, tồn tại số vô tỷ b , sao cho $a + b$ và ab đều là số vô tỷ.

Lời giải (dựa theo Đáp án do BBT cung cấp).
Để thấy, hiệu của hai số bất kỳ, trong ba số

$$a + \sqrt{2}, a + \sqrt{3} \text{ và } a + \sqrt{5}, \quad (1)$$

là một số vô tỷ.

Vì thế, trong ba số được liệt kê ở (1), chỉ có tối đa một số là số hữu tỷ (do hiệu của hai số hữu tỷ là một số hữu tỷ). (2)

Tiếp theo, để thấy, thương của hai số bất kỳ, trong ba số

$$a\sqrt{2}, a\sqrt{3} \text{ và } a\sqrt{5}, \quad (3)$$

là một số vô tỷ.

Do đó, trong ba số được liệt kê ở (3), chỉ có tối đa một số là số hữu tỷ (do thương của hai số hữu tỷ khác 0 là một số hữu tỷ). (4)

Từ (2) và (4) suy ra, tồn tại số vô tỷ $b \in \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ sao cho $a + b$ và ab đều là số vô tỷ.

Vì thế, ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải sai, do người giải bài chưa hiểu đúng đề bài. Cụ thể, một bạn đã hiểu đề bài thành “Chứng minh rằng, tồn tại các số vô tỷ a, b , sao cho cả $a + b$ và ab đều là số vô tỷ”; và một bạn đã hiểu đề bài thành “Cho a là một số vô tỷ. Chứng minh rằng, nếu cả $a + b$ và ab đều là số vô tỷ, thì b là số vô tỷ”.

Lưu Thị Thanh Hà

P773. Giải phương trình

$$2x^3 - 6x + 5 = 0.$$

Lời giải (dựa theo ý giải của bạn Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình, lớp 9C, trường THCS Nguyễn Thái Bình, Tp. Cà Mau, tỉnh Cà Mau).

Ta có:

$$\begin{aligned} & 2x^3 - 6x + 5 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^3 - 3x + \frac{5}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow & x^3 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 - 3x \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x + \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \left(x^2 + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2\right. \\ & \quad \left. - x \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot x\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x + \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \left(x^2 - \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)x\right. \\ & \quad \left.+ \sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 1\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(x + \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \left(\left(x - \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right)^2\right. \\ & \quad \left.+ \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 2\right)\right) = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức trung bình cộng - trung bình nhân, ta có:

$$\sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} > 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2.$$

Do đó

$$\left(x - \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - 2\right) > 0,$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vì thế

$$(*) \Leftrightarrow x = - \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

Vậy, phương trình đã cho có duy nhất nghiệm, là giá trị x vừa nêu trên.

Bình luận và Nhận xét

1. Giải phương trình bậc cao, bằng cách biến đổi tương đương phương trình đó về phương trình tích, là một phương pháp thông dụng, được giảng dạy trong nhà trường phổ thông. Ở Lời giải trên, để biến đổi tương đương phương trình đã cho về phương trình tích, ta đã sử dụng hằng đẳng thức quen thuộc sau:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca), \end{aligned}$$

với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Tạp chí đã nhận được nhiều lời giải, từ bạn đọc. Tuy nhiên, rất tiếc, trong số đó chỉ có bốn lời giải được chấp nhận là lời giải đúng. Trong số các lời giải còn lại, có:

- Hai lời giải có ý giải đúng, nhưng các lập luận trong lời giải thiếu chặt chẽ;

- Một lời giải đã dùng kiến thức vượt ra ngoài chương trình phổ thông hiện hành, nhưng không chứng minh các kết quả đã dùng, và hơn nữa, người giải bài mới chỉ chỉ ra giá trị gần đúng của nghiệm của phương trình.

Ngoài ba lời giải vừa nêu trên, ở các lời giải còn lại (trong số các lời giải không đúng), người giải bài mới chỉ giải phương trình đã cho trên các khoảng $(-\infty; 2]$, $[2; +\infty)$, trong

khí đề bài yêu cầu giải phương trình đó trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ (tức, trên $\mathbb{R}$).

Nguyễn Khắc Minh

P774. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực dương, thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq 3.$$

Lời giải (phỏng theo ý tưởng của đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc).

Trước hết, ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \\ \geq a + b + c, \end{aligned} \quad (1)$$

với mọi $a, b, c > 0$.

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} (1) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + b + c\right) \\ + \left(\frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + c + a\right) \\ + \left(\frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} + a + b\right) \geq 3(a + b + c) \\ \Leftrightarrow (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a^2 - ab + b^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2}\right) \\ \geq 3(a + b + c). \end{aligned} \quad (2)$$

Do $a, b, c > 0$, nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \\ \geq \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

(theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz).

Vì thế, ký hiệu P là vế trái của bất đẳng thức (2), ta có:

$$P \geq \frac{9(a^3 + b^3 + c^3)}{2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)}. \quad (3)$$

Tiếp theo, ta chứng minh

$$\frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)} \geq a + b + c. \quad (4)$$

Thật vậy, vì $a, b, c > 0$, nên

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) > 0;$$

do đó

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow (a^3 - a^2b - a^2c + abc) \\ &\quad + (b^3 - b^2c - b^2a + abc) \\ &\quad + (c^3 - c^2a - c^2b + abc) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) \\ &\quad + c(c-a)(c-b) \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức vừa nêu trên là bất đẳng thức Schur bậc 3 cho ba số thực dương a, b, c . Vì thế, (4) được chứng minh.

Từ (3) và (4), hiển nhiên suy ra (2); do đó, (1) được chứng minh.

Mặt khác, từ các giả thiết của bài toán, suy ra

$$\begin{aligned} &(a + b + c)^2 - 9 \\ &= (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 0; \end{aligned}$$

do đó, $a + b + c \geq 3$. (5)

Từ (1) và (5), ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Từ Lời giải trên dễ thấy, dấu “=” ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.
2. Tất cả các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng. Tuy nhiên, ở một số lời giải có những biến đổi bậc cao khá phức tạp. Có cảm giác, ở những lời giải đó, người giải bài đã thực hiện các phép biến đổi với sự trợ giúp của các phần mềm tính toán. Thiết nghĩ, đối với các bài toán được yêu cầu giải trong quá trình học tập ở bậc phổ thông,

khi thực hiện các biến đổi, thay vì nhờ các phần mềm tính toán hỗ trợ, các bạn học sinh nên thực hiện “bằng tay”, để rèn luyện tư duy và kỹ năng tính toán.

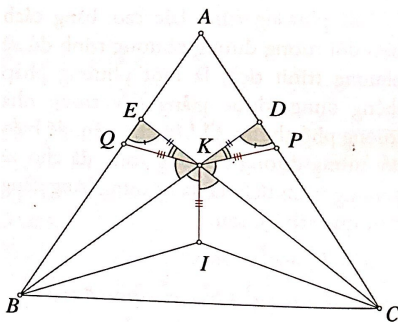
Võ Quốc Bá Cẩn

P775. (Mức B) Cho tam giác ABC và hai điểm D, E tương ứng thuộc các cạnh AC, AB , sao cho

$$\angle ABD = \frac{1}{3}\angle ABC \text{ và } \angle ACE = \frac{1}{3}\angle ACB.$$

Gọi K là giao điểm của BD và CE . Chứng minh rằng, nếu $KD = KE$ thì tam giác ABC hoặc là tam giác cân, hoặc là tam giác vuông.

Lời giải (dựa theo Đáp án do BBT cung cấp).



Hình 1.

Gọi I là giao điểm của các đường phân giác trong của tam giác KBC . Gọi P, Q , tương ứng, là điểm đối xứng với I qua CK, BK .

Khi đó, BK và CK , tương ứng, là phân giác trong của góc ABI và góc ACI . Do đó, Q thuộc cạnh AB , và P thuộc cạnh AC .

Do tính chất của phép đối xứng trục, và do KI là phân giác trong của góc BKC , nên

$$\angle BKQ = \angle BKI = \angle CKI = \angle CKP. \quad (1)$$

Do là hai góc đối đỉnh, nên

$$\angle BKE = \angle CKD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

- Nếu $\angle BKQ \leq \angle BKE$ thì $\angle CKP \leq \angle CKD$, và ngược lại;

- Nếu $\angle BKQ > \angle BKE$ thì $\angle CKP > \angle CKD$, và ngược lại.

Do đó, hoặc Q thuộc đoạn thẳng BE , và đồng thời, P thuộc đoạn thẳng CF ; hoặc Q thuộc đoạn thẳng EA , và đồng thời, P thuộc đoạn thẳng FA . (3)

Vì thế, từ (1) và (2), suy ra

$$\angle EKQ = \angle DKP. \quad (4)$$

Xảy ra hai trường hợp sau:

• Trường hợp 1: $\angle EKQ = \angle DKP \neq 0^\circ$. (Xem Hình 1.)

Khi đó, $Q \neq E$ và $P \neq D$.

Do tính chất của phép đối xứng trục, nên

$$KQ = KI = KP. \quad (5)$$

Từ (4), (5) và giả thiết $KE = KD$, suy ra

$$\triangle EKQ = \triangle DKP \text{ (c.g.c.)}$$

Do đó, $\angle QEK = \angle PDK$. (6)

Mà, từ (3) và định nghĩa các điểm E, D , ta có:

- Hoặc

$$\begin{aligned} \angle QEK &= 180^\circ - (\angle EBC + \angle ECB) \\ &= 180^\circ - \left(\angle ABC + \frac{2}{3} \angle ACB \right) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \angle PDK &= 180^\circ - (\angle DCB + \angle DBC) \\ &= 180^\circ - \left(\angle ACB + \frac{2}{3} \angle ABC \right), \end{aligned}$$

- Hoặc

$$\begin{aligned} \angle QEK &= \angle EBC + \angle ECB \\ &= \angle ABC + \frac{2}{3} \angle ACB \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \angle PDK &= \angle DCB + \angle DBC \\ &= \angle ACB + \frac{2}{3} \angle ABC; \end{aligned}$$

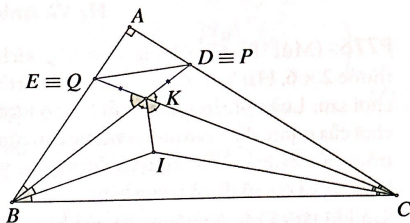
nên từ (6) suy ra

$$\angle ABC + \frac{2}{3} \angle ACB = \angle ACB + \frac{2}{3} \angle ABC.$$

Do đó, $\angle ABC = \angle ACB$.

Vì vậy, ABC là tam giác cân tại A .

• Trường hợp 2: $\angle EKQ = \angle DKP = 0^\circ$. (Xem Hình 2.)



Hình 2.

Trong trường hợp này, $Q \equiv E$ và $P \equiv D$. Do đó, E, D , tương ứng, đối xứng với I qua BK, CK . Vì vậy

$$\begin{aligned} \angle EKD &= \angle BKC = \angle IKB + \angle IKC \\ &= \angle EKB + \angle DKC. \end{aligned}$$

Mà

$$\angle EKD + \angle BKC + (\angle EKB + \angle DKC) = 360^\circ,$$

$$\text{nên } \angle BKC = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (\angle ABC + \angle ACB) &= \angle KBC + \angle KCB \\ &= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ. \end{aligned}$$

Do đó

$$\angle BAC = 180^\circ - \frac{3}{2} \cdot 60^\circ = 90^\circ;$$

hay, tam giác ABC vuông tại A .

Kết quả xét hai trường hợp trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài toán hay, thú vị, giúp học sinh khá, giỏi ở môn Toán củng cố, rèn luyện và phát triển tư duy hình học.

2. Cho tới thời điểm bản thảo lên trang, lời giải của bạn Vương Khánh Toàn (lớp 11A1 Toán, trường THPT chuyên Tự nhiên - ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội) là lời giải duy nhất Tập chí đã nhận được từ bạn đọc. Bạn Toàn đã sử dụng công cụ lượng giác để chứng

minh kết luận của bài toán, và cho lời giải đúng.

Hạ Vũ Anh

P776. (Mức B) Cho bảng ô vuông kích thước 2×6 . Hai bạn, Bảo và Hưng, chơi trò chơi sau: Luân phiên nhau, mỗi bạn, ở lượt chơi của mình, điền vào một ô vuông còn trống của bảng một số nguyên dương tùy ý, khác tất cả các số đã có trong bảng.

Sau khi tất cả các ô vuông con của bảng đã được điền số, ô chứa số lớn nhất của mỗi hàng được tô màu đen. Nếu có hai ô được tô đen có chung đỉnh, Bảo sẽ được coi là người thắng cuộc; trường hợp ngược lại, Hưng được coi là người thắng cuộc.

Biết rằng, Bảo là người điền số đầu tiên vào bảng. Hỏi, nếu chơi đúng, ai sẽ là người chắc chắn thắng cuộc?

Lời giải (của người chấm bài).

Ta sẽ chứng minh Hưng là người có cách chơi đảm bảo chắc chắn thắng, bằng cách chỉ ra cách chơi này.

Để thuận tiện cho việc diễn đạt, ta gọi mỗi cặp, gồm hai lượt chơi có cùng thứ tự của Bảo và Hưng, là một *bước chơi*. Ví dụ, cặp, gồm lượt chơi thứ nhất của Bảo và lượt chơi thứ nhất của Hưng, là một bước chơi; cặp, gồm lượt chơi thứ hai của Bảo và lượt chơi thứ hai của Hưng, là một bước chơi; ...

Xét cách chơi như sau của Hưng:

– Trước hết, Hưng ngầm phân chia (tức, phân chia trong đầu) tất cả các số nguyên dương thành các nhóm hai số nguyên dương liên tiếp: $\{1; 2\}$, $\{3; 4\}$, $\{5; 6\}$, ...; và ngầm phân chia các ô của bảng thành 6 cặp ô: (a, a) , (b, b) , (c, c) , (d, d) , (e, e) , (f, f) , như ở hình dưới đây:

a	b	c	d	e	f
d	e	f	a	b	c

– Khi đó, ở mỗi lượt chơi của mình, Bảo sẽ dùng một số nguyên dương thuộc một nhóm hai số nào đó (trong số các nhóm hai

số mà Hưng đã ngầm tạo ra), để điền vào một ô thuộc một cặp ô nào đó (trong số 6 cặp ô mà Hưng đã ngầm tạo ra). Vì thế, do Bảo là người mở màn cuộc chơi, nên Hưng có thể chơi như sau: Ở mỗi bước chơi, Bảo dùng số thuộc nhóm hai số nào để điền, thì Hưng sẽ dùng số còn lại của nhóm hai số đó để điền; và Bảo điền số vào ô thuộc cặp ô nào, thì Hưng điền số vào ô còn lại của cặp ô đó.

Với cách chơi như vậy của Hưng:

– Hai số được điền ở mỗi bước chơi sẽ nằm ở hai ô khác hàng và không có đỉnh chung (do hai ô cùng cặp nằm khác hàng nhau và không có đỉnh chung);

– Số lớn nhất và số lớn thứ hai của bảng số, thu được sau khi cuộc chơi kết thúc, sẽ được điền ở cùng một bước chơi (do các số được điền vào bảng đôi một khác nhau, và hai số được điền ở mỗi bước chơi là hai số nguyên dương liên tiếp).

Vì vậy, với cách chơi trên đây của Hưng, số lớn nhất và số lớn thứ hai của bảng số, thu được sau khi cuộc chơi kết thúc, sẽ nằm ở hai ô khác hàng và không có đỉnh chung.

Do nằm ở hai hàng khác nhau, nên trong hai số vừa nêu trên, có một số là số lớn nhất của hàng thứ nhất, và số còn lại là số lớn nhất của hàng thứ hai. Vì thế, việc hai số này nằm ở hai ô không có đỉnh chung cho thấy, Hưng là người thắng cuộc.

Vậy, Hưng là người có cách chơi đảm bảo chắc chắn thắng.

Bình luận và Nhận xét

1. Vì bảng đã cho có hai hàng, nên nó chỉ có *đúng* hai ô đen. Thành thử, việc tô màu, tạo ra ô đen, để định nghĩa người thắng cuộc, như đã mô tả ở đề bài, là không cần thiết. Ta có thể diễn đạt định nghĩa đó một cách đơn giản như sau: “Sau khi tất cả các ô vuông con của bảng đã được điền số, nếu ô chứa số lớn nhất của hàng thứ nhất và ô chứa số lớn nhất của hàng thứ hai có chung đỉnh, thì Bảo được coi là người thắng cuộc; trường hợp ngược lại, Hưng được coi là người thắng cuộc.”

2. Bài đã ra là một bài toán nhẹ nhàng, và rất hữu ích cho việc bồi dưỡng học sinh khá, giỏi Toán, cấp THCS.

3. Lời giải trên đây được hình thành, một cách tự nhiên, từ việc nhìn nhận, đánh giá lợi thế và khả năng tận dụng lợi thế đó của mỗi người chơi.

4. Cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được lời giải nào, từ bạn đọc.

Nguyễn Khắc Minh

P777. (Mức A) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + xf(y) + y) = 2x + f(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$.

($\mathbb{R}^+$ là tập tất cả các số thực dương.)

Lời giải (dựa theo cách giải của một bạn học sinh cấp THPT).

• Giả sử $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ là một hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài; nghĩa là, ta có:

$$f(x^2 + xf(y) + y) = 2x + f(y), \quad (1)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Ta sẽ chứng minh f là hàm tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$.

Thật vậy, xét hai số thực dương x_1, x_2 tùy ý, thỏa mãn $x_1 < x_2$.

Khi đó, $1 \cdot (x_1 - x_2) < 0$. Do đó, phương trình (án t) sau có hai nghiệm phân biệt trái dấu:

$$t^2 + t \cdot f(x_1) + x_1 - x_2 = 0.$$

Vì vậy, tồn tại (duy nhất) $x_0 > 0$ sao cho

$$x_0^2 + x_0 \cdot f(x_1) + x_1 = x_2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(x_0^2 + x_0 f(x_1) + x_1) \\ &= 2x_0 + f(x_1) \text{ (theo (1))} \\ &> f(x_1) \text{ (do } x_0 > 0). \end{aligned}$$

Vì vậy, f là hàm tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$.

Suy ra, f là một đơn ánh từ $\mathbb{R}^+$ đến $\mathbb{R}^+$. (2)

Xét hai số thực dương u, v tùy ý.

Thế $x = \frac{f(u)}{2}, y = v$ vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{(f(u))^2}{4} + \frac{f(u)}{2} \cdot f(v) + v\right) \\ = f(u) + f(v). \end{aligned} \quad (3)$$

Thế $x = \frac{f(v)}{2}, y = u$ vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{(f(v))^2}{4} + \frac{f(v)}{2} \cdot f(u) + u\right) \\ = f(v) + f(u). \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3), (4), (2) và tính tùy ý của u, v , suy ra

$$\begin{aligned} \frac{(f(u))^2}{4} + \frac{f(u)}{2} \cdot f(v) + v \\ = \frac{(f(v))^2}{4} + \frac{f(v)}{2} \cdot f(u) + u, \end{aligned}$$

với mọi $u, v \in \mathbb{R}^+$.

Do đó

$$(f(u))^2 - 4u = (f(v))^2 - 4v,$$

với mọi $u, v \in \mathbb{R}^+$.

Vì thế, ta có:

$$(f(x))^2 - 4x = c,$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$, trong đó, c là một hằng số thực.

Suy ra

$$(f(x))^2 = 4x + c, \quad (5)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$; trong đó, c là một hằng số thực.

Do $(f(x))^2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ nên

$$4x + c > 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Suy ra, $c \geq 0$ (vì nếu $c < 0$

thì $4x + c \leq 0$ với mọi $x \in \left(0; \frac{|c|}{4}\right]$).

Vì vậy, từ (5), với lưu ý f nhận giá trị trong $\mathbb{R}^+$, ta được:

$$f(x) = \sqrt{4x + c},$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$, trong đó, c là một hằng số thực không âm.

• Ngược lại, bằng cách kiểm tra trực tiếp, ta thấy hàm số vừa nêu trên thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

• Vậy, tất cả các hàm số cần tìm theo yêu cầu đề bài là:

$$f(x) = \sqrt{4x+c},$$

với c là một hằng số thực không âm tùy ý.

Bình luận và Nhận xét

1. Phương trình hàm ở bài đã ra là một phương trình hàm ở mức cơ bản; có nhiều cách tiếp cận để giải phương trình hàm này. Cách tiếp cận, được thể hiện ở Lời giải trên, là một cách tiếp cận rất tự nhiên, chuẩn tắc, đúng “bài”.

2. Rất tiếc, bạn học sinh, được nhắc tới ở phần Lời giải, đã cho kết quả sai, do mắc lỗi trong tính toán.

Trần Nam Dũng

P778. (Mức A) Cho số nguyên tố p thỏa mãn $p \equiv 2 \pmod{3}$. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn:

$$x^3 - y^3 = 19p(x^2 + y^2).$$

Lời giải (của người chấm bài).

• Giả sử (x, y) là cặp số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu của bài toán; nghĩa là, ta có:

$$x^3 - y^3 = 19p(x^2 + y^2). \quad (1)$$

Xây ra hai trường hợp sau:

◊ Trường hợp 1: $y = 0$.

Khi đó, từ (1) ta có:

$$x^3 = 19px^2.$$

Suy ra, $x = 0$ hoặc $x = 19p$.

Vì vậy, $(x, y) \in \{(0, 0); (19p, 0)\}$.

◊ Trường hợp 2: $y > 0$.

Khi đó, từ (1) suy ra $x > y$. (2)

Vì vậy, trong trường hợp này, $x, y \in \mathbb{N}^*$. (3)

Gọi d là UCLN của x và y . Khi đó, do (3) nên tồn tại $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$, sao cho

$$x = ad \text{ và } y = bd. \quad (4)$$

Thế (4) vào (1), ta được:

$$d^3(a^3 - b^3) = 19pd^2(a^2 + b^2);$$

suy ra

$$\begin{aligned} d(a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ = 19p(a^2 + b^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Vì $(a, b) = 1$ nên

$$(a, a^2 + b^2) = (b, a^2 + b^2) = 1;$$

suy ra $(ab, a^2 + b^2) = 1$. Vì vậy

$$(a^2 + ab + b^2, a^2 + b^2) = 1. \quad (6)$$

Từ (5) và (6), suy ra

$$a^2 + ab + b^2 \mid 19p.$$

Từ đó, do 19 và p là các số nguyên tố, nên

$$a^2 + ab + b^2 \in \{1; 19; p; 19p\}. \quad (7)$$

Do $a, b \in \mathbb{N}^*$ nên

$$a^2 + ab + b^2 > 1. \quad (8)$$

Do số dư trong phép chia một số chính phương cho 3 chỉ là 1 hoặc 0, nên

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 &= (a-b)^2 + 3ab \\ &\not\equiv 2 \pmod{3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Do $p \equiv 2 \pmod{3}$ (giả thiết), nên

$$19p \equiv p \equiv 2 \pmod{3}. \quad (10)$$

Từ (7), (8), (9) và (10), suy ra

$$a^2 + ab + b^2 = 19. \quad (11)$$

Tiếp theo, từ (2) và (4), suy ra $a > b$. Do đó

$$a^2 + ab + b^2 > 3b^2. \quad (12)$$

Từ (11) và (12), suy ra $b < 3$; do đó, $b \in \{1; 2\}$.

Lần lượt, thế $b = 1$, $b = 2$ vào (11), rồi tìm a , ta được:

$$(a, b) = (3, 2). \quad (13)$$

Từ (13) và (5), suy ra $d = 13p$. Vì thế, theo (4), ta có:

$$(x, y) = (39p, 26p).$$

Như vậy, theo kết quả xét hai trường hợp trên đây, nếu (x, y) là cặp số tự nhiên, thỏa mãn yêu cầu đề bài, thì

$$(x, y) \in (0, 0); (19p, 0); (39p, 26p).$$

• Ngược lại, bằng cách kiểm tra trực tiếp, ta thấy các cặp số tự nhiên (x, y) vừa nêu trên thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vì vậy, chúng là tất cả các cặp số tự nhiên cần tìm.

Bình luận và Nhận xét

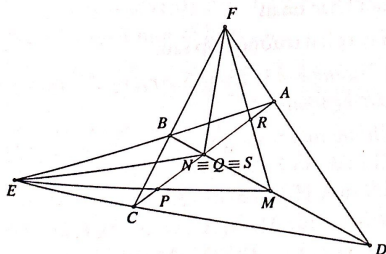
1. Bài đã ra là một bài toán giải phương trình nghiệm tự nhiên, ở mức cơ bản, đơn giản, rất phù hợp cho việc bồi dưỡng học sinh khá, giỏi toán các lớp cuối cấp THCS.

2. Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải cho kết quả không đúng (bỏ sót nghiệm), và một lời giải được xây dựng trên cơ sở các khẳng định không hiển nhiên, nhưng không được người giải bài chứng minh.

Lưu Thị Thanh Hà

P779. (Mức A) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. AB cắt CD tại E , AD cắt BC tại F (A nằm giữa D và F ; C nằm giữa D và E). Gọi M, N , tương ứng, là trung điểm của BD, AC . EM, EN tương ứng cắt AC, BD tại P, Q . FM, FN tương ứng cắt AC, BD tại R, S . Chứng minh rằng, PQ song song hoặc trùng với RS .

Lời giải (của người chấm bài).



Hình 1.

Xây ra hai trường hợp sau:

◊ Trường hợp 1: AC và BD cắt nhau tại trung điểm của AC . (Xem Hình 1.)

Trong trường hợp này, ba điểm N, Q, S trùng nhau; vì thế, PQ và RS là hai đường thẳng trùng nhau.

• Trường hợp 2: AC và BD không cắt nhau tại trung điểm của AC . (Xem Hình 2.)

Gọi K là giao điểm của AC và BD ; gọi I là giao điểm của PQ và MN .

Gọi J và L tương ứng là giao điểm của KI với MP , và với CD .

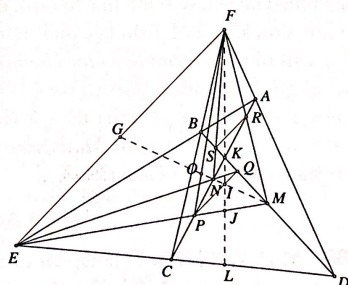
Do KI, QN, PM là các đường chéo của tứ giác toàn phần $IQKN.PM$, nên các đường thẳng KI, QN chia đều hòa đường chéo PM . Do đó, $(PMEJ) = -1$. (1)

Do C, D, E, L là ảnh của P, M, E, J qua phép chiếu xuyên tâm K lên đường thẳng ED , và do phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép, nên từ (1) ta có: $(CDEL) = -1$. (2)

Gọi L' là giao điểm của đường thẳng FK và đường thẳng CD .

Do FK, AB, CD là các đường chéo của tứ giác toàn phần $FBKA.CD$, nên các đường thẳng FK, AB chia đều hòa đường chéo CD . Do đó, $(CDEL') = -1$. (3)

Từ (2) và (3), suy ra $L \equiv L'$. Vì thế, năm điểm F, K, I, J, L thẳng hàng.



Hình 2.

Tiếp theo, gọi G là trung điểm của EF . Ta có G, M, N là trung điểm của ba đường chéo của tứ giác toàn phần $ABCD.EF$. Vì thế, ba

điểm đó thẳng hàng (đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần).

Vì vậy, gọi O là giao điểm của FP và GM , ta có:

$$\begin{aligned} P(FEQ) &= P(FMGI) = (OMGI) \\ &= F(OMGI) = F(PMEJ) \\ &= (PMEJ). \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (4) và (1), suy ra $P(FEQ) = -1$. Do đó, (PF, PE, PG, PQ) là chùm điều hòa. Mà G là trung điểm của EF , nên $PQ \parallel EF$. (5)

Một cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được $RS \parallel EF$. Từ đây và (5), suy ra PQ và RS hoặc song song, hoặc trùng nhau.

Kết quả xét hai trường hợp trên đây cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, lời giải của bạn *Vương Khánh Toàn* (lớp 11A1 Toán, trường THPT chuyên Tự nhiên – ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội) là lời giải duy nhất đúng. Các lời giải còn lại là lời giải không đúng do người giải bài chưa xét hết các khả năng có thể xảy ra đối với vị trí tương đối giữa hai đường thẳng AC, EF .

2. Bạn Toàn đã dùng tọa độ tỷ cự làm công cụ để chứng minh kết luận của bài ra.

Bạn đọc có thể tìm hiểu về tọa độ tỷ cự trong nhiều tài liệu về Hình học sơ cấp dành cho học sinh khá, giỏi Toán bậc phổ thông; chẳng hạn như *Problems in Plane Geometry* (của tác giả *V. Prasolov*), *Introduction to the Geometry of the Triangle* (của tác giả *Paul Yiu*), *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads* (của tác giả *Evan Chen*), ...

Hạ Vũ Anh

P780. (Mức A) Ký hiệu $\mathcal{D}$ là tập tất cả các ước nguyên dương của 6^{2023} . Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong k số bất kỳ thuộc $\mathcal{D}$, luôn tồn tại ba số có tích là lập phương của một số nguyên.

Lời giải (phỏng theo ý giải của Đáp án do BBT cung cấp).

Vì $6^{2023} = 2^{2023} \cdot 3^{2023}$ và 2, 3 là các số nguyên tố, nên mỗi $d \in \mathcal{D}$ đều chỉ có ước nguyên tố thuộc tập $\{2; 3\}$. Do đó, với mỗi $d \in \mathcal{D}$, đều tồn tại duy nhất cặp số tự nhiên không vượt quá 2 (r, s), sao cho

$$d = 2^{3m+r} \cdot 3^{3q+s}, \text{ với } m, q \in \mathbb{N}.$$

Ta gọi cặp số (r, s) như vậy là *cặp sinh* của d .

Tiếp theo, ta gọi nhóm, gồm ba cặp số tự nhiên $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, là một *nhóm đẹp*, nếu

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv y_1 + y_2 + y_3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Ta có Nhận xét hiển nhiên sau:

Nhận xét. Ba số đôi một phân biệt tùy ý thuộc $\mathcal{D}$ có tích là lập phương của một số nguyên khi và chỉ khi nhóm, gồm ba cặp sinh của ba số đó, là một nhóm đẹp.

• Xét 9 số đôi một phân biệt tùy ý $d_1, d_2, \dots, d_9 \in \mathcal{D}$.

Giả sử 9 cặp sinh của chúng, tương ứng, là $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_9, s_9)$.

Nếu trong 9 cặp đó có ba cặp giống nhau, thì nhóm gồm ba cặp ấy, hiển nhiên, là một nhóm đẹp. Vì thế, theo Nhận xét trên, trong 9 số $d_1, d_2, \dots, d_9$, có ba số có tích là lập phương của một số nguyên.

Nếu trong 9 cặp sinh nêu trên không tồn tại ba cặp giống nhau, thì trong 9 cặp ấy, theo nguyên lý Dirichlet, sẽ tồn tại 5 cặp đôi một khác nhau. Không mất tổng quát, giả sử $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_5, s_5)$ là năm cặp đôi một khác nhau.

Xây ra hai trường hợp sau:

◊ Trường hợp 1: Trong 5 số $r_1, r_2, \dots, r_5$, có ba số bằng nhau.

Không mất tổng quát, giả sử $r_1 = r_2 = r_3$. Khi đó, do ba cặp $(r_1, s_1), (r_2, s_2), (r_3, s_3)$ đôi một khác nhau, nên s_1, s_2, s_3 đôi một khác nhau. Mà $s_1, s_2, s_3 \in \{0; 1; 2\}$, nên $\{s_1, s_2, s_3\} = \{0; 1; 2\}$. Vì thế, nhóm ba cặp vừa nêu là một nhóm đẹp. Do đó, theo Nhận xét trên, ba số d_1, d_2, d_3 có tích là lập phương của một số nguyên.

◊ Trường hợp 2: Trong 5 số $r_1, r_2, \dots, r_5$, không có ba số bằng nhau.

Khi đó, do $r_1, r_2, \dots, r_5 \in \{0; 1; 2\}$, nên trong 5 số ấy có bốn số tạo thành hai nhóm số, mỗi nhóm gồm hai số bằng nhau và hai số khác nhóm khác nhau; số thứ năm còn lại khác cả bốn số vừa nêu.

Không mất tổng quát, giả sử

$$r_1 = r_4 \neq r_2 = r_5 \neq r_3 \neq r_1. \quad (1)$$

Khi đó, $\{r_1; r_2; r_3\} = \{0; 1; 2\}$. (2)

Do $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_5, s_5)$ là năm cặp đôi một khác nhau, nên từ (1) suy ra

$$s_1 \neq s_4 \text{ và } s_2 \neq s_5. \quad (3)$$

Vì thế, với 5 số $s_1, s_2, \dots, s_5$, chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:

– Trường hợp 2.1: Trong bốn số s_1, s_2, s_4, s_5 , có đúng hai số bằng s_3 .

Khi đó, từ (3) suy ra, trong hai số s_1, s_4 có đúng một số bằng s_3 và trong hai số s_2, s_5 có đúng một số bằng s_3 .

Không mất tổng quát, giả sử $s_1 = s_3 = s_2$.

Khi đó, do (2) nên nhóm ba cặp $(r_1, s_1), (r_2, s_2), (r_3, s_3)$ là một nhóm đẹp. Vì thế, theo Nhận xét trên, ba số d_1, d_2, d_3 có tích là lập phương của một số nguyên.

– Trường hợp 2.2: Trong bốn số s_1, s_2, s_4, s_5 , có tối đa một số bằng s_3 .

Khi đó, sẽ có hoặc $s_1, s_4 \neq s_3$, hoặc $s_2, s_5 \neq s_3$, hoặc cả hai điều vừa nêu.

Không mất tổng quát, giả sử $s_1, s_4 \neq s_3$. (4)

Do $s_2 \neq s_5$ (theo (3)), nên trong hai số s_2, s_5 phải có ít nhất một số khác s_3 .

Không mất tổng quát, giả sử $s_2 \neq s_3$ (5)

Do $s_1 \neq s_4$ (theo (3)), nên trong hai số s_1, s_4 phải có ít nhất một số khác s_2 .

Không mất tổng quát, giả sử $s_1 \neq s_2$ (6)

Do $s_1, s_2, s_3 \in \{0; 1; 2\}$, nên từ (4), (5) và (6), suy ra $\{s_1, s_2, s_3\} = \{0; 1; 2\}$. (7)

Từ (2) và (7) suy ra, nhóm ba cặp $(r_1, s_1), (r_2, s_2), (r_3, s_3)$ là một nhóm đẹp. Vì thế, theo Nhận xét trên, ba số d_1, d_2, d_3 có tích là lập phương của một số nguyên.

Tóm lại, kết quả xét các trường hợp trên đây cho thấy, trong 9 số đôi một phân biệt tùy ý thuộc $\mathcal{D}$, luôn tồn tại ba số có tích là lập phương của một số nguyên.

Vì vậy, nếu k là số cần tìm theo yêu cầu đề bài thì $k \leq 9$. (8)

• Xét 8 số: $1; 2; 3; 6; 2^4; 3^4; 6^3; 6^4$.

Dễ dàng kiểm tra được rằng, 8 số vừa nêu trên thuộc $\mathcal{D}$, và ba số bất kỳ trong 8 số đó có tích không là lập phương của một số nguyên.

Vì vậy, với mọi $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, luôn tồn tại m số đôi một phân biệt thuộc $\mathcal{D}$, sao cho ba số bất kỳ trong m số đó có tích không là lập phương của một số nguyên.

Do đó, nếu k là số cần tìm theo yêu cầu đề bài thì $k \geq 9$. (9)

• Từ (8) và (9) suy ra, $k = 9$ là số cần tìm theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, kết luận và lời giải của bài đã ra không thay đổi, khi thay tập $\mathcal{D}$ bởi tập M gồm tất cả các số tự nhiên, mà mỗi số đều chỉ có ước nguyên tố thuộc tập $\{2; 3\}$.

2. Bạn đọc có thể tìm thấy ý tưởng giải cho bài đã ra qua lời giải của các bài toán cùng kiểu, có trong nhiều tài liệu chuyên môn dành cho học sinh khá, giỏi Toán bậc phổ thông. Chẳng hạn, qua lời giải của bài toán sau, trong cuốn “Khám phá nguyên lý Dirichlê và ứng dụng” của tác giả Nguyễn Hữu Điển (NXB ĐHQG Hà Nội, năm 2020):

Bài toán. Cho số nguyên dương n và cho n số nguyên tố đôi một phân biệt $p_1, p_2, \dots, p_n$. Cho M là tập hợp các số tự nhiên, mà mỗi số đều chỉ có ước nguyên tố thuộc tập $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Chứng minh rằng, trong $2^n + 1$ số tùy ý thuộc M , luôn tồn tại hai số có tích là một số chính phương.

3. Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, chỉ có duy nhất lời giải đúng (tuy

nhiên, rất dài dòng, do người giải bài đã quá lan man, chưa chú ý tìm ra các đặc trưng chung cho các nhóm trường hợp, trong việc

xét các trường hợp có thể xảy ra).

Lưu Thị Thanh Hà

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI ĐÚNG

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải đúng.

KHOİ THCS

• Trường THCS Nguyễn Thái Bình, Tp. Cà Mau, tỉnh Cà Mau: Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình (lớp 9C; P771, P773, P774, P780).

• Trường THCS Ngô Quyền, Tp. Hải Phòng: Bùi Hoàng Nam (lớp 9A10; P774).

KHOİ THPT

• Trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp: Phạm Tiến Đạt (lớp 10T1; P771, P774), Liêu Vĩ Hào (lớp 10T1; P774), Đỗ Duy Quang (lớp 12T1; P774), Trần Thị Phương Thảo (lớp 10T1; P774), Võ Hải Yến (lớp 11H; P774).

• Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định: Phạm Đức Minh (lớp 10 Toán 2; P777).

• Trường THPT chuyên Hùng Vương, tỉnh Phú Thọ: Nguyễn Phúc Hưng (lớp 11 Toán; P772), Vũ Thu Ngân (lớp 10 Toán; P773, P774).

• Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên: Huỳnh Trần Gia Huy (lớp 10 Toán 1; P774, P778).

• Trường THPT chuyên Quốc học Huế, tỉnh Thừa Thiên – Huế: Nguyễn Anh Minh (lớp 10 Toán 1; P774).

• Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc: Trương Anh Dũng (lớp 10A1; P773, P774).

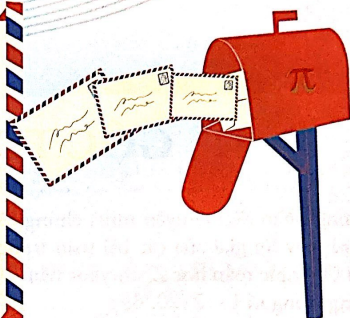
• Trường THPT chuyên Tự nhiên, ĐH Khoa học Tự nhiên – ĐHQG Hà Nội: Vương Khánh Toàn (lớp 11A1 Toán; P771, P772, P773, P774, P775, P777, P778, P779).

MỜI BẠN ĐỌC RA ĐỀ CHO PI

Chuyên mục Thách thức Toán học



trân trọng mời các thầy cô giáo, các bạn học sinh, sinh viên đóng góp các bài toán hay do mình sáng tác hoặc sưu tầm.



YÊU CẦU ĐỐI VỚI BÀI TOÁN GỬI ĐĂNG

► Dành cho đối tượng là học sinh THCS hoặc THPT

Có ý tưởng hay độc đáo trong lời giải. ►

► Để bài sáng tác hoặc sưu tầm, được gửi kèm cùng lời giải. Để bài chưa được công bố hay gửi công bố trên các tạp chí, báo toán bằng tiếng Việt. ►

► Với những bài toán khó, khuyến khích tác giả gửi thêm các bài phân tích về ý tưởng, phương pháp tư duy, mối liên hệ với các bài toán khác để đăng trong chuyên mục Học cùng Pi.

► Đối với đề sưu tầm cần ghi rõ nguồn gốc (trên các sách báo, tạp chí hay trong các kỳ thi). Đối với các bài toán được phát triển từ một bài toán khác, cũng khuyến khích tác giả giới thiệu bài toán gốc.

Các bạn học sinh, sinh viên có đề bài trên chuyên mục Thách thức Toán học sẽ nhận được giấy khen từ Tạp chí Pi.

Thông tin Tòa soạn

- ✉ Gửi bài: bbt@pi.edu.vn
- ✉ Giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com



Hotline: 024.3215.1407

Website: www.pi.edu.vn



GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày lời giải của các bài toán trong kỳ thi Olympic toán học Zhaautykov năm 2023 đăng trong số 1 – 2/2024.

OC61. Có một bộ bài gồm 1001 quân bài với các số $1, 2, \dots, 1001$ được viết trên một mặt của những quân bài đó bằng bút xanh, mỗi quân một số. Ta sắp xếp các quân bài thành một vòng tròn, với những số màu xanh ở mặt bên dưới, theo thứ tự bất kỳ. Sau đó, với mỗi quân bài C , ta đếm số $f(C)$ những quân bài có số màu xanh lớn hơn số màu xanh của C trong số 500 quân bài xếp ngay sau nó theo chiều kim đồng hồ. Ta viết số $f(C)$ ở mặt trên của C bằng bút đỏ. Chứng minh rằng nếu nhìn thấy tất cả các số màu đỏ trên các quân bài, có thể xác định được số màu xanh trên mỗi quân bài.

Lời giải. Ta sẽ cố định một vị trí đầu tiên và từ đó liệt kê dãy các số trên các quân bài liên tiếp theo chiều kim đồng hồ. Để chứng minh bài toán, ta chỉ cần chứng minh rằng không có 2 dãy số màu xanh khác nhau mà cho cùng một dãy số đỏ. Giả sử trái lại, ta có $A := (a_1, a_2, \dots, a_{1001})$ và $B := (b_1, b_2, \dots, b_{1001})$ là 2 dãy số xanh cho cùng một dãy số đỏ.

Ta ký hiệu $K_A := \{a_i | a_i \neq b_i\}$, $K_B := \{b_i | b_i \neq a_i\}$, lần lượt là các số trong dãy A, B mà khác với số ở cùng vị trí với nó. Khi đó dễ thấy $K_A = K_B$. Ta chọn ra số a nhỏ nhất trong tập $K_A = K_B$. Bằng cách thay đổi lại

cách chọn vị trí đầu tiên đến chỗ số a hoặc đổi chỗ 2 dãy, không mất tổng quát ta có thể giả sử $a = a_1 = b_j < b_1$ với $j \leq 501$. Khi đó số màu đỏ ở vị trí đầu tiên bằng $500 - |A_1| = 500 - |B_1|$, với

$$A_1 := \{s | 2 \leq s \leq 501, a_s < a_1\},$$

$$B_1 := \{s | 2 \leq s \leq 501, b_s < b_1\}.$$

Mặt khác, ta có nếu $s \in A_1$ thì $a_s < a_1$ nên theo cách chọn ta có $b_s = a_s$. Ta suy ra $b_s = a_s < a_1 < b_1$ nên $s \in B_1$, tức là $A_1 \subseteq B_1$. Hơn nữa, do $b_j = a_1 < b_1$ nên $j \in B_1$ và do $a_j \neq b_j = a_1$ ta suy ra $a_j > a_1$ nên $j \notin A_1$. Ta nhận được $A_1 \subsetneq B_1$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn là $|A_1| \neq |B_1|$.

OC62. Gọi Ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác không cân ABC . Tiếp tuyến tại C với Ω cắt đường thẳng AB tại điểm D . Một đường thẳng đi qua D cắt các đoạn AC và BC lần lượt tại K và L . Chọn điểm M và N trên đoạn AB sao cho $AC \parallel NL$ và $BC \parallel KM$. Cho NL và KM cắt nhau tại điểm P bên trong tam giác ABC . Đường thẳng CP cắt lại đường tròn ngoại tiếp ω của tam giác MNP tại điểm Q (khác P). Chứng minh rằng đường thẳng DQ tiếp xúc với ω .

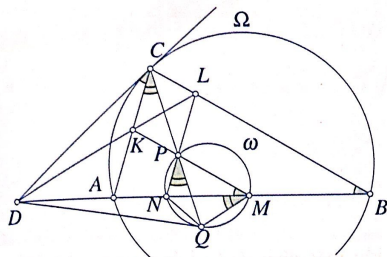
Lời giải. Từ giả thiết $AC \parallel NL$ và $BC \parallel KM$ ta có

$$\frac{DN}{DA} = \frac{DL}{DK} = \frac{DB}{DM}.$$

Ta suy ra $DM \cdot DN = DA \cdot DB$, tức là phương tích của D đối với đường tròn Ω và ω là bằng nhau. Ký hiệu R là giao của CD với tiếp tuyến

với ω tại Q . Ta có các đẳng thức về góc

$$\begin{aligned}\angle RQP &= \angle QMP = \angle QMN + \angle NMP \\ &= \angle QPN + \angle DBC \\ &= \angle ACP + \angle DCA = \angle RCQ.\end{aligned}$$



Ta suy ra $RC = RQ$, do đó phương tích của R đối với đường tròn Ω và ω là bằng nhau. Như vậy nếu R không trùng với D thì RD là trục đẳng phương của hai đường tròn Ω và ω . Nhưng điều này mâu thuẫn vì RD chứa điểm C thuộc Ω nhưng không thuộc ω . Ta suy ra R trùng với D , tức là DQ tiếp xúc với ω .

OC63. Cho $n > 2$ số thực khác 0, không nhất thiết phân biệt, có tổng bằng 0. Với mỗi một trong số $2^n - 1$ cách chọn ra một vài số (ít nhất một) trong đó, ta tính tổng của các số đã được chọn và viết tất cả các tổng tính được thành một hàng theo thứ tự không tăng. Biết số đầu tiên trong hàng bằng S . Xác định giá trị nhỏ nhất có thể của số thứ hai trong hàng.

Lời giải. Ta xếp n số theo thứ tự không tăng:

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m > 0 > x_{m+1} \geq x_{m+2} \dots \geq x_n.$$

Vì tất cả các số đều khác 0, $n > 2$ và $\sum x_i = 0$, nên chúng ta có $n > m \geq 1$.

Gọi S, T là hai số đầu tiên trong hàng, ta có $S = \sum_{i=1}^m x_i$ và $T = S - \min(|x_m|, |x_{m+1}|)$.

Ta có đánh giá $S = \sum_{i=1}^m x_i \geq mx_m$ như vậy $|x_m| \leq \frac{S}{m}$. Mặt khác

$$S = -x_{m+1} - x_{m+2} \dots - x_n \geq (n-m)|x_{m+1}|,$$

$$\text{nếu vậy } |x_{m+1}| \leq \frac{S}{n-m}. \text{ Vì vậy } \min(|x_m|, |x_{m+1}|) \leq \min\left(\frac{S}{m}, \frac{S}{n-m}\right) = \frac{S}{\max(m, n-m)}.$$

$$\text{Do } \max(m, n-m) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \text{ ta suy ra } T \geq S - \frac{S}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}.$$

Giá trị nhỏ nhất này có thể xảy ra, chẳng hạn với các số:

$$\underbrace{\frac{S}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}, \dots, \frac{S}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}}_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}, \underbrace{-\frac{S}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}, \dots, -\frac{S}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}}_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$$

Do đó, giá trị nhỏ nhất có thể của T là $S - \frac{S}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong kỳ thi toán học chung Nam Phi-Estonia (SAFEST) năm 2023. Đây là cuộc thi tổ chức trong khuôn khổ trại hè toán học chung giữa hai nước.

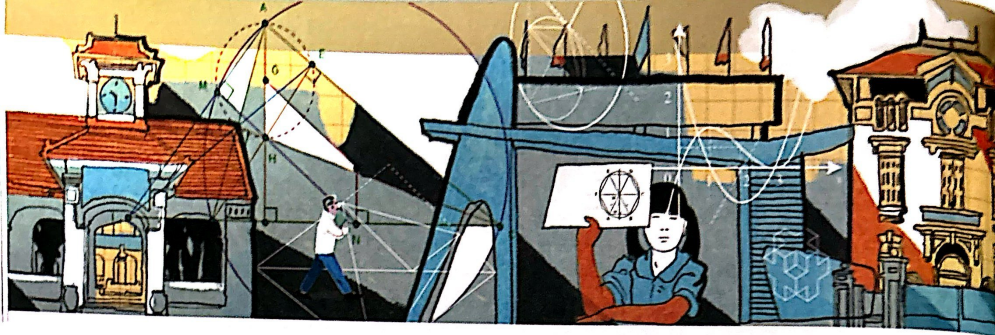
OC70. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sao cho $f(1) \neq f(-1)$ và

$$f(m+n)^2 \mid f(m) - f(n)$$

với mọi số nguyên m, n .

OC71. Cho ABC là một tam giác không cân có tâm đường tròn nội tiếp I và AI cắt BC tại D . Cho điểm E trên đoạn AC , sao cho $CD = CE$ và điểm F trên đoạn AB sao cho $BF = BD$. Giả sử đường tròn ngoại tiếp các tam giác CEI và DFI cắt nhau tại $P \neq I$. Tương tự, đường tròn ngoại tiếp các tam giác $BF1$ và DEI cắt nhau tại $Q \neq I$. Chứng minh PQ vuông góc với BC .

OC72. Trong mặt phẳng, cho 2022 điểm sao cho không có ba điểm nào cùng nằm trên một đường thẳng. Mỗi điểm được tô màu đỏ hoặc xanh sao cho mỗi tam giác được tạo bởi ba điểm đỏ phân biệt chứa ít nhất một điểm xanh. Hỏi số điểm đỏ lớn nhất có thể là bao nhiêu?



MICHAEL TALAGRAND

CHỦ NHÂN GIẢI ABEL 2024

(Người dịch: Cần Văn Hào)¹

Tóm tắt

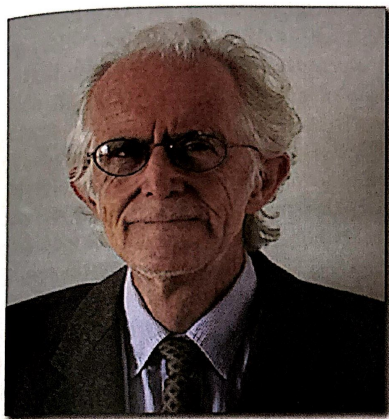
Ngày nay, các quá trình ngẫu nhiên diễn ra xung quanh chúng ta. Đó có thể là diễn biến của thời tiết, giá cổ phiếu, hay tình trạng ùn tắc giao thông. Những quá trình này bị chi phối bởi nhiều yếu tố tương tác với nhau một cách phức tạp. Thay vì dự đoán chính xác hành vi, người ta xem xét chúng dưới góc nhìn của xác suất. Chẳng hạn, mô tả các kết quả có thể xảy ra thường xuyên hay hiếm gặp. Năm 2024, nhà nghiên cứu lý thuyết xác suất người Pháp Michel Talagrand đã được trao giải Abel, một trong những giải thưởng cao quý nhất trong toán học, cho những đột phá của ông về các quá trình ngẫu nhiên với ứng dụng trong vật lý toán và thống kê.

Talagrand tự nhìn nhận cuộc đời mình giống như chuyển động Brown (một quá trình ngẫu nhiên mô tả sự khuếch tán của phân tử, hay sự dao động của giá cổ phiếu) với rất nhiều ngã rẽ và luôn đi tìm kiếm những điều mới mẻ. Từ nhỏ, việc học tập của ông đã thường xuyên bị gián đoạn bởi chứng bong vớng mạc. Năm 15 tuổi, ông phải nằm viện một tháng để chữa chạy mắt trái, sau

khi mắt phải đã bị hỏng trước đó. Để vượt nỗi sợ hãi của nguy cơ bị mù, cha ông – một giáo viên đã giúp trí não của ông luôn bận rộn với toán học. “Đó là cách tôi học được sức mạnh của sự trừu tượng”, ông nhớ lại sau khi nhận được giải Shaw năm 2019. Ngay sau khi tốt nghiệp đại học năm 1974, ông được tuyển vào Trung tâm Nghiên cứu Quốc gia của Pháp (Centre National de la Recherche Scientifique) và làm việc tại đó đến khi nghỉ hưu năm 2017. Trong hơn bốn mươi năm đó, ông đã lấy bằng tiến sỹ; tìm được một nửa của đời mình, bà Wansoo Rhee – một nhà nghiên cứu thống kê; và rời dần dần quan tâm đến xác suất và đạt được vinh quang trong học thuật. Trong thời gian đầu, Talagrand nghiên cứu về hình học của các không gian nhiều chiều. Tuy ông từng nói “trong 10 năm, tôi đã không phát hiện ra mình giỏi ở lĩnh vực nào”, khoảng thời gian này lại vô cùng đáng giá. Bởi nó từng bước đưa ông đến với lý thuyết xác suất, nơi mà ông đã sử dụng lăng kính hình học nhiều chiều để nhìn nhận các quá trình ngẫu nhiên, và đi đến những kết quả độc đáo. Đó được coi như ngã rẽ học thuật lớn nhất của ông.

¹ Chúng tôi chủ yếu dựa trên hai bài báo:

1. Jorilana Cepelwicz. Michel Talagrand wins Abel prize for work wrangling randomness. *Quanta Magazine*, 20/3/2024.
2. Alex Wikins. Mathematician wins 2024 Abel prize for making sense of randomness. *NewScientist*, 20/3/2024.



Michel Talagrand

Quá trình ngẫu nhiên là một tập hợp các sự kiện mà kết quả là không biết trước nhưng tuân theo một số quy luật mô tả một hiện tượng nào đó. Chẳng hạn, đó có thể là chuỗi các lần tung đồng xu, là quỹ đạo của các nguyên tử trong chất khí, hay tổng lượng mưa hàng ngày. Các nhà toán học muốn hiểu mối quan hệ giữa hành vi của các thành tố và hành vi tổng thể của hệ. Bạn phải tung đồng xu bao nhiêu lần để chắc rằng nó là cân đối? Liệu một dòng sông có tràn bờ không? Talagrand tập trung vào các quá trình Gauss, một quá trình có phân bố tự nhiên và nhiều tính chất toán học đẹp. Ông tập trung tìm hiểu về giá trị cực trị của quá trình Gauss và thiết lập một loạt các chặn trên và chặn dưới chặt cho chúng. “Để có được một bất đẳng thức tốt là một nghệ thuật,” ủy ban giải Abel nhấn mạnh. Nghệ thuật đó rất hữu ích. Chẳng hạn, các phương pháp của Talagrand có thể đưa ra ước tính rất sát cho mực nước cao nhất mà một con sông có thể đạt được trong 10 năm tới hoặc cường độ của trận động đất mạnh nhất có thể xảy ra.

Việc tìm kiếm các giá trị cực trị của các quá trình mô tả những dữ liệu nhiều chiều là một thách thức. Giả sử bạn muốn đánh giá nguy

cơ lũ lụt trên một dòng sông, và điều này sẽ phụ thuộc vào rất nhiều tham số như lượng mưa, gió và nhiệt độ,... Chúng ta mô hình hóa cao độ của dòng sông như một quá trình ngẫu nhiên Gauss. Talagrand đã dành nhiều năm để phát triển một kỹ thuật phân tích chuỗi tổng quát (*generic chaining*) cho phép tìm hiểu quá trình Gauss thông qua hình học của tập các chỉ số của nó. Dưới đây, chúng ta xem xét một dạng đơn giản của kỹ thuật này. Giả sử $(X_t)_{t \in T}$ là một quá trình Gauss với tập chỉ số $T \subset \mathbb{R}^n$ (đây là một họ các biến ngẫu nhiên mà bất kỳ tổ hợp hữu hạn nào của chúng đều là một biến ngẫu nhiên Gauss). Giả sử quá trình này có kỳ vọng 0, khi đó phân phối của nó phụ thuộc vào hiệp phương sai của chúng. Xét hàm khoảng cách cảm sinh trên T cho bởi $d(s, t) = \mathbb{E}(|X_s - X_t|^2)$. Mối quan tâm của chúng ta khi này là giá trị cực đại $S_T = \max_{t \in T} X_t$. Talagrand đã đưa ra phương pháp ước lượng đáng diệu của xác suất vượt ngưỡng $\mathbb{P}(S_T \geq u)$ hay giá trị kỳ vọng $\mathbb{E}(S_T)$ dựa vào cấu trúc của không gian (T, d) . Ý tưởng căn bản của phương pháp này dựa trên việc xấp xỉ T bởi một chuỗi các tập con hữu hạn. Chọn $t_0 \in T$ và một dãy các tập $T_0 = \{t_0\} \subset T_1 \subset \dots \subset T_n = T$ bất kỳ. Tương ứng, ta có một dãy phép chiếu $\pi_i : T \rightarrow T_i$ với, $i = 1, \dots, n$, thỏa mãn $d(t, \pi_i(t)) = d(t, T_i)$. Xét phân tích

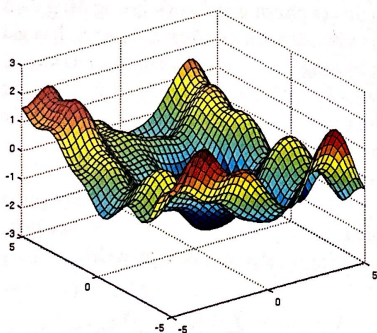
$$X_t - X_{t_0} = \sum_{i=1}^n (X_{\pi_i(t)} - X_{\pi_{i-1}(t)}).$$

Mấu chốt tiếp theo là chọn dãy tập $(T_i)_{i \geq 1}$ như thế nào? Qua các nghiên cứu, Talagrand chỉ ra rằng, chúng ta nên chọn một dãy các tập thỏa mãn tính chất $|T_{i+1}| \leq |T_i|^2$, và vì vậy $|T_i| \leq 2^{2^i}$. Dưới điều kiện đó, ông chỉ ra

$$\mathbb{E}(S_T) \leq C \sup_{i \in T} \sum_{i \geq 1} 2^{i/2} d(t, T_i),$$

với C là một hằng số. Hơn nữa, ông thiết lập chặn dưới qua một khái niệm mở rộng của dãy tập $(T_i)_{i \geq 1}$, gọi là các phân hoạch đúng

(admissible partition). Một lần nữa, kích cỡ tăng trưởng $|T_{i+1}| \leq |T_i|^2$ cũng là hợp lý đối với chặn dưới. Kết quả này mang tên *Talagrand's majorizing measure theorem*. Nó không chỉ cho ta biết chính xác cỡ của $\mathbb{E}(S_T)$ mà còn đưa ra thuật toán tính giá trị này thông qua dãy phân hoạch tối ưu. Ý tưởng của kỹ thuật này tưởng chừng rất đơn giản và tự nhiên, nhưng đã cho thấy những ứng dụng rộng rãi. Chẳng hạn, trong thực tế làm việc với dữ liệu có số chiều lớn, thường các phép chiếu được sử dụng để giữ lại các tham số quan trọng. Các phép chiếu này có thể được mô tả như một quá trình ngẫu nhiên: $X_t = \langle g, t \rangle$, trong đó $g \in \mathbb{R}^n$ là vector dữ liệu dạng Gauss, và $t \in T$ là các điểm trên không gian chiếu. Khi đó, phương pháp của Talagrand có thể lượng hóa thông tin của phép chiếu, hay đưa ra các thuật toán chiếu tối ưu.



Quá trình Gauss

Ngoài giá trị cực trị, Talagrand cũng tìm hiểu dạng điệu trung bình của quá trình ngẫu nhiên. Trong nhiều tình huống, các yếu tố, sự kiện nếu nhìn riêng lẻ thì có tính ngẫu nhiên rất rõ rệt, nhưng chúng lại tạo nên một tổng hòa dường như có tính tất định. Đặc biệt là khi những yếu tố riêng lẻ có tính độc lập. Ví dụ, khi tung một đồng xu cân bằng, ta không thể nói trước kết quả là mặt sấp hay mặt ngửa. Khi tung nó 10 lần, trong số

2^{10} khả năng có thể xảy ra, ta sẽ nhận được bốn, năm hoặc sáu mặt ngửa (gần với 5 – giá trị kỳ vọng) với xác suất 66%. Nếu ta tăng số lần tung lên 1.000 lần, số mặt ngửa nhận được từ 450 đến 550 sẽ xảy ra với xác suất 99,7%. Thực tế xác suất để số mặt ngửa tập trung quanh giá trị trung bình là một xác suất gần 1 theo tốc độ mũ, cụ thể xác suất này lớn hơn $1 - \exp(-cn)$ với c là một hằng số và n là số lần tung. Như vậy, dù cho hệ ban đầu tỏ ra rất hỗn độn với vô số thành tố độc lập, sự ngẫu nhiên sẽ dần dà tự triệt tiêu và chúng ta có thể nhìn ra trật tự của hệ. Hiện tượng này gọi chung là sự tập trung của độ đo (concentration measure). Talagrand đã đưa ra một loạt các bất đẳng thức giúp định lượng sự tập trung đó và chứng minh rằng nó đúng trong nhiều bối cảnh phức tạp khác nhau. Giống như phương pháp generic chaining, các bất đẳng thức tập trung của Talagrand được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực của toán học. “Thật kinh ngạc là các bất đẳng thức Talagrand có thể tiến xa đến thế, chúng như những chiếc ốc vít giữ mọi thứ lại với nhau”, nhà toán học Assaf Naor bình luận. Hãy xem xét một vấn đề tối ưu, trong đó bạn phải sắp xếp các vật có kích thước khác nhau vào các thùng (một mô hình phân bổ nguồn lực). Khi bạn có nhiều vật dụng, sẽ rất khó để tìm ra số lượng thùng nhỏ nhất mà bạn cần. Nhưng bất đẳng thức Talagrand có thể cho bạn biết bạn có thể cần bao nhiêu thùng nếu kích thước của các vật là ngẫu nhiên. Các phương pháp tương tự đã được sử dụng để chứng minh hiện tượng tập trung trong tổ hợp, vật lý, khoa học máy tính, thống kê.

Một ngã rẽ lớn khác của Talagrand đến từ vật lý. Từ những năm 1990, ông bắt đầu áp dụng sự hiểu biết của mình về các quá trình ngẫu nhiên để chứng minh một giả thuyết quan trọng về *spin glass*, một mô hình về vật liệu có từ tính hỗn loạn được tạo ra bởi các tương tác ngẫu nhiên. Đây vốn là một mô

hình thuần túy lý thuyết với phát biểu hoàn toàn toán học. Giorgio Parisi bằng trực giác và các phép tính xấp xỉ vật lý đã đưa ra công thức cho năng lượng tự do của mô hình spin glass (nó còn được gọi là công thức Parisi, và cũng là một kết quả quan trọng dẫn đến giải Nobel cho Parisi năm 2021). Parisi từng nói: “Đưa ra và tin tưởng phỏng đoán là một chuyện, nhưng việc chứng minh nó lại là một chuyện khác, và tôi từng tin rằng đó là một vấn đề khó đến mức không thể chứng minh được”. Cùng với chặn trên chứng minh bởi Geuara, Talagrand đã dành ra hơn 5 năm để đưa ra chặn dưới cho hàm năng lượng tự do, hoàn tất chứng minh cho công thức Parisi. “Hóa ra lời giải cũng không khó lắm. Nhưng tất nhiên, bạn không thể đột nhiên tìm thấy nó sau khi thức dậy vào buổi sáng. Phải có rất nhiều công việc nhỏ trung gian”, Talagrand nói với New York Times.

Nhà toán học, hiện đã 72 tuổi, cũng có cách tiếp cận tương tự đối với chính cuộc đời mình. Ông bộc bạch: “Tôi đã không thể học toán một cách dễ dàng. Tôi cố gắng làm việc, bắt chước những khuyết tật, và cách tôi làm

việc là cố gắng hiểu thật rõ những điều đơn giản. Thực sự, thực sự kỹ càng, đầy đủ và chi tiết. Và đó hóa ra đó là một cách tiếp cận thành công”. Hiện tại, ông vẫn tiếp tục làm việc theo kim chỉ nam đó. Kiên nhẫn từng bước xem đi xem lại, ngẫm nghĩ các vấn đề từ mọi khía cạnh, để rồi đưa ra một cái nhìn thấu đáo và trở thành công cụ hữu ích cho toán học. Ông từng nói: “Hiểu điều gì đó một cách sâu sắc, một cách thuần túy sẽ làm cho lý thuyết trở nên dễ hiểu hơn nhiều. Sau đó, thế hệ tiếp theo có thể sử dụng và đạt được tiến bộ theo cách riêng của họ”. Gần đây, ông hứng thú với lý thuyết lượng tử và viết một cuốn sách về những chiêm nghiệm của mình về lĩnh vực mới mẻ này. Nó đã trở thành một trong những sách giáo khoa cho các nhà toán học muốn tìm hiểu về trường lượng tử. Talagrand đang sử dụng một phần số tiền từ các giải thưởng mình đạt được để lập nên một giải thưởng của riêng mình nhằm “ghi nhận thành tựu của các nhà nghiên cứu trẻ trong các lĩnh vực mà tôi đã cống hiến cả đời mình” và hy vọng họ sẽ tạo ra những ngã rẽ bất ngờ, thú vị như ông đã từng.



HÌNH HỌC PHI EUCLID

Phần II: Những nhà tiên phong

LÊ VŨ MINH TRÍ VÀ NGUYỄN DUY ANH¹

Một ý tưởng tưởng chừng như mâu thuẫn với những cảm quan thường thức, thế nhưng lại trở thành một vũ trụ hình học mới lạ và chặt chẽ, và có thể nắm giữ bản chất của không gian chúng ta đang sống. Thế nhưng quá trình khám phá và phát triển ý tưởng ấy phải trải qua hàng thập kỷ với nhiều trắc trở và gian nan.

Những nhà tiên phong

Tiếc cho Saccheri khi tác phẩm giá trị của ông không nhận được sự chú ý của nhiều người hơn, vì thế nên câu hỏi về tiên đề 5 của Euclid vẫn còn dai dẳng tới tận cả thế kỷ sau. Và số phận một lần nữa lại trên người các nhà toán học, khi mà không phải một, mà tận ba người đã gần như cùng lúc đến với đáp án cho câu hỏi lớn của chúng ta. Dù vậy, cách tiếp cận vấn đề của họ khác nhau một trời một vực.

Carl Friedrich Gauss là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất mọi thời đại. Trong suốt chiều dài sự nghiệp, ông đã để lại những công trình vượt xa tri thức thời ấy trong rất nhiều lĩnh vực như lý thuyết số, lý thuyết xác suất, hình học và lý thuyết hàm số. Khác với những người vô cùng tích cực xuất bản như Leonhard Euler hay Augustin Louis Cauchy, Gauss tuân thủ triết lý “ít nhưng chín” (pauca sed matura): chỉ khi nào ông suy

ngẫm đến mức đủ thấu đáo theo ý ông, và chỉ khi ông đã trình bày súc tích vấn đề ấy, ông mới cho đăng một nghiên cứu nào đó. Những ý tưởng “chưa đủ chín” được ông tập hợp lại trong ngăn bàn làm việc, nơi mà dần dà tích trữ lượng tri thức đi trước thời đại 50 năm. Khi Gauss bàn luận về toán, thường sẽ có một tập giấy trong đó có ích cho cuộc trao đổi, được lấy ra sau cửa miệng “tôi cũng đã suy nghĩ về vấn đề đó rồi”, đôi lúc kèm theo “tôi cũng đã đạt đến những kết quả tương tự”.

Không lĩnh vực toán nào là Gauss không chạm tới, và câu hỏi về tiên đề thứ 5 không phải ngoại lệ. Nhà toán học vĩ đại đã trăn trở về vấn đề này từ năm lên 15, và sau nhiều thất bại, ông dần nghi ngờ sự tồn tại của một chứng minh. Cũng như những người đi trước, ông đã thử giả sử phản chứng tiên đề 5, cũng khám phá ra nhiều kết quả mà chưa thấy mâu thuẫn xuất hiện. Ông chưa vội xuất bản gì về những phát hiện ấy, mà tự mình tìm tòi trong đó cho đến khi bản thân ông đã hài lòng. Ngoài phương châm xuất bản của bản thân, còn một thế lực khác khiến ông dè dặt. Chả là có một người đồng hương đương thời có ảnh hưởng chẳng kém cạnh Gauss chút nào đã lên tiếng – triết gia Immanuel

¹ THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.

Kant. Kant đồng ý rằng kiến thức bắt đầu từ những trải nghiệm từ bên ngoài, nhưng cho rằng trí óc có thể hành động dựa trên những ấn tượng chỉ có thể là bởi nó đã có những “trực giác” về không gian và thời gian độc lập với kinh nghiệm, và cũng đúc khuôn những kinh nghiệm ấy. “Khái niệm của không gian Euclid không có nguồn gốc thực nghiệm nào cả, mà là sự cần thiết không thể tránh khỏi của suy nghĩ. Không hệ thống hình học nào khác tồn tại, vì không hệ thống hình học nào khác có thể được hình dung”, Kant viết.

Riêng khẳng định vừa rồi là sai, bởi các nhà toán học đã hiểu được phần nào lời giải của vấn đề về tiên đề 5, và sắp tới thì hi vọng là quý độc giả cũng vậy. Về phần Gauss, do sự đồng đạo của các tín đồ theo Kant và những “người hâm mộ” Euclid, ông tránh né gây hấn với họ, có nghĩa là ông không xuất bản các phát hiện của mình. Tất nhiên Gauss không chỉ có một mình, mà một bằng hữu của ông sẽ có đóng góp lớn vào các sự kiện sắp tới.

Farkas Bolyai (1775 – 1856) là nhà toán học người Hungary, ban đầu học ở Jena, về sau trở thành đồng môn và một người bạn gần gũi của Gauss khi hai người học ở Göttingen. Mỗi quan hệ này được họ duy trì suốt phần đời còn lại.

Sau nhiều nỗ lực và tâm sức, Bolyai đã nhận ra một điều đáng chú ý về tiên đề song song: ông không thể chứng minh được nó mà không ngộ nhận. Có một lần người bạn Gauss còn giúp ông nhận ra sai sót của mình trong một chứng minh bất thành. Là một nhà toán học khá xuất sắc, với một tác phẩm nổi tiếng về Toán sơ cấp, *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae* (tạm dịch “Nỗ lực Giới thiệu những Yếu tố của Toán thuần túy tới Thanh niên Ham học”), thế nhưng danh tiếng của Farkas Bolyai hầu như đến từ việc ông là... cha của con ông, Janos Bolyai.



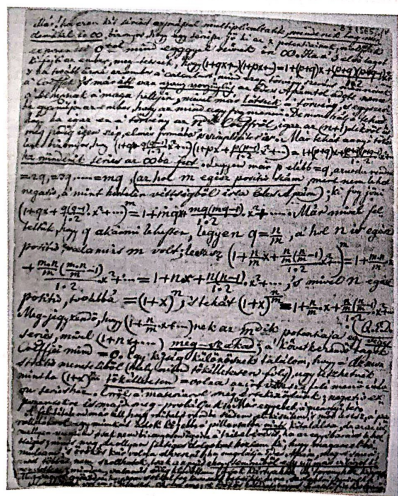
Janos Bolyai, lấy từ tem của Bưu điện Hungary, nhân kỷ niệm 100 năm ngày mất. Hai bức hình gốc của cậu đều đã thất lạc.

Janos (1802 – 1860) từ sớm đã tỏ ra là một nhà toán học uyên bác hơn cả cha mình. Đơn cử như khi Farkas đổ bệnh, ông đã cho cậu con trai mới 13 tuổi đứng lớp thay. Không muốn uống phí tiềm năng của cậu quý tử, Bolyai cha đã gửi thư cho Gauss nhờ ông thu nhận Janos, nhưng oái oăm thế nào mà chẳng được hồi đáp sau tận 16 năm. Vì thế chàng trai trẻ đã rẽ ngang sang học ở Viện Kỹ thuật Hoàng gia tại Vienna năm 1817, và đi theo quân đội sau khi tốt nghiệp. Trong 10 năm sau đó, Janos không chỉ là một nhà toán học sâu sắc, mà còn là một nghệ sĩ violin say mê, và một chuyên gia đấu kiếm. Cậu từng chấp nhận lời thách thức đấu kiếm với 13 sĩ quan kỵ binh, với điều kiện là cậu được chơi violin sau mỗi 2 trận đấu. Kết quả là 13 – 0 nghiêng về phía Janos.

May cho chúng ta, và ban đầu là không may lắm cho người cha Farkas, chàng thanh niên Janos tài năng cũng bị bài toán chứng minh tiên đề 5 hớp hồn, rồi lao vào nghiên cứu. Cha cậu ngậm ngùi nhớ lại kết cục ông từng trải, nhắn gửi cậu những lời sau đây:

"Đừng dành một giờ đồng hồ nào cho vấn đề đó (tiền đề song song). Nó không đưa đến một kết quả nào cả; thay vào đó nó sẽ đầu độc cả cuộc đời con... Ta tin rằng bản thân ta đã tìm ra mọi ý tưởng có thể nghĩ tới liên quan đến vấn đề này."

Trái với mong muốn của cha, Janos được tiếp thêm động lực để tiếp tục, nhưng rồi chuỗi bất bại 2000 năm của bài toán ấy cũng dần khiến cậu nghĩ rằng tiền đề số 5 thực sự không phải định lý. Và cậu cũng chọn đi con đường giả sử phản chứng, tiếp tục đào sâu vào thứ hình học xa lạ giờ đây đang dần được cậu định hình rõ nét. Khác với Saccheri, cậu chẳng vướng bận với nghĩa vụ chứng minh Euclid là đúng; trong mắt chàng trai trẻ, thế giới mới này rực rỡ chẳng kém gì thứ hình học được tôn sùng bấy lâu. Thành quả của cậu khiến chính người cha thay đổi quan niệm. "Từ hư không, con đã tạo ra một vũ trụ lạ lẫm và mới mẻ", Janos khẳng định trong một bức thư trao đổi với cha.



Dòng được gạch chân ở cuối trang: "Từ hư không, con đã tạo ra một vũ trụ lạ lẫm và mới mẻ".

Farkas hí hửng thêm những kết quả ấy vào trong cuốn *Tentamen* lần tái bản năm 1832,

dưới tiêu đề *Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens* (Phụ lục Giải thích Khoa học Tuyệt đối của Không gian), đồng thời nối lại liên lạc với cây đa cây đề Gauss của toán học đương thời. Gauss hết lời tán dương, song lại có đoạn ông viết:

"Nếu tôi bắt đầu với việc nói rằng tôi không dám khen ngợi công trình này, hẳn trong một khắc anh sẽ ngạc nhiên, nhưng tôi không thể làm khác. Khen ngợi nó đồng nghĩa với việc khen ngợi chính tôi. Vì toàn bộ nội dung của công trình, từ cả hướng tiếp cận của con trai anh, tới cả những kết quả mà nó thu được, trùng khớp gần như hoàn toàn những suy nghĩ đã chiếm giữ đầu óc tôi suốt ba mươi hay ba mươi lăm năm qua... Kế hoạch của tôi là viết tất cả ra giấy, để ít nhất thì những ý tưởng này không theo tôi xuống mồ. Nên tôi rất ngạc nhiên khi có người đã làm việc này thay tôi, và đặc biệt vui mừng khi người đó lại chính là con trai của người bạn cũ đã vượt xa tôi một cách ấn tượng đến vậy."

Đoạn thư này với Janos như là Gauss khẳng định ông lấy cấp ý tưởng của cậu. Thật ra, những kết quả cậu (và nhân vật thứ ba mà chúng ta sắp nói đến) đạt được chi tiết và phong phú hơn Gauss rất nhiều, điều này chính Gauss còn công nhận. Vốn tính khí nóng nảy, cậu trai thất vọng kinh khủng, và khoảnh khắc ấy là lúc cậu đoạn tuyệt với xuất bản (may cho hậu thế là khoảng 20000 trang bản thảo của Janos vẫn còn). Dù về sau đã dẹp bỏ được mối nghi ngờ về nhà toán học thần bản thân do công trình của cậu chẳng hề được người đời hưởng ứng. Đập đổ một tượng đài trong lòng nhân loại suốt hai thiên niên kỷ chẳng phải dễ dàng, và điều ấy càng khắc sâu nỗi thất vọng vốn có. Sự công nhận xứng đáng cho Janos đáng tiếc lại không đến khi cậu còn sống.

Quay ngược thời gian về năm 1829, ba năm trước bài báo của Janos, một bài báo về chủ

đề tương tự đã xuất hiện tại nước Nga xa xôi. Tác giả là nhân vật chính thứ ba, Nikolai Lobachevsky.



Nikolai Ivanovich Lobachevski.

Cần nói qua về bối cảnh giáo dục Nga thời ấy. Giáo dục nói chung và toán học nói riêng ở Nga giai đoạn cuối thế kỷ 18 – đầu thế kỷ 19 chưa được phát triển như các quốc gia phương Tây khác. Tình hình không khả quan hơn sau khi cuộc chinh phạt của Napoleon sa lầy giữa mùa đông nước Nga, bởi sự kiện này đã làm dậy lên hai hiện tượng trong lòng người dân Nga thời bấy giờ: họ dần có ác cảm với những ảnh hưởng ngoại bang, và niềm tin vào một Đảng tối cao thần bí cứu rỗi mẫu quốc Nga vĩ đại được nhen nhóm lại mạnh mẽ, không tốt cho phát triển khoa học. Đứng trước hai cơn gió ngược chiều, công cuộc cường hóa nền giáo dục nước nhà, lấy đó làm tiềm lực quốc gia của Sa hoàng Aleksandr chẳng hề thuận lợi. Lobachevsky đến tuổi vào Đại học Kazan trong bối cảnh đó, và sẽ dành 40 năm cuộc đời ông gắn bó với nơi đây.

Chẳng rõ tự bao giờ, Lobachevsky đã nghiên ngấm và thử đưa ra những chứng minh, cũng đã nghi ngờ và thử giả sử mệnh đề phủ định của tiên đề song song, và cũng đã theo mạch phát triển mà chẳng thấy mâu thuẫn nào. Đến lúc ấy, hẳn Lobachevsky đã bị thuyết phục bởi lượng kết quả mới quá nhiều để có thể dẫn đến một mâu thuẫn, ông đành tạm ba năm phát triển hệ thống ông mới tạo dựng. Ông cho xuất bản những kết quả của mình trên tờ *Messenger* của Kazan, và chỉ nhận lại cái quay lưng lạnh nhạt của giới học thuật. Ngoài việc nền giáo dục Nga xa cách với các trung tâm sôi nổi của cộng đồng nghiên cứu, điều này một phần còn do Lobachevsky đặt tên loại hình học này là “hình học tưởng tượng” (imaginary geometry). Bài báo *Về Nền tảng của Hình học* của ông còn bị từ chối bởi một người phản biện thờ ơ thuộc Viện Hàn lâm Khoa học St. Petersburg, với lý do trong hai tích phân xác định trong bài báo thì một cái là sai, cái còn lại thì để chứng minh. Sở dĩ một bài báo về hình học có yếu tố giải tích là bởi Lobachevsky đã phát triển lượng giác của loại hình học này.

Lobachevsky không vì phản ứng của dư luận mà nhụt chí. Ông ra sức viết hàng loạt bài báo để thuyết phục giới học thuật về tầm cỡ của thành tựu của ông. Ông vẫn hết mình với ngôi trường ông giảng dạy, hết mình với lao động. Khi trao đổi những kết quả với Gauss, ông nhận lại những lời khen có cánh, thậm chí là lời đề nghị ông giữ một chân tại khoa Toán Đại học Göttingen cạnh Gauss. Lobachevsky từ chối. Trong suốt những năm tháng gần bó với Đại học Kazan, Lobachevsky đã kiêm vai trò của giảng viên, nhà nghiên cứu, thành viên hội đồng quản trị, lao công, thậm chí từng thiết kế kiến trúc và giúp trường chống dịch tả.

Đáp lại những công lao đó, người ta đã cho Lobachevsky về hưu non khi mới ngoài ngũ tuần. Có người cho rằng, những thế lực khiến Gauss e ngại đã nhúng tay vào: những

tín đồ của Euclid và Kant hẳn đã rì tai gia đình hoàng tộc về thứ hình học mới đã xúc phạm đến tượng đài tri thức của Hy Lạp và Euclid. Kể cả quyết định đột ngột trên, hay nỗi đau mất con, hay sự mù lòa sau này, tất cả vẫn chẳng thể quật ngã Lobachevsky, ông vẫn nghiên cứu về loại hình học phủ định tiên đề song song chừng nào ông còn nghĩ được, vẫn nhiều lần xuất bản thêm đến cuối đời. Vào kỷ niệm 50 năm thành lập Đại học Kazan, ông lại cho đăng tải một bài báo về công trình để đời ông, lúc này được ông gọi là *Pangeometry*. Đổi tên vẫn không giúp ông nhận được sự công nhận xứng đáng.

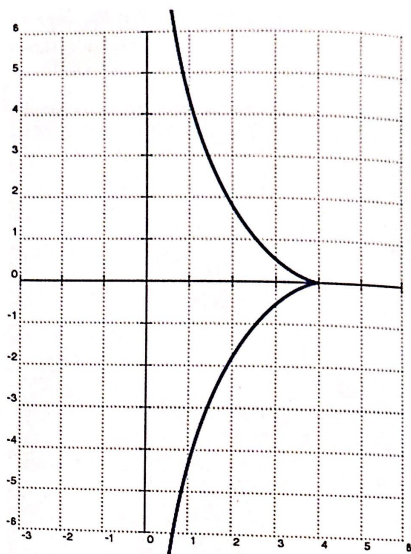
Cùng một bài toán ta có ba cách tiếp cận: người thì giữ làm bí mật do lo sợ thời thế, người lại cay đắng thất vọng sau một bức thư, người lại chẳng hề ngăn bất cứ điều gì, vững tin vào thành quả bản thân. Dù gì đi nữa thì những công trình hết sức công phu của họ đã khiến dư luận dần có lý do để tin:

Tiên đề song song không thể được chứng minh từ các tiên đề còn lại.

Sự phi mâu thuẫn

Tuy nhiên có một điều cả ba người tiên phong trên thiếu. Loại hình học họ nghĩ ra vẫn thuần túy “nằm trên giấy”, sự phi mâu thuẫn của nó vẫn chỉ là giả định. Thứ hình dung dung hậu thế dốc sức phát triển hàng trăm định lý, để rồi ai đó phát hiện ra một mâu thuẫn quá đỗi đơn giản nào đó. Mà từ cái mệnh đề mâu thuẫn, người ta có thể chứng minh được mọi mệnh đề, nên một hệ tiên đề chứa mâu thuẫn chắc chắn là không đem lại giá trị gì. Nhiệm vụ cấp thiết tiếp theo chính là chứng minh sự phi mâu thuẫn đó.

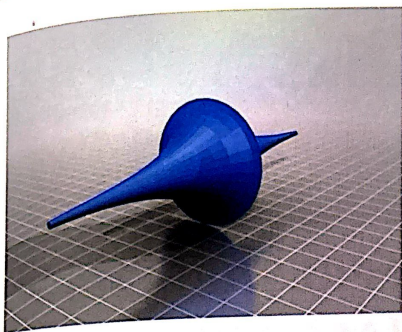
Mọi nghi ngờ cuối cùng cũng được giải quyết bởi Eugenio Beltrami (1835 – 1900) vào năm 1868 (người đàn ông này cũng giới thiệu lại công trình bị bỏ quên của Saccheri): hình học Euclid và loại hình học mới mẻ này “đúng như nhau”.



Đường cong Tractrix.

Cách làm rất đơn giản: dựng ra một không gian tuân theo quy luật của hình học mới trong chính không gian của hình học Euclid. Và mô hình mà Beltrami lựa chọn là bề mặt của một “giả cầu” (pseudosphere), thứ mà ta thu được khi ta quay một đường tractrix xung quanh trục tung. Nếu định nghĩa đường thẳng trên bề mặt này là đường đi ngắn nhất giữa hai điểm, thì một phần các tính chất hình học trên bề mặt này thỏa mãn hình học của Bolyai và Lobachevsky.

Quan trọng hơn, mọi định lý của loại hình học trên bề mặt này có thể được quy về một định lý tương ứng trong hình học Euclid, tức là nếu hình học mới này có mâu thuẫn, thì hình học của Euclid cũng vậy. Nói cách khác, hình học Euclid, thứ ở vị trí thống trị suốt từ thời Hy Lạp cổ đại đến lúc ấy, chỉ “đứng ngang với” hình học mới của Gauss, Bolyai và Lobachevsky mà thôi. Phần phân tích hai mô hình Beltrami–Klein và Poincaré sẽ chứng minh điều này ở mức độ hình học sơ cấp hơn.



Mặt giả cầu (pseudosphere).

Lúc này ta càng phải trân trọng thiên tài của Euclid. Ông không những xếp đây là tiên đề sau cùng, mà còn hoãn việc dùng đến nó trong tận 29 kết quả đầu tiên trong *Elements*. Những gì mà tận hai thiên niên kỷ sau nhân loại mới phát hiện ra là bảo chứng cho tính độc lập của tiên đề thứ 5: nó không thể là một định lý rút ra từ chỉ 4 tiên đề đầu tiên. Tiên đề thứ 5 thật sự là một tiên đề độc lập.

Lộn lại vấn đề về gốc rễ, xét mệnh đề phủ định của Tiên đề 5 theo phát biểu của Playfair:

Tiên đề 5: Cho trước một điểm M không nằm trên d , có đúng một đường thẳng d' đi qua M và song song với d .

sẽ có phủ định là:

Tồn tại một điểm M và đường thẳng d không đi qua nó, sao cho số đường thẳng đi qua M và song song với d là khác 1. Con số này có thể là 0 hoặc lớn hơn hoặc bằng 2.

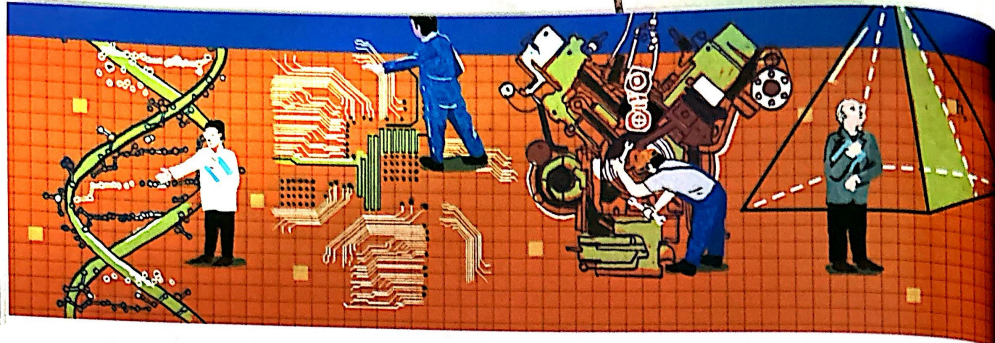
Hóa ra, trường hợp thứ hai tương đương với giả thuyết góc nhọn vững chãi mà Saccheri

đã không loại được. Còn trường hợp con số ấy là 0, nói cách khác là mọi đường thẳng đều giao nhau, thì vị tu sĩ của chúng ta đã loại được. Đồng thời, Định lý 16 (định lý góc ngoài) và Định lý 27 (định lý góc so le trong) trong *Cơ sở* của Euclid đã chỉ ra sự tồn tại của đường song song kia mà.

Thực ra, cánh cửa mà ta tưởng như Saccheri đã khóa kín cũng ẩn chứa trong nó một thế giới phong phú khác, gọi là hình học elliptic. Sau này, Riemann và những đóng góp của ông đã thống nhất và đào sâu hơn vào cả hình học elliptic và hình học hyperbolic, nội dung những đóng góp này xin hẹn độc giả ngày nào đó không xa. Còn điều vô lý ta vừa chỉ ra thực chất có thể truy ngược về một trong các giả định được ngầm thừa nhận.

Tài liệu tham khảo

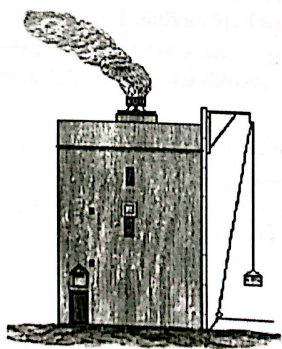
- [1] E.T. Bell, *Men of Mathematics The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré*.
- [2] David M. Burton. *The History of Mathematics An Introduction*.
- [3] M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries – Development and History*.
- [4] Wikipedia tiếng Anh.
- [5] <https://www.youtube.com/playlist?list=PLJLK2cYtt-VBSBvfhxx-DW3Zw3nOQHVVZ>
- [6] <https://rosetta.vn/lequanganh/wp-content/uploads/sites/7/2018/07/Riemann.pdf>
- [7] <https://www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/Drama.shtml>



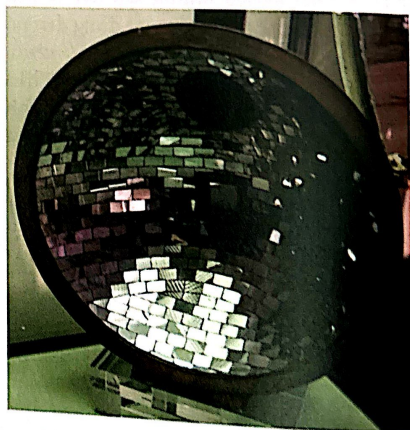
THẤU KÍNH FRESNEL VÀ NGỌN HẢI ĐĂNG

NGUYỄN HOÀNG VŨ¹

Việc sử dụng ánh sáng để báo hiệu cho tàu thuyền vào gần bờ là một hoạt động hàng hải có lịch sử lâu đời. Tuy nhiên, đến tận đầu thế kỷ 19, nhiều ngọn hải đăng vẫn hoạt động theo cơ chế như hàng nghìn năm trước đó: nhiên liệu được đốt liên tục trên nóc một tòa nhà cao để ánh sáng tỏa ra không gian xung quanh. Nhiều ngọn hải đăng có lượng tiêu thụ nhiên liệu rất lớn, ví dụ như hải đăng ở Isle of May trên bờ biển Scotland tiêu thụ đến hơn 400 tấn than đá một năm vào giai đoạn đầu thế kỷ 19.



Hình 1. Nhiều ngọn hải đăng cuối thế kỷ 18 vẫn hoạt động bằng cách đốt than đá tạo thành một đồng lửa mà không có hệ thống quang học nào.



Hình 2. Mặt phản xạ parabol cho hải đăng của Thomas Smith năm 1787.

Cũng trong giai đoạn từ cuối thế kỷ 18 đến đầu thế kỷ 19, đã có nhiều nỗ lực để cải tiến nguồn sáng của các ngọn hải đăng, một thành phần quan trọng của giao thương hàng hải toàn cầu lúc đó. Một số kỹ sư đã tiến hành sử dụng các mặt phản xạ paraboloid mạ bạc để hội tụ ánh sáng thành chùm song song. Đồng thời, một loại đèn dầu mới do nhà hóa học Thụy Sĩ Aimé Argand thiết kế, còn gọi là đèn Argand, cũng được đưa vào sử dụng với hiệu suất chiếu sáng tốt hơn và

¹ Hà Nội.

không làm đen các mặt phản xạ như những loại đèn trước đó. Do các mặt paraboloid chỉ hội tụ ánh sáng về một hướng nên các ngọn hải đăng sử dụng công nghệ mới này phải trang bị nhiều nguồn sáng khác nhau để bao phủ hết các hướng. Tuy vậy, độ sáng cũng không đồng đều từ trục chính của mặt phản xạ ra bên cạnh.

Năm 1811, một ủy ban được thành lập ở Pháp với mục tiêu cải thiện các hệ thống chiếu sáng của hải đăng. Do các biến động về chính trị ở Pháp giai đoạn đầu thế kỷ 19 cùng tính kiêm nhiệm của các thành viên, không có nhiều đột phá mới xảy ra cho đến khi có sự tham dự của Augustin Fresnel vào năm 1819.

1. Augustin Fresnel

Trước đó, Fresnel đã trở nên nổi tiếng về những nghiên cứu quang học. Các công trình của ông, cũng như của Thomas Young ở Anh, đã chứng minh tính chất sóng của ánh sáng, giống với giả thuyết của Huygens. Fresnel cũng đã phát hiện rằng sóng ánh sáng là sóng ngang, đồng thời giải thích một số hiện tượng quang học như phân cực ánh sáng và khúc xạ kép dựa trên thuyết sóng ánh sáng.

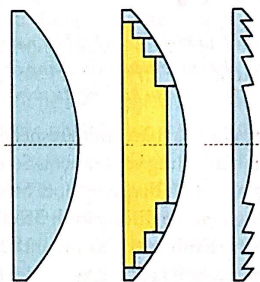


Augustin Fresnel (1788 – 1827).

Fresnel tham gia vào ủy ban Hải đăng nhờ sự đề cử của Arago, khi đó cũng là thành viên

trong ủy ban này. Bản thân Arago cũng là một người ủng hộ nhiệt thành cho thuyết sóng ánh sáng và hai người là cộng sự của nhau trong các nghiên cứu về quang học. Ngay từ khi bắt đầu công việc, Fresnel đã có ý tưởng thay các mặt phản xạ paraboloid bằng các thấu kính do quá trình khúc xạ qua thủy tinh có lượng ánh sáng bị hấp thụ mất ít hơn nhiều so với phản xạ trên các mặt kim loại.

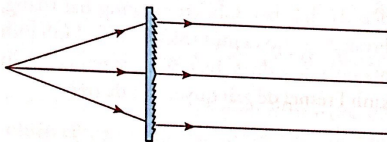
Tuy nhiên, nếu sử dụng thấu kính hải đăng thủy tinh thông thường, người ta sẽ cần chế tạo một thiết bị quang học có bề dày cũng như khối lượng rất lớn để thỏa mãn yêu cầu quang học cho thiết kế của ngọn hải đăng. Những thử nghiệm trước đó theo hướng này đều đã thất bại. Chỉ trong vòng hai tháng, Fresnel đã cho ra một thiết kế thấu kính mới mà ngày nay được biết đến với tên gọi thấu kính Fresnel để giải quyết vấn đề trên.



Hình 3. Trái: thấu kính ban đầu. Giữa: Giảm bớt độ dày. Phải: Thấu kính Fresnel gồm các vành tròn đồng tâm.

Thiết kế của thấu kính Fresnel dựa trên một nhận định tương đối đơn giản: trong phần thấu kính bằng thủy tinh đồng nhất, ánh sáng truyền đi theo đường thẳng. Hiện tượng khúc xạ chỉ xảy ra ở hai mặt của thấu kính tiếp xúc với không khí, là một mặt phẳng và một mặt cong như trong hình. Do đó, nếu ta chia thấu kính ra thành các phần, giảm độ dày giữa hai mặt khúc xạ của mỗi phần và xếp lại, ta được một thấu kính có cấu

tạo là các vành tròn ghép lại (Hình 3). Thấu kính này mỏng hơn nhiều nhưng vẫn cho chùm tia khúc xạ song song nếu mặt cong của mỗi vành được chế tạo theo đúng định luật khúc xạ ánh sáng cho cùng một vị trí tiêu điểm. Nói cách khác, ta được một thấu kính có tiêu cự tương đương thấu kính ban đầu nhưng giảm thiểu đáng kể cả về độ dày lẫn khối lượng. Nhà toán học Buffon cũng đã từng có ý tưởng về một thấu kính tương tự nhưng chỉ với mục đích hội tụ ánh sáng để đốt. Trong khi đó, Fresnel là người đầu tiên sử dụng thấu kính dạng này để tạo chùm sáng song song và tiến hành ứng dụng vào hải đăng.



Hình 4. Thấu kính Fresnel có khả năng biến chùm sáng phát ra từ tiêu điểm thành chùm song song tương tự như thấu kính hội tụ thông thường.

Công việc chế tạo thấu kính Fresnel đầu tiên được tiến hành cùng với François Soleil, một chuyên gia về thiết bị quang học. Một phiên bản thử nghiệm có đường kính 35 cm được Soleil hoàn thành vào đầu năm 1820. Các phiên bản lớn hơn ra đời ngay sau đó. Do hạn chế của công nghệ giai đoạn này, với các thấu kính kích cỡ lớn, các vành tròn được thay bằng các vành ghép từ các phần tử quang học dạng đa diện gắn lại với nhau.

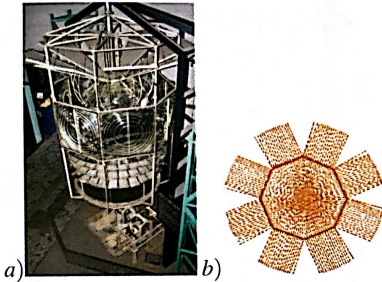
Sau những thử nghiệm thành công đầu tiên, ủy ban Hải đăng Pháp đã quyết định sử dụng tám khung chứa thấu kính Fresnel để lắp đặt tại ngọn hải đăng Cordouan, một trong những ngọn hải đăng nổi tiếng nhất ở trên bờ biển Pháp. Công việc chế tạo lại được thực hiện bởi Soleil. Vào ngày 25 tháng 7 năm 1823, cách đây 200 năm, hệ thống quang học do Fresnel thiết kế bắt đầu hoạt động ở Cordouan.



Hình 5. Thấu kính Fresnel thời kì đầu. Do sự hạn chế của công nghệ chế tạo, nhiều khối thủy tinh được ghép với nhau.

Hệ thống này gồm 8 tấm thẳng đứng tạo thành bát giác đều. Mỗi tấm có một thấu kính Fresnel. Do giới hạn của khúc xạ, chỉ có các tia sáng tạo thành góc nhỏ hơn 45° với trục chính đi qua thấu kính. Các tia còn lại sẽ bị thoát ra ở phía trên hoặc phía dưới. Để sử dụng các tia ở phía trên, Fresnel cho lắp đặt các thấu kính Fresnel nghiêng góc nhằm hội tụ chúng thành chùm song song rồi cho phản xạ qua các tấm kim loại để thành chùm song song với phương ngang. Ứng với mỗi cạnh của bát giác sẽ có một tổ hợp thấu kính nghiêng và gương phẳng như vậy. Hệ thống quang học sẽ được quay tròn đều. Với người quan sát, ánh sáng từ ngọn hải đăng sẽ trở nên nhấp nháy theo một tần số nhất định, giúp phân biệt nó với các vì sao hay các nguồn sáng nhân tạo khác (việc sử dụng nguồn sáng biến đổi theo chu kỳ nhờ việc quay đã được áp dụng cho hải đăng từ cuối thế kỷ 18). Mặt khác, với các tia sáng hướng xuống phía dưới, Fresnel lắp đặt các mặt phản xạ để hướng chúng song song với phương ngang. Tuy nhiên, ánh sáng từ phần này sẽ không quay cùng với hệ thống ở trên và có cường độ cố định. Hệ thống quang học do Fresnel thiết kế cho cường độ ánh sáng quan sát được gấp 8 lần so với các hệ thống mặt phản xạ dạng paraboloid trước đó, đánh

dầu một bước nhảy vọt trong việc đảm bảo an toàn hàng hải. Người ta cũng có thể điều chỉnh để các ngọn hải đăng gần nhau cho ra ánh sáng nhấp nháy với tần số khác nhau. Nếu thủy thủ trên tàu quan sát được cả 2 ngọn hải đăng cùng lúc, dựa vào bản đồ và góc quan sát tới hai ngọn hải đăng trong thực tế, việc giải bài toán tam giác lượng có thể cho ra vị trí chính xác của tàu.

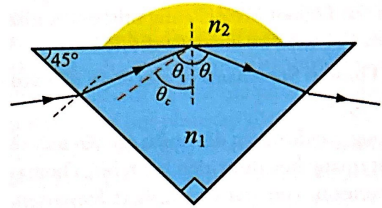


Hình 6. a) Hệ thống quang học đầu tiên sử dụng thấu kính Fresnel tại Cordouan bao gồm 8 mặt chứa các thấu kính Fresnel và các hệ thống phản xạ để hướng các tia sáng phía trên và dưới nguồn sáng. b) Khi hệ thống quay, ta thu được 8 chùm sáng song song mà khi quan sát từ xa sẽ nhấp nháy với tần số cố định.

Trong một số trường hợp khác, người ta chỉ cần ánh sáng cố định – có cường độ đồng đều theo mọi hướng. Fresnel cũng tiến hành cải tiến thiết kế quang học cho trường hợp này. Toàn bộ phần khúc xạ ở chính giữa là một thấu kính Fresnel dạng tròn xoay với trục quay là trục thẳng đứng để đảm bảo tính đối xứng, do đó ánh sáng sẽ được tán đều theo mọi hướng. Với phần trên và phần dưới, ban đầu Fresnel sử dụng các gương tròn xoay để tạo chùm phản xạ nhưng đến năm 1825 ông đã có một bước đột phá mới, sử dụng các lăng kính phản xạ toàn phần.

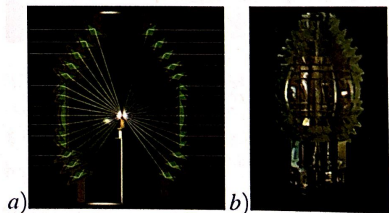
Cũng như tên gọi, các lăng kính này hoạt động dựa trên hiện tượng phản xạ toàn phần. Do chiết suất của thủy tinh lớn hơn không khí nên khi tia sáng từ thủy tinh đi ra không

khí có góc tới lớn hơn góc tới hạn thì nó sẽ không bị khúc xạ mà toàn bộ tia sáng sẽ bị phản xạ tại mặt tiếp xúc này (Hình 7).



Hình 7. Lăng kính phản xạ toàn phần. Khi góc tới cạnh huyền lớn hơn góc tới hạn θ_c với $\sin \theta_c = n_2/n_1$ (n_1 và n_2 lần lượt là chiết suất của thủy tinh và không khí) thì tia sáng bị phản xạ lại toàn bộ thay vì khúc xạ.

Các lăng kính phản xạ toàn phần tròn xoay (với trục quay là trục thẳng đứng) được Fresnel sử dụng cho phía trên và phía dưới của hệ thống quang học. Thiết kế này đã bổ sung các hạn chế của thấu kính Fresnel, cho ra một hệ thống chiếu sáng đều theo các hướng khác nhau (Hình 8). Nó cũng đặt cơ sở cho các ý tưởng sau này về việc thiết kế hệ thống quang học hoàn toàn bằng thủy tinh mà không có các mặt kim loại (ánh sáng bị các mặt kim loại hấp thụ khi phản xạ nhiều hơn so với khi khúc xạ hoặc phản xạ toàn phần qua thủy tinh).

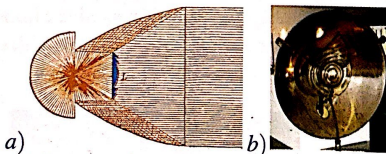


Hình 8. Hệ quang học cho ánh sáng đều ra cố định. a) Thiết kế sử dụng thấu kính Fresnel và lăng kính phản xạ toàn phần. b) Thiết bị trong thực tế gồm các linh kiện là các khối thủy tinh tròn xoay.

Fresnel mất vào năm 1827 trước khi thiết kế quang học có lăng kính phản xạ toàn phần được hoàn thiện. Tuy nhiên, ý tưởng này đã được kế thừa và phát triển thêm bởi người em trai Léonor Fresnel cũng như nhiều nhà khoa học và kỹ sư khác của thế kỷ 19.

2. Thomas Stevenson và giai đoạn nửa sau thế kỷ 19

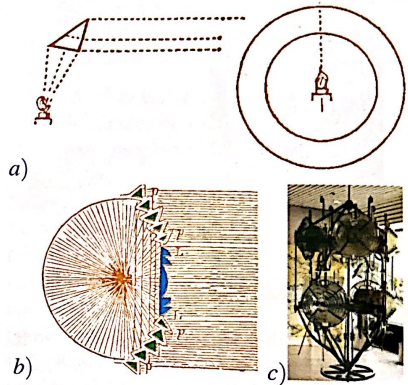
Trong giai đoạn sau đó, nhiều cải tiến mới về mặt quang học được tiến hành bởi Thomas Stevenson, con trai của Robert Stevenson, một kỹ sư hải đăng nổi tiếng. Anh trai ông, Alan Stevenson, cũng có nhiều cải tiến về thiết kế và chế tạo cho hệ thống quang học của hải đăng dựa trên thấu kính Fresnel. Trong một công bố năm 1850, Thomas Stevenson đưa ra một thiết kế kết hợp giữa thấu kính Fresnel và mặt phản xạ parabol kim loại (Hình 9). Các tia sáng đến thấu kính Fresnel được biến thành chùm song song khi nguồn sáng đặt ở tiêu điểm của nó. Các tia sáng chiếu ra phía sau được phản xạ ngược lại nhờ một mặt bán cầu kim loại còn các tia sáng chiếu ra phía trước nhưng không vào thấu kính sẽ được phản xạ nhờ một mặt parabol kim loại có tiêu điểm cũng trùng với vị trí của đèn.



Hình 9. a) Thiết kế của Stevenson bao gồm một thấu kính Fresnel, một mặt phản xạ parabol và một bán cầu phản xạ bằng kim loại. b) Thiết bị thực tế lắp đặt tại cảng Peterhead.

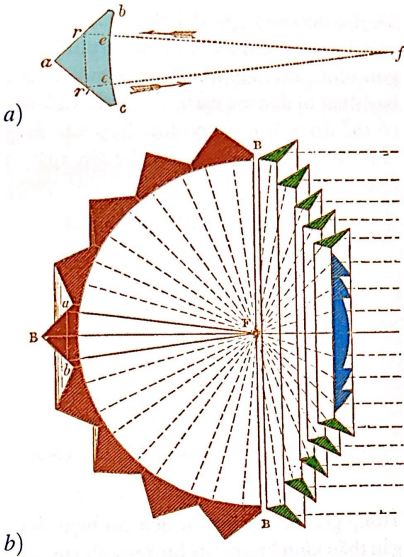
Stevenson tiếp tục cải tiến bằng cách sử dụng các vành tròn xoay có thiết diện giống với lăng kính phản xạ toàn phần. Điểm khác biệt là trục quay để tạo khối tròn xoay là trục nằm ngang chứ không phải trục thẳng đứng như trong thiết kế của Fresnel. Ông gọi đây là

các lăng kính holophote. Chúng có thể được sử dụng để thay thế hoàn toàn mặt parabol kim loại ở phần không gian phía trước nguồn sáng, giúp giảm lượng ánh sáng bị hấp thụ (Hình 10). Các thiết bị dạng này được lắp đặt tại hải đăng Horsburgh, Singapore, năm 1851.



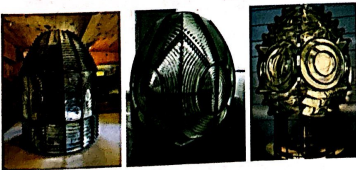
Hình 10. a) Hình chiếu cạnh và hình chiếu ngang của lăng kính holophote. b) Lăng kính holophote (tô màu xanh lá cây) được sử dụng thay cho mặt phản xạ parabol. c) Hiện vật từ thế kỷ 19. Các lăng kính holophote là các khối tròn xoay xung quanh thấu kính Fresnel ở giữa.

Cuối cùng, để loại trừ vật liệu kim loại cho bán cầu mặt sau nguồn sáng, Stevenson sử dụng một loại lăng kính mới, ngày nay được biết đến với tên gọi lăng kính phản xạ kép. Lăng kính này làm cho tia sáng tại một vị trí cố định bị phản xạ toàn phần hai lần rồi quay lại đúng vị trí ban đầu. Nếu tiến hành kết hợp các lăng kính dạng này, ta có một thành phần quang học hoàn toàn bằng thủy tinh có thể thay thế cho mặt phản xạ dạng bán cầu (Hình 11). Thiết kế của Stevenson sau đó được James Timmins Chance cải tiến bằng cách sử dụng lăng kính là khối tròn xoay quanh trục thẳng đứng thay vì trục nằm ngang.



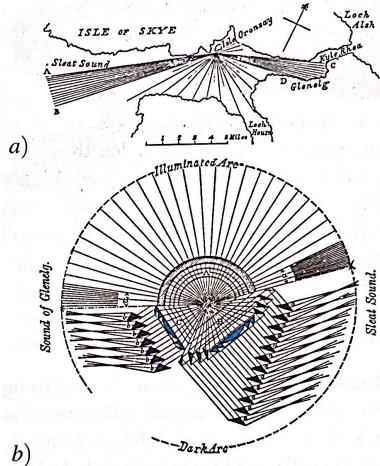
Hình 11. a) Lăng kính phản xạ kép. b) Các lăng kính phản xạ kép tròn xoay (tô màu đỏ) được sử dụng thay cho mặt bán cầu kim loại ở phía sau nguồn sáng.

Một đột phá khác của Stevenson là việc sử dụng các lăng kính holophote trong hệ quang học quay cho hải đăng. Hệ thống đầu tiên dạng này được lắp đặt tại hải đăng North Ronaldsay ở Scotland. Trong khi phần giữa vẫn giữ nguyên cấu tạo có thiết diện đa giác đều với các tấm chứa thấu kính Fresnel, toàn bộ phần trên và phần dưới đều sử dụng thấu kính holophote để tạo chùm song song tương ứng với từng cạnh của đa giác (Hình 12).



Hình 12. Một số hệ quang học quay cho hải đăng sử dụng thấu kính Fresnel và lăng kính holophote.

Một vấn đề quang học tiếp theo mà Stevenson giải quyết là việc làm thế nào phân bố ánh sáng tập trung vào một số hướng nhất định phục vụ yêu cầu thực tế. Ví dụ như với địa hình của eo biển, người ta muốn ánh sáng của hải đăng chiếu sáng nhiều hơn vào phần đường biển mà tàu thuyền đi lại thay vì chiếu đồng đều các phương. Các hệ thống quang học phức tạp gồm các lăng kính holophote xoay quanh thấu kính Fresnel, lăng kính phản xạ kép cùng các lăng kính dạng lăng trụ đứng được Stevenson thiết kế để giải quyết các nhu cầu thực tế này.



Hình 13. a) Trong thực tế, có lúc người ta cần chiếu sáng tập trung vào một số phương nhất định. b) Hệ thống có thêm các lăng kính dạng lăng trụ đứng (tô màu tím) để thực hiện việc trên của Thomas Stevenson.

3. Thấu kính Fresnel trong các thiết bị hiện đại

Với sự ra đời của các nguồn sáng sử dụng điện từ đầu thế kỷ 20, các hệ thống quang học trong hải đăng đã có thể được đơn giản hóa đi rất nhiều. Đồng thời, sự xuất hiện của các công nghệ định vị trên biển cũng làm giảm đi tầm quan trọng của hải đăng trong hàng

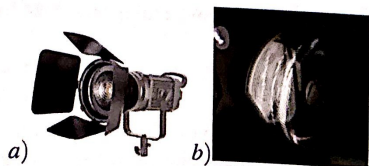
hải. Tuy vậy, với ưu thế về kích thước và khối lượng nhỏ, thấu kính Fresnel vẫn được sử dụng rất phổ biến trong nhiều lĩnh vực của đời sống.

Thấu kính Fresnel xuất hiện trong nhiều ống kính cho máy ảnh cũng như các thiết bị quang học trong công nghiệp và nghiên cứu khoa học do nó có thể giúp giảm kích thước của hệ thống quang học. Tuy nhiên, do thấu kính này có thể gây ra nhiễu xạ ánh sáng, nó thường phải được kết hợp với nhiều cấu trúc quang học khác để đảm bảo chất lượng ảnh.



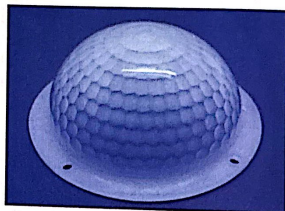
Hình 14. Hai ống kính chụp xa có cùng tiêu cự của cùng một hãng. Ống kính có sử dụng thấu kính Fresnel có kích thước nhỏ hơn nhiều, tuy nhiên lượng ánh sáng đến cảm biến sẽ nhỏ hơn.

Thấu kính Fresnel cũng được sử dụng trong một số thiết bị chiếu sáng như đèn chiếu cho sân khấu hay phòng chụp ảnh hoặc trong các máy chiếu. Trước khi màn hình tinh thể lỏng trở nên phổ biến, một số TV công nghệ CRT cũng sử dụng thấu kính Fresnel để giảm kích thước. Gần đây, một số thiết bị thực tế ảo đã dùng thấu kính Fresnel để phóng đại ảnh phía trước mắt người.



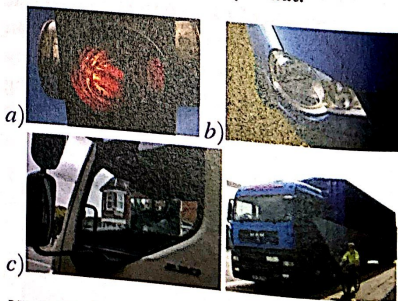
Hình 15. Thấu kính Fresnel trong a) đèn chiếu sân khấu và b) Thiết bị thực tế ảo.

Do đặc tính nhỏ gọn, thấu kính Fresnel cũng xuất hiện ở các thiết bị cần kích thước nhỏ gọn như cảm biến hồng ngoại chống trộm hay thiết bị đọc mã vạch. Các thấu kính này có thể được làm bằng nhựa hoặc các dạng tấm mỏng tùy theo công nghệ sản xuất và nhu cầu của thiết bị.



Hình 16. Thấu kính Fresnel trong thiết bị cảm biến hồng ngoại.

Trong giao thông, nhiều đèn tín hiệu được gắn thấu kính Fresnel để hướng ánh sáng đến vùng có phướng tiện di chuyển, giúp dễ quan sát hơn. Nhiều loại đèn pha của ô tô cũng được lắp các thấu kính Fresnel để tạo chùm sáng song song. Các thấu kính Fresnel mỏng cũng có thể được dán ở cửa kính của các xe tải, giúp người lái xe quan sát được những vị trí sát với đầu xe. Thấu kính loại này cũng có thể được dán ở kính trước của các xe hơi, giúp người lái quan sát được đèn tín hiệu giao thông dù tầm nhìn bị khuất.



Hình 17. a) Thấu kính Fresnel của đèn tín hiệu. b) Một số đèn pha ô tô cũng sử dụng thấu kính Fresnel. c) Thấu kính Fresnel dạng miếng dán giúp xe tải quan sát điểm mù.

Giống như Buffon đã dự đoán, thấu kính Fresnel ngày nay còn được sử dụng để hội tụ ánh sáng. Khi lắp đặt các pin mặt trời, người ta có thể lắp thêm các thấu kính Fresnel nhằm tăng cường độ sáng tới các tấm pin.



Hình 18. Thấu kính Fresnel hội tụ ánh sáng cho tấm pin mặt trời.

4. Lời kết

Tuy Fresnel mất chỉ vài năm sau khi cho ra đời thấu kính mang tên ông, những người

đi sau vẫn liên tục hoàn thiện các ứng dụng của nó, vào cả những lĩnh vực mà bản thân Fresnel có lẽ cũng sẽ cảm thấy ngạc nhiên. Không chỉ đảm bảo an toàn hàng hải cho rất nhiều con tàu của thế kỷ 19, thấu kính Fresnel vẫn được sử dụng một cách đa dạng trong các thiết bị phục vụ đời sống nhờ sự đóng góp của các thế hệ các nhà khoa học và kỹ sư nối tiếp nhau. Thấu kính Fresnel cũng là một chủ đề thú vị khi giảng dạy về quang học cho học sinh phổ thông.

Tài liệu tham khảo

- [1] Basdevant, J.-L. (2019). Famous optician: Augustin Fresnel and the wave theory of light. *Photoniques*, 18 – 22. <https://doi.org/10.1051/photon/2019s418>
- [2] Elton, J. (2009). A Light to Lighten our Darkness: Lighthouse Optics and the Later Development of Fresnel's Revolutionary Refracting Lens 1780 – 1900. *Int. J. For the History of Eng. & Tech.*, 79(2), 183 – 244. <https://doi.org/10.1179/175812109X449612>



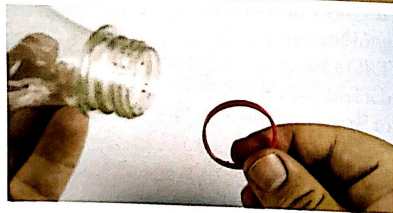
TRÒ CHƠI VỀ HÌNH CÓ TÂM ĐỐI XỨNG

Phần II: Làm quạt đồ chơi từ que kem và chai nhựa tái chế

NGUYỄN THỤY VIỆT ANH¹

Chuẩn bị: Chai nhựa, vòng tròn nhỏ bằng nhựa, dao nhọn, keo 502, que xiên bằng gỗ, sợi dây, que kem.

Bước 1: Dùng tay lấy vòng tròn nhỏ bằng nhựa ở cổ chai.

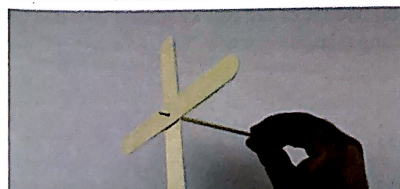
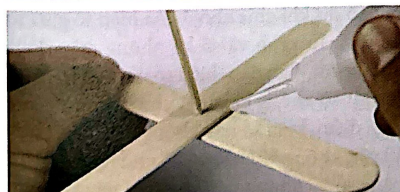
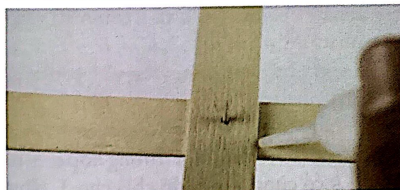
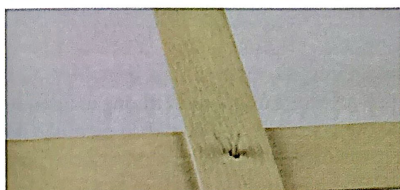
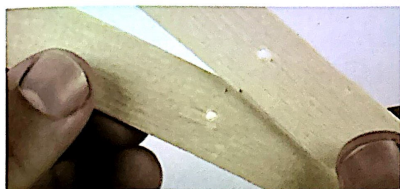


Bước 2: Sử dụng dao nhọn để đục các lỗ tròn ở chính giữa nắp chai nhựa, một bên thân của chai nhựa và dưới đáy của chai nhựa. Chú ý là kích thước các lỗ tròn đủ lớn để que xiên bằng gỗ có thể xuyên qua.

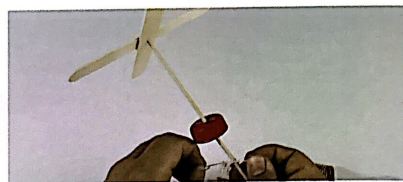
Bước 3: Tiếp tục dùng dao nhọn để đục một lỗ ở chính giữa que kem (làm 2 que kem như thế) rồi đặt 2 que kem ấy trên que xiên bằng gỗ. Dùng keo 502 dán chặt 2 que kem với que xiên bằng gỗ lại với nhau (lưu ý là chỉnh sửa

¹ Trường Liên cấp Hội nhập Quốc tế iSchool Quảng Trị.

vị trí của 2 que kem để tạo thành hình chữ X trên que xiên bằng gỗ).



Bước 4: Đặt que xiên bằng gỗ vào lỗ tròn trên nắp chai nhựa, sau đó dùng dây cột chặt vào que xiên bằng gỗ (sợi dây nằm phía dưới nắp chai).



Bước 5: Đưa sợi dây vào miệng chai nhựa, sau đó kéo sợi dây này qua lỗ tròn bên thân chai rồi vận nắp chai lại. Lưu ý là đưa phần cuối của que xiên bằng gỗ ra ngoài qua phần lỗ ở dưới đáy chai.



Bước 6: Cột phần cuối của sợi dây vào vòng tròn nhỏ bằng nhựa như hình minh họa nhằm giữ lại sợi dây khi kéo. Trong trường hợp các em không có vòng tròn bằng nhựa thì có thể sử dụng một đoạn ngắn của que kem để thay thế nhé!



Bước 7: Bây giờ các em chỉ cần xoay nhẹ cánh quạt để sợi dây cuộn tròn quanh que xiên bằng gỗ, sau đó dùng tay kéo lui kéo tới sợi dây là cánh quạt sẽ quay.



Tài liệu tham khảo

<https://www.youtube.com/watch?v=xixw6goQIM>

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Ai là fan của đội nào?

Giả sử trong số các fan của đội FC Dừa và trong số các fan của đội FC Chuối đều có số thổ dân nói đối bằng nhau là k người.

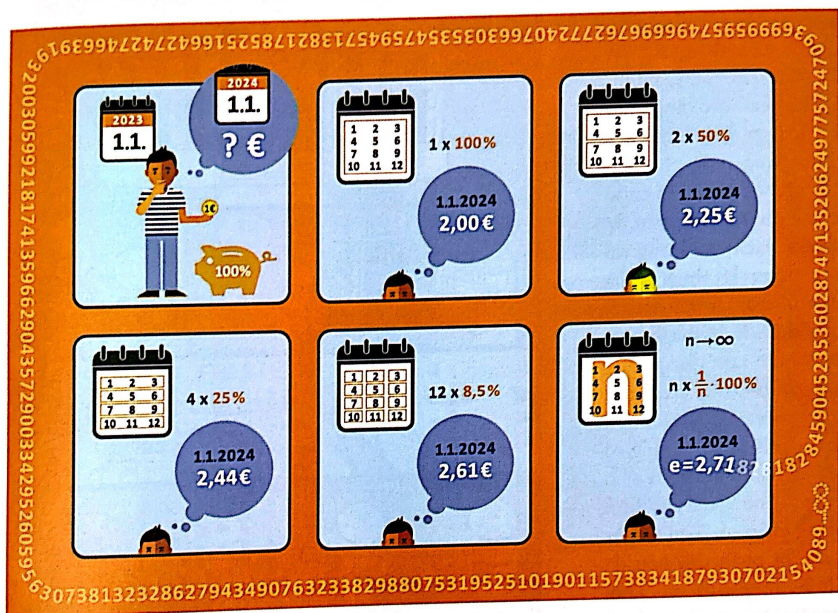
Khi đó có tổng cộng $2k$ thổ dân đến từ bộ tộc Lừa Đối, vì vậy câu “ngồi bên phải cạnh tôi là một fan của đội FC Dừa” bị nói dối một số chẵn lần.

Suy ra trong số các thổ dân này, phải có một số chẵn người có người ngồi bên cạnh phía tay phải là fan của đội FC Chuối. Nhưng điều này không thể xảy ra do có tổng cộng 25 fan của đội FC Chuối. Mỗi một fan này tương ứng một người ngồi cạnh bên trái anh ta, do đó số người có người ngồi bên cạnh phía tay phải là fan của đội FC Chuối cũng bằng 25 là một số lẻ.

Vì vậy trong số các fan của đội FC Dừa và trong số các fan của đội FC Chuối, số các thổ dân từ bộ tộc Lừa Đối không bằng nhau.

Đố vui

Gọi a, b, c là tương ứng là số kỳ không màu xanh, đỏ, vàng tại một thời điểm. Gọi a', b', c' tương ứng là số kỳ không màu xanh, đỏ, vàng sau khi có 2 con khác màu nào đó gặp nhau. Nếu 1 con màu xanh và 1 con màu đỏ gặp nhau thì $a' = a - 1, b' = b - 1, c' = c + 2$; nếu 1 con màu đỏ và 1 con màu vàng gặp nhau thì $a' = a + 2, b' = b - 1, c' = c - 1$; còn nếu 1 con màu vàng và 1 con màu xanh gặp nhau thì $a' = a - 1, b' = b + 2, c' = c - 1$. Như vậy, $a' - b' = a - b, a - b + 3$ hoặc $a - b - 3$; trong mọi trường hợp $a' - b'$ và $a - b$ có cùng số dư khi chia cho 3. Như vậy, số dư khi chia cho 3 của hiệu số giữa số kỳ đã màu xanh và số kỳ không màu đỏ là không đổi. Ban đầu, hiệu số này bằng -100 , là một số không chia hết cho 3, nên tại mọi thời điểm, hiệu số này không chia hết cho 3. Vì vậy, không khi nào số kỳ không màu xanh bằng số kỳ không màu đỏ. Nói riêng, không khi nào tất cả các con kỳ không trên đảo có cùng màu.

LÃI SUẤT¹DGFM²

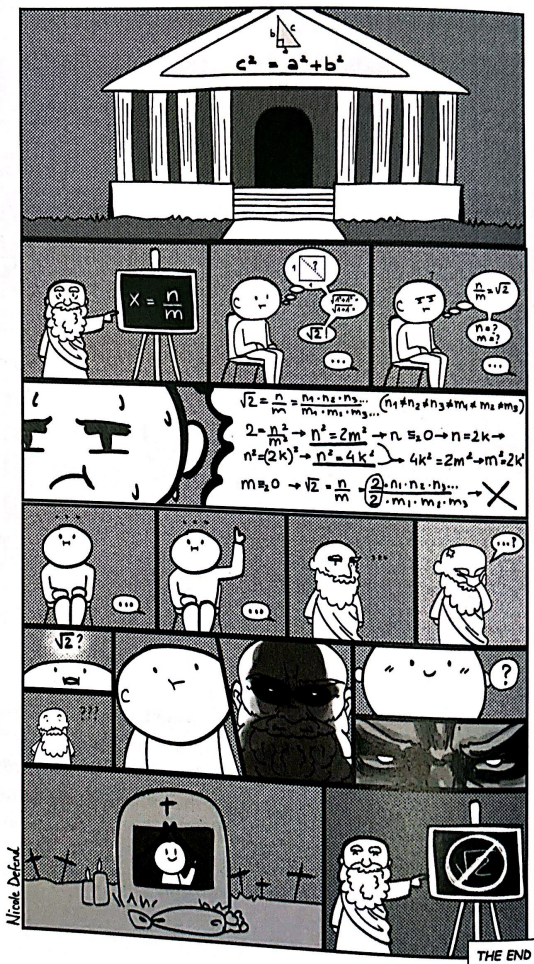
Lãi suất đóng một vai trò quan trọng trong bảo hiểm và tài chính. Về mặt toán học, lãi suất trở nên đặc biệt thú vị khi nó được tính theo những khoảng thời gian càng ngày càng nhỏ và lãi suất của lãi suất được xem xét. Với lãi suất 100%, một euro sẽ có giá trị bằng e euro sau một năm nếu lãi suất 100% được tính theo một số vô hạn những khoảng thời gian nhỏ (xem tranh minh họa), ở đây e là số Euler. Bài toán này bắt đầu từ nhà toán học người Thụy Sĩ Jakob Bernoulli, người đã giải quyết vấn đề này ngay từ thế kỷ 17. Cái nhìn sâu sắc này có giá trị đối với tất cả mọi người và do đó nó khẳng định tính phổ quát của toán học.

¹ Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>

² Hiệp hội Toán học Tài chính và Bảo hiểm Đức (DGFM) eV, Cologne, Đức.

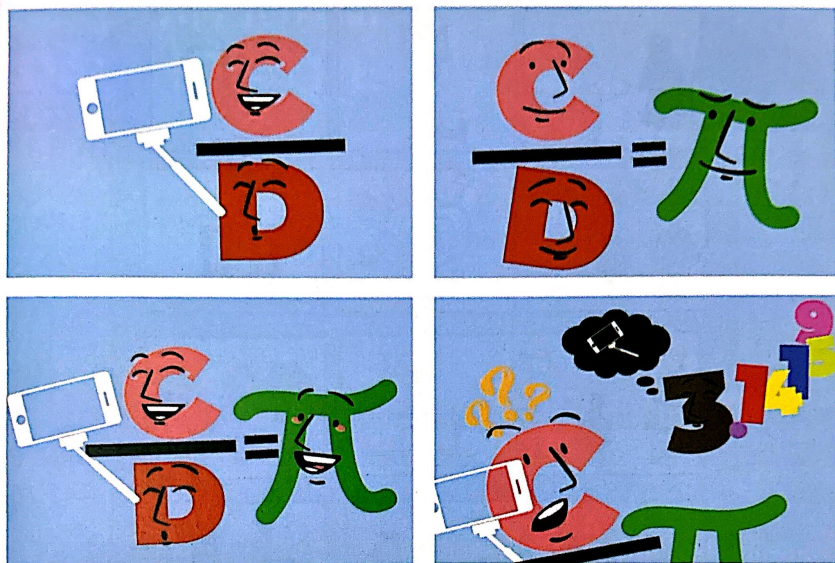
SỰ KHÁM PHÁ RA SỐ VÔ TỶ¹NICOLE DEFEND²

Đây là câu chuyện về Hippasus xứ Metapontum, học trò của Pythagoras, người dám đi ngược lại lời dạy của thầy mình: Pythagoras tin rằng mọi số đều có thể được viết dưới dạng một phân số của các số nguyên tố cùng nhau, nhưng Hippasus đã có thể vạch ra những sai sót trong lý thuyết của người thầy mình thông qua định lý Pythagore và một hình tam giác vuông với số đo của các cạnh góc vuông là 1 đơn vị. Hippasus nhận ra rằng số đo của cạnh huyền là $\sqrt{2}$, một số không thể viết dưới dạng phân số. Người thầy ghét bị phản đối nên đã đuổi Hippasus ra khỏi trường học và làm giả cái chết của anh học trò để ngăn chặn sự khám phá của anh được lan truyền.

¹ Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>² ISIS Arturo Malignani Udine (Friuli Venezia Giulia), Ý.

CHO PI LÊN HÌNH¹

DION BEATRICE BAULA²



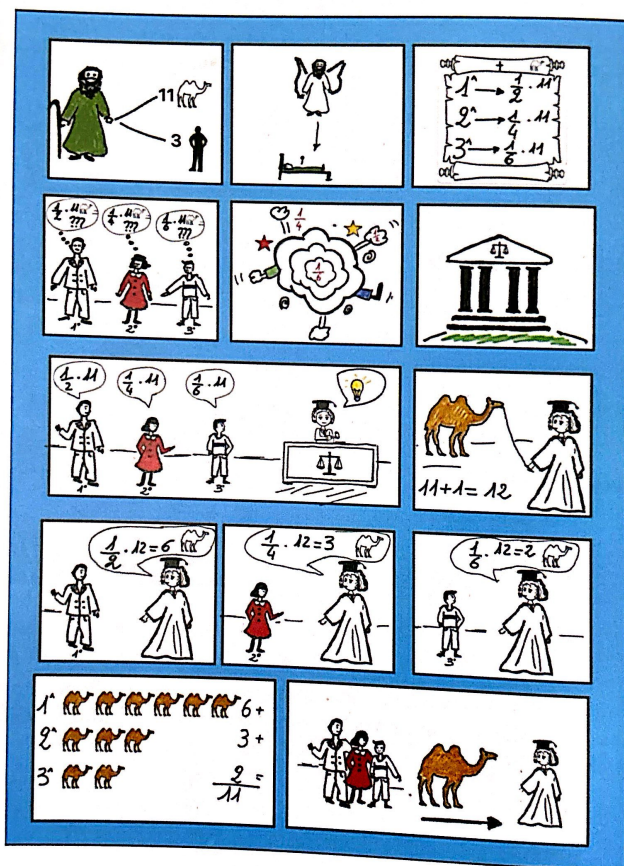
Chu vi và Đường kính muốn chụp ảnh selfie nhưng vì chỉ nhìn thấy Pi nên họ quyết định cho Pi tham gia cùng. Một lúc sau, Chu vi bối rối sau khi nhìn thấy những người bạn của Pi, 3.14159... biết rằng họ sẽ không vào được hết bức ảnh.

¹ Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>

² Dion Beatrice Baula Học viện Thánh Scholastica thành phố Marikina Marikina (NCR), Philippines.

CÂU CHUYỆN VỀ NGHỊCH LÝ LẠC ĐÀ¹

PAPA ASSUNTA²



Làm thế nào bạn có thể chia 11 con lạc đà cho ba anh em sao cho người anh cả được một nửa, người thứ hai được $\frac{1}{4}$ tổng số và người em út được $\frac{1}{6}$ tổng số lạc đà?

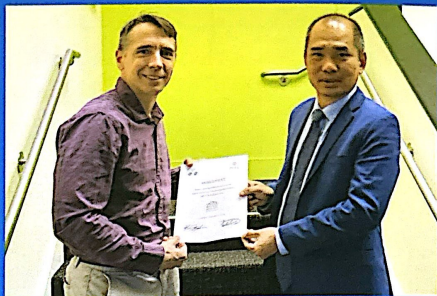
¹ Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>

² Giáo viên dạy toán cấp hai và các học sinh của cô (năm thứ 2 cấp 2 - các học sinh 12 tuổi), IC Monterotondo - đường Buozzi 18 Monterotondo (Roma), Ý.

MVSM NƠI ƯƠM MẦM TOÁN HỌC TRẺ

Trong bối cảnh cách mạng công nghệ phát triển như vũ bão, thị trường lao động thế giới ngày càng thêm "khát" nhân sự giỏi Toán và tiếng Anh.

Trường Toán Minh Việt - Minh Việt School of Math (MVSM) đã kết hợp với The Arts of Problem Solving (AoPS) - Chương trình giáo dục Toán học nâng cao số 1 tại Hoa Kỳ và hàng đầu thế giới, để mở ra mô hình học tập Toán ưu việt nhất.



SỨ MỆNH MVSM

Khởi đầu
Tinh yếu
Toán học

Khả năng
Sáng tạo

Tư duy
Logic

Nghệ thuật
giải quyết
các vấn đề

CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO

- **Đối tượng:** Học sinh tiểu học từ lớp 1 tới lớp 5
- **Giáo trình học:** Beast Academy của AoPS
- **Phương thức:** Học sinh học Online cùng giáo viên Mỹ
- **Thời gian học:**
 - **Lớp Toán:** 1 buổi/ tuần, chỉ với 5 triệu đồng/năm
 - **Lớp Tiếng Anh bổ trợ:** 4 buổi/tuần, 6 triệu đồng/năm.

Những học sinh xuất sắc của MVSM sẽ được tặng học bổng một phần hoặc toàn phần và được giới thiệu học Câu lạc bộ Toán Kỳ Lân với những Giáo sư Toán học hàng đầu Việt Nam.

NĂM HỌC 2024-2025

- **Mở đăng ký: 1/4/2024**
- **Khai giảng: 24/6/2024**

Phụ huynh có thể đăng ký cho con chỉ học Toán, chỉ học Tiếng Anh hoặc học cả Toán và Tiếng Anh.

**Beast
ACADEMY**
By Art of Problem Solving



ĐỌC THÊM



ĐỐ VUI

Hoàng Đức Dũng (st)

Đảo Kỳ Nhông là nơi cư ngụ của 3000 con kỳ nhông, mỗi con có một trong ba màu: xanh, đỏ hoặc vàng. Chúng bò khắp nơi và thỉnh thoảng gặp nhau; tuy nhiên, do hòn đảo rất rộng nên mỗi lần chỉ có 2 con gặp nhau (không khi nào có 3 con hoặc nhiều hơn cùng gặp nhau). Ngoài ra, khi hai con kỳ nhông khác màu nhau gặp nhau thì cả hai cùng đổi màu sang màu thứ ba. Biết rằng ban đầu có 900 con màu xanh, 1000 con màu đỏ và 1100 con màu vàng. Hỏi có khi nào tất cả các con kỳ nhông trên đảo có cùng màu hay không?



Tài trợ bởi

MINH VIỆT
ACADEMY



facebook.com/
pijournal



Giá: 35.000 đồng
www.pi.edu.vn