

TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 8 - SỐ 3

THÁNG 3, 2024

Phụ nữ
với
TOÁN
HỌC



ISSN 2525-2437



TÌM ĐỌC TRONG SỐ NÀY

Nhân ngày Quốc tế Phụ nữ 8 tháng Ba, Pi xin giới thiệu với bạn đọc chân dung một số nhà khoa học nữ nổi bật của Việt Nam và thế giới. Chuyên mục **Đời sống Toán học** có bài viết về giáo sư Hoàng Xuân Sính, nữ giáo sư toán học đầu tiên của Việt Nam, và "sự trở về kỳ diệu" của bản luận án tiến sĩ đặc biệt của bà. Trong chuyên mục **Lịch sử Toán học**, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu về cuộc đời và những đóng góp của Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya, một trong những nhà toán học nữ có ảnh hưởng lớn nhất thế kỷ 20. Chuyên mục **Tìm hiểu Khoa học** giới thiệu nhà thiên văn học Henrietta Leavitt, người đã đưa ra công thức quan trọng giúp ước lượng khoảng cách giữa các thiên thể – phép đo dẫn đến những khám phá kinh ngạc như sự giãn nở của vũ trụ.

Toán của Bi tiếp tục giới thiệu bài viết về phép dời hình, đề thi của Câu lạc bộ toán Unicorn, và tất nhiên không thể thiếu câu đố của thám tử Xuân Phong và các bài toán cho các bạn yêu thử thách. Math & English tiếp tục bài viết về phép chứng minh bằng phản chứng.

Dành cho các bạn học sinh trung học và sinh viên là bài bình luận về Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia môn toán năm học 2023-2024 (chuyên mục **Các kỳ thi toán**) và nhiều lời giải cho một bài toán phương trình hàm (chuyên mục **Học cùng Pi**).

Nhân ngày Pi 14 tháng Ba, chuyên mục **Lịch sử toán học** giới thiệu phần II bài viết về các phương pháp xấp xỉ số Pi bằng chuỗi hội tụ.

Mời các bạn cùng đọc!

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (Tổng Biên tập)
Phùng Hồ Hải (Phó Tổng Biên tập)
Nguyễn Chu Gia Vương (Phó Tổng Biên tập)
Vũ Thế Khôi (Thư ký Tòa soạn)
Ngô Bảo Châu (Ủy viên)
Trần Nam Dũng (Ủy viên)
Phạm Triều Dương (Ủy viên)
Hà Duy Hưng (Ủy viên)
Nguyễn Khắc Minh (Ủy viên)
Nguyễn Hoàng Thạch (Ủy viên)

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phạm Huy Điển, Ngô Trung Hiếu, Nguyễn Thành Nam,
Ngô Văn Minh, Trần Văn Nhung, Tạ Duy Phương,
Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Duy Thái Sơn, Đỗ Đức Thái,
Phạm Văn Thiệu, Vũ Kim Thuý, Ngô Việt Trung, Vũ Hà Văn,
Lê Anh Vinh

Chế bản: Nguyễn Thái Hiệp
Đồ họa: Nguyễn Trần, Đoàn Xuân Trường
Nguyễn Chu Chloé Huệ Chi

Ảnh bìa 1: Đoàn Xuân Trường

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYỀN

Hà Vũ Anh, Bùi Văn Biên, Võ Quốc Bá Cẩn, Lưu Công Đông,
Lưu Thị Thanh Hà, Nguyễn Hiệp, Phan Thanh Hồng,
Trần Quang Hùng, Trần Quốc Luật, Kiều Đình Minh,
Nguyễn Thị Nhung, Vũ Hồng Sơn, Lưu Bá Thắng,
Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tác Thắng, Nguyễn Xuân Thọ,
Nguyễn Mạnh Toàn, Nguyễn Hoàng Vũ (phụ trách mục
Tìm hiểu Khoa học).

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty TNHH Đầu tư TM In Hồng Đức
Tạp chí ra hàng tháng
Giá: 35.000 đồng

TÒA SOẠN

Phòng 107, Nhà A5, Viện Toán học,
18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội
Email gửi bài: btr@pi.edu.vn
Email giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com
Điện thoại: (024) 3215.1407.
Website: www.pi.edu.vn

MỤC LỤC

ĐỜI SỐNG TOÁN HỌC

- 2 “Invariant” trong Toán học và bất biến trong cuộc đời (chuyện về nữ giáo sư toán học đầu tiên của Việt Nam)

Hà Huy Khoái

TOÁN CỦA BỊ

- 6 Phép dời hình và công thức tính diện tích
Phần II: Phép dời hình (tiếp theo)

*Ngô Văn Minh, Phan Ngọc Minh
& Nguyễn Thị Nhung*

- 11 Đề thi tuyển sinh năm 2023 - 2024 câu lạc bộ Toán học Unicorn Math Circle (Phần IV)

- 13 Cuộc thám tra đặc biệt

Gia Dương

- 13 Các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi

- 15 Lời giải các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi (Số 11 năm 2023)

- 18 Proof by contradiction (Part II)

Nghĩa Doan

HỌC CÙNG PI

- 20 Tìm tòi nhiều lời giải cho một bài toán phương trình hàm

Trần Nhật Quang

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

- 27 Để ra kỳ này

- 29 Giải bài kỳ trước

CÁC KỲ THI TOÁN

- 40 Về kỳ thi học sinh giỏi quốc gia môn Toán năm học 2023 - 2024

Trần Nam Dũng

- 45 Góc toán Olympic

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

- 47 Tính số Pi: Xưa và nay
Phần II: Tính số Pi - từ thế kỷ XVII đến nay

Tạ Duy Phương, Nguyễn Hoàng Vũ

- 51 Về Olga Alexandrovna Ladyzheskaya

*M. I. Vishik
(Người dịch: Phạm Triều Dương)*

TÌM HIỂU KHOA HỌC

- 54 Công thức Leavitt và phép đo khoảng cách tới những vì sao

Nguyễn Hoàng Vũ

VUI CÙNG PI

- 61 Điển tên cho đủ

Yoana Byannova

- 62 Khi có bạn kể bên

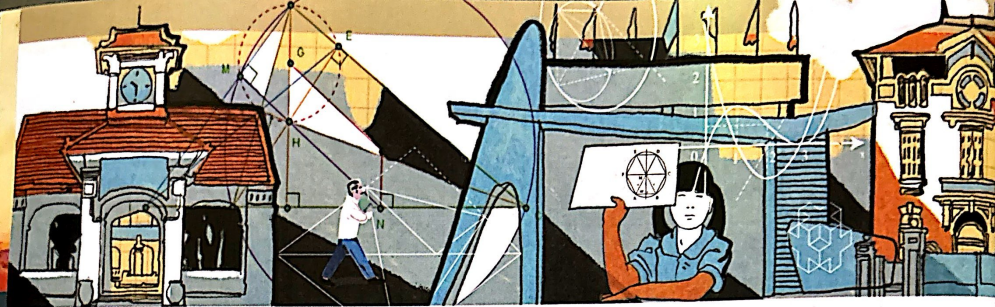
Chiara Radice

- 63 Phép toán của cuộc đời

Leda Silov

- 64 Ngôn ngữ phổ dụng

Sofia Saracco



“INVARIANT” TRONG TOÁN HỌC VÀ BẤT BIẾN TRONG CUỘC ĐỜI (chuyện về nữ giáo sư toán học đầu tiên của Việt Nam)

HÀ HUY KHOÁI¹

I. Sơ lược tiểu sử

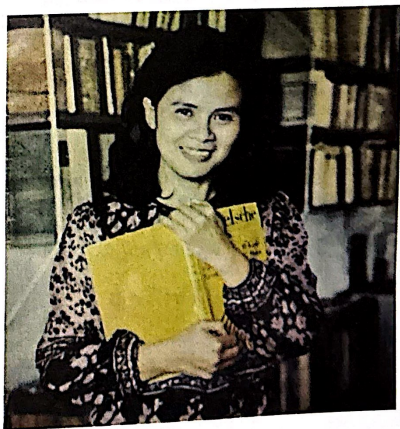
Giáo sư Hoàng Xuân Sính sinh ngày 5/9/1933, là người gốc Làng Cốt, Từ Liêm, Hà Nội. Khoảng những năm 40, gia đình bà sinh sống tại 102 Hàng Bông, và ngôi nhà của gia đình bà cũng chính là cơ sở xuất bản tờ báo Thanh Nghị, tiếng nói của trí thức yêu nước thời bấy giờ.

Tốt nghiệp trường trung học Chu Văn An năm 1951, bà được người cậu ruột đón sang học tiếp ở Pháp. Sau khi nhận bằng cử nhân toán học của Đại học Toulouse năm 1957 và bằng thạc sĩ toán học năm 1959, bà trở về nước đầu năm 1960.

“Tôi đã chọn con đường của nhiều trí thức yêu nước cùng thời, nhớ tới lời dạy của Bác Hồ đối với anh chị em Việt kiều: ‘Mỗi người có học giỏi lấy một nghề, sau này trở về phục vụ Nhân dân’. Những lúc tổ quốc gian khổ nhất, là những khi nhân dân cần chúng ta nhất. Tôi biết, trở về chính là yêu nước”.

Năm 1975 bà bảo vệ luận án tiến sĩ quốc gia² tại Paris, Pháp. Bản luận án “Gr-Catégories” của bà là điểm khởi đầu của lý thuyết “n-

Catégories”, một lý thuyết đang phát triển mạnh trên thế giới, có nhiều ứng dụng trong vật lý và khoa học tính toán.



Năm 1980, bà được phong học hàm Giáo sư, và là nữ giáo sư toán học đầu tiên của Việt Nam.

Năm 1998, cùng với một số nhà toán học, bà thành lập Trung tâm Đại học Thăng Long,

² Tương đương với tiến sĩ khoa học ngày nay.

cơ sở giáo dục đại học ngoài công lập đầu tiên của Việt Nam, tiền thân của trường Đại học Thăng Long.

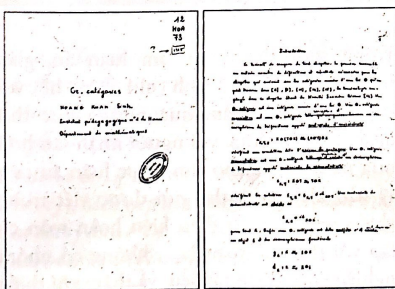
II. Bản luận án “Gr-Catégories”

1. Gr-Categories.

Trong toán học, Hoàng Xuân Sính nổi tiếng với những kết quả trong lý thuyết phạm trù. Và cũng hơi có phần nghịch lý, khi hình như ở nước ngoài người ta biết rõ hơn cộng đồng toán học trong nước về những đóng góp của Hoàng Xuân Sính! Cũng có thể vì bà hầu như không nhắc đến những kết quả của mình.

Phần này có mục tiêu giới thiệu sơ lược với những độc giả không là chuyên gia ngành toán về lý thuyết Gr-phạm trù và vị trí của nó trong toán học. Đây thực sự là nhiệm vụ rất khó khăn, bởi lẽ Gr-phạm trù là một lý thuyết rất sâu, không dễ tiếp cận ngay với những nhà toán học không trong chuyên ngành.

Trước tiên, xin đưa ra một định nghĩa không hình thức của *phạm trù*. Khi mô tả bất kỳ một cấu trúc toán học nào, thậm chí bất kỳ một hiện tượng tự nhiên hay xã hội nào, ta đều cần chỉ ra hai điều mấu chốt: các *đối tượng* được xét trong đó và *quan hệ* giữa chúng.



Lý thuyết phạm trù ra đời nhằm cung cấp một ngôn ngữ tổng quát để nghiên cứu các cấu trúc toán học. Các đối tượng nghiên cứu ở đây được gọi là các “vật”, quan hệ giữa các vật được cho bởi những “mũi tên” đi từ vật

này đến vật khác. Nói đơn giản, phạm trù là một cặp gồm tập hợp các VẬT (objects), và tập hợp các MŨI TÊN giữa các vật, gọi là các “cấu xạ” (morphism).

Có thể chỉ ra vài ví dụ:

1/ *Trong vật lý*: Tập hợp các *trạng thái* của một hệ vật lý nào đó lập thành tập hợp các “vật”. Quá trình *chuyển trạng thái* cho ta “cấu xạ” giữa các “vật”.

2/ *Trong tin học*: Các bộ *dữ liệu* làm thành tập hợp các vật. *Chương trình* là một cấu xạ chuyển bộ dữ liệu này thành bộ dữ liệu khác.

3/ *Trong logic*: Các *mệnh đề* lập thành tập hợp các vật, *chứng minh* là cấu xạ từ mệnh đề này đến mệnh đề khác.

Như vậy, hầu hết cấu trúc trong toán học, và rộng hơn, trong tự nhiên và xã hội, có thể mô tả bằng ngôn ngữ phạm trù. Tuy nhiên, cũng chính vì phạm trù là cấu trúc quá tổng quát nên từ những kết quả của lý thuyết phạm trù, khó suy ra được những kết quả sâu sắc của các đối tượng thuộc những cấu trúc toán học khác. Vì thế, một yêu cầu tự nhiên là cần đưa vào cấu trúc phạm trù những phép toán nào đó để nó vẫn đủ tổng quát, nhưng có thể chứa đựng, và hơn nữa, phát hiện những kết quả sâu sắc, chứ không chỉ đóng vai trò như một ngôn ngữ mô tả.

Một trong những cấu trúc toán học quan trọng nhất là *nhóm*. Khởi đầu từ công trình của Evariste Galois, lý thuyết nhóm đã trở thành công cụ không thể thiếu trong vật lý. Giáo sư Hoàng Xuân Sính đã đưa ra khái niệm *Gr-phạm trù* và mô tả cấu trúc của chúng. Nói một cách ngắn gọn, Gr-phạm trù là một phạm trù trong đó trang bị phép tính với ràng buộc kết hợp, đồng thời các vật và các cấu xạ đều có tính chất khả nghịch. Do đó, Gr-phạm trù “giống như” một nhóm (chữ “Gr” xuất phát từ “group”, là *nhóm*).

2. Sinh's Invariant.

Một bài toán lớn trong toán học, cũng như trong những ngành khoa học khác, là bài

toán phân loại. Để xác định một đối tượng có những tính chất cơ bản gì, chúng ta cần biết chúng thuộc loại nào. Điều này chỉ làm được nếu tìm ra thuộc tính của các đối tượng cùng một loại, tức là tìm “bất biến” của lớp đối tượng đó. Nếu một đối tượng mang “bất biến” của lớp nào, ta biết nó thuộc lớp đó, tương tự như vân tay là “bất biến” để nhận biết mỗi người.

Trong luận án của mình, giáo sư Hoàng Xuân Sính đã tìm ra một bất biến để nhận biết một lớp các không gian “đủ tốt”, gọi là các *CM-complex*. Cụ thể hơn, khi cho một *Gr*-phạm trù, ta được hai nhóm: nhóm *G* các lớp đẳng cấu của các vật, và nhóm *A* các tự đẳng cấu của vật đơn vị (cũng vì thế, ngày nay người ta gọi *Gr*-phạm trù là *2-nhóm*, và phát triển lý thuyết này thành lý thuyết các *n-nhóm*). Một *Gr*-phạm trù có thể đặc trưng hoàn toàn bởi lớp $[a]$ trong nhóm đối đồng điều $H^3(G, A)$. Lớp này ngày nay được mang tên là *bất biến Sính* (Sinh’s invariant).

Theo John Baez, một nhà toán học nổi tiếng, “*kết quả của Hoàng Xuân Sính rọi ánh sáng lên vấn đề nghiên cứu kiểu đồng luân của các không gian tương đối ‘đẹp’, chẳng hạn các CW-complex*”³.

Hướng nghiên cứu mà giáo sư Hoàng Xuân Sính khởi đầu từ những năm 1967 – 1975 ngày nay đang phát triển mạnh, gọi là *n-phạm trù* (*n-Category*). Gần đây, những kết quả trong lý thuyết *n-category* được sử dụng trong tính toán lượng tử, cơ sở lý thuyết của các máy tính lượng tử trong tương lai.

Lý thuyết *Gr*-phạm trù được xây dựng trong bản luận án *Gr-Catégories* của Giáo sư Hoàng Xuân Sính, một bản luận án có số phận đặc biệt trong lịch sử toán học.

Trong đợt làm việc tại Việt Nam cuối năm 1967, A. Grothendieck – một trong những nhà toán học vĩ đại nhất thế kỷ XX – gọi

ý giáo sư Hoàng Xuân Sính nghiên cứu xây dựng một kiểu phạm trù sao cho nó gần như một nhóm. Ý tưởng của Grothendieck được thực hiện thành công, và *Gr*-phạm trù ra đời. Thực ra, ý đồ của Grothendieck xa hơn nhiều: trong tài liệu dày 600 trang (*Pursuing Stacks*, 1984. arXiv:2111.010000) Grothendieck đưa ra *giả thuyết đồng luân* như sau: “*Một CW-complex X gọi là kiểu n nếu nhóm $\pi_k(X)$ là tầm thường với $k > n$. Có thể phân lớp sai khác tương đương đồng luân các CW kiểu n bởi các cấu trúc gọi là n-nhóm*”. Cho đến nay, mới có hai trường hợp được thực hiện hoàn chỉnh là $n = 1$ với phạm trù monoidal của Eilenberg – Mac Lane và $n = 2$ trong luận án của giáo sư Hoàng Xuân Sính. Trường hợp $n > 2$ vẫn đang được quan tâm nghiên cứu và mới có những kết quả riêng rẽ.



Trong suốt thời gian làm luận án, giáo sư Hoàng Xuân Sính chỉ liên hệ với Grothendieck 3 lần, qua những bức thư ngắn chỉ đến được với người nhận sau hơn nửa năm! Thật khó tìm được luận án tiến sỹ nào khác trên thế giới được viết trong chiến tranh, trong điều kiện hoàn toàn cô lập với thế giới toán học, không có nhóm nghiên cứu, thiếu tài liệu, và thậm chí thiếu cả những điều kiện tối thiểu như giấy bút, ánh sáng và những bữa ăn no! Giáo sư Hoàng Xuân Sính kể rằng, khi ở khu sơ tán, ước mơ

³John Baez, *Hoang Xuan Sinh's thesis: categorifying Group Theory*, *Thang Long Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, Vol.3, N-1, 2023.

của bà nhiều khi chỉ là làm sao có đủ pin để ngồi làm việc trong màn, tránh được đàn muỗi dày đặc quanh chiếc đèn dầu!

Bản luận án *Gr-Catégories* làm thế giới toán học quan tâm và ngạc nhiên, không chỉ vì nội dung, mà còn ở sự ra đời đặc biệt của nó.

Luận án được hoàn thành năm 1973, và bản viết tay của nó được gửi cho Grothendieck. Sau nhiều trắc trở, năm 1975 Hoàng Xuân Sính được phép ghé Paris trên đường trở về từ Đại hội Toán học Thế giới ở Vancouver để bảo vệ luận án tiến sĩ quốc gia. Hội đồng chấm luận án của bà cũng thật hiếm thấy, khi gồm những nhà toán học nổi tiếng nhất: H. Cartan, A. Grothendieck, J. L. Verdier, L. Schwartz, M. Zisman.

Những tháng gần đây, nhân sinh nhật lần thứ 90 của giáo sư Hoàng Xuân Sính, trên báo chí có nhiều có nhiều bài viết về “sự trở về kỳ diệu” của bản luận án viết tay *Gr-Catégories*. Tuy nhiên, với những nhà toán học thì sự trở về kỳ diệu chỉ thực sự xảy ra khi những kết quả của họ được nhắc đến, được tiếp tục phát triển sau hơn nửa thế kỷ! Bản luận án của giáo sư Hoàng Xuân Sính đã trở về, và ở lại mãi mãi với toán học, trong những nghiên cứu về *Sinh's invariant* và *n-phạm trù*.

Xin dẫn vài lời đánh giá của J. Baez:

“Sẽ là thiếu sót nếu không đề cập đến việc các Gr-phạm trù, ngày nay thường được gọi là 2-nhóm, đã có một sức sống mới trong vật lý lý thuyết và toán học.

Lý do là vì Lý thuyết trường chuẩn (Gauge Theory), cách tiếp cận thành công ngoạn mục của vật lý dựa trên các nhóm, có thể được khái quát hóa thành lý thuyết trường chuẩn bậc cao bằng cách sử dụng 2-nhóm.

Hơn nữa, không có lý do gì để dừng lại ở 2 nhóm... Có những hy vọng rằng một ngày nào đó các nhà vật lý sẽ tổng hợp các pha của vật chất được mô tả bởi lý thuyết trường chuẩn

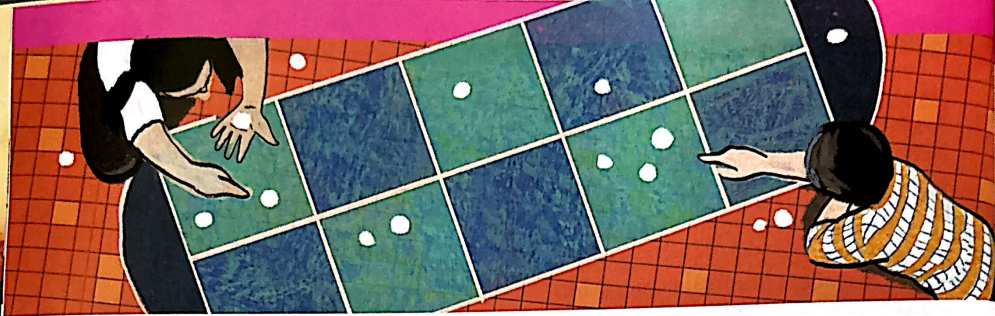
bậc cao. Đó sẽ là sự hiện thực hóa tuyệt vời tâm nhìn của Hoàng Xuân Sính.”

Những năm sau này, giáo sư Hoàng Xuân Sính không còn thời gian dành cho nghiên cứu toán học, khi dồn hết sức lực và tâm huyết để xây dựng trường Đại học Thăng Long.



Cuộc đời bà là hành trình nhất quán của một trí thức yêu nước và nhà khoa học đầy tài năng: từ quyết định rời bỏ cuộc sống tiện nghi ở nước Pháp để trở về đóng góp cho nền giáo dục Việt Nam trong những năm chiến tranh ác liệt, quyết tâm vươn lên đỉnh cao khoa học trong những điều kiện đặc biệt khó khăn, cho đến những cố gắng và nghị lực phi thường để vượt qua biết bao thử thách, xây dựng trường đại học ngoài công lập đầu tiên trong hệ thống giáo dục của Việt Nam.

Nếu như trong toán học, “bất biến Sính” là một lớp đối đồng điều, thì “bất biến Sính” trong cuộc đời chính là tình yêu của bà với tổ quốc và khoa học.



PHÉP DỜI HÌNH VÀ CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH

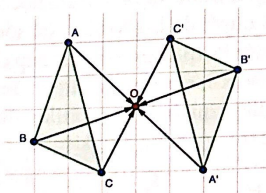
Phần II: Phép dời hình (tiếp theo)

NGÔ VĂN MINH, PHAN NGỌC MINH VÀ NGUYỄN THỊ NHUNG

Số này của tạp chí Pi tiếp tục giới thiệu đến bạn đọc phép dời hình thứ hai là Phép đối xứng tâm. Giống như phép phản xạ, dưới phép đối xứng tâm, các hình không thay đổi hình dáng hay kích thước và do đó không thay đổi diện tích.

2. Phép đối xứng tâm

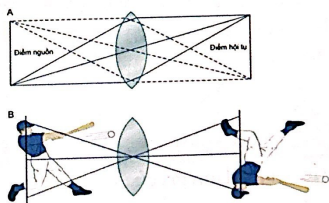
Phép đối xứng tâm tạo ra một hình mới bằng cách lấy đối xứng một hình xung quanh một điểm gọi là tâm đối xứng. Mỗi điểm trong hình đã cho được đặt tương ứng với một điểm sao cho tâm đối xứng là trung điểm của đoạn nối hai điểm này.



Hình 1.

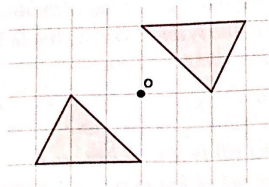
Tâm giác ABC bên trái được lấy đối xứng qua tâm O để tạo ra tam giác $A'B'C'$ bên phải. Lúc này điểm O chính là trung điểm của đoạn thẳng AA' , BB' và CC' . Do phép đối xứng tâm không làm thay đổi hình dáng và kích thước nên đặc biệt ta thấy rằng diện tích tam

giác ABC bằng diện tích tam giác $A'B'C'$. Các bạn nhỏ hãy liên hệ khái niệm tâm đối xứng tới chiếc thấu kính hội tụ: khi căn chỉnh vị trí một cách hợp lý, một vật đi qua thấu kính hội tụ sẽ cho ra ảnh ngược chiều với vật và bằng vật.



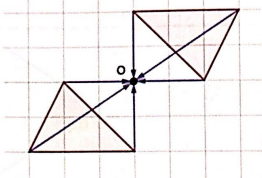
Hình 2.

Chúng ta cùng tìm hiểu thêm về phép đối xứng tâm qua các ví dụ minh họa dưới đây.
Ví dụ 2.1: Hãy cho biết hình vẽ dưới đây có nhận điểm O là tâm đối xứng hay không.



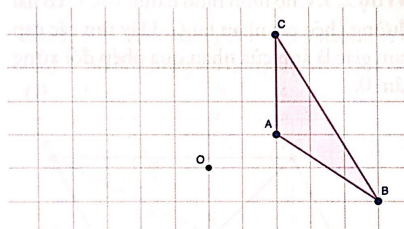
Hình 3.

Lời giải: Từ hình vẽ ta thấy mỗi điểm của một hình đều có một điểm tương ứng thuộc hình còn lại, sao cho O là trung điểm của đoạn nối hai điểm này. Do đó điểm O là tâm đối xứng của hình đã cho.



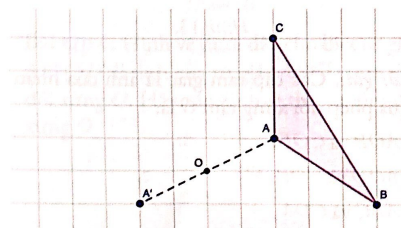
Hình 4.

Ví dụ 2.2: Hãy xác định tam giác $A'B'C'$ đối xứng với tam giác ABC qua tâm O .



Hình 5.

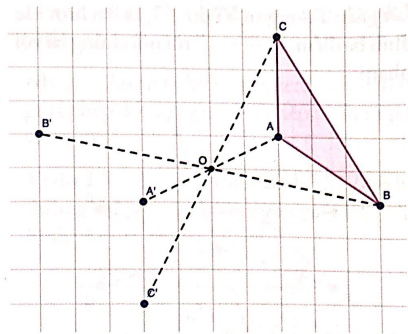
Lời giải: Đầu tiên ta xác định điểm đối xứng A' với điểm A qua O như sau



Hình 6.

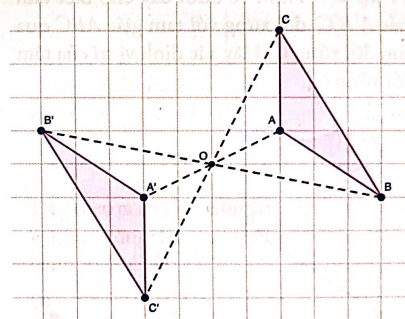
Rõ ràng OA và OA' đều có độ dài bằng độ dài đường chéo của hình chữ nhật cỡ 2×1 .

Tương tự ta cũng có thể tìm điểm đối xứng B' và C' với các điểm B và C



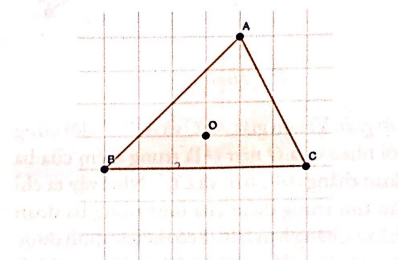
Hình 7.

Cuối cùng ta nối ba điểm A' , B' và C' lại với nhau để thu được tam giác $A'B'C'$ đối xứng với tam giác ABC qua tâm đối xứng O .



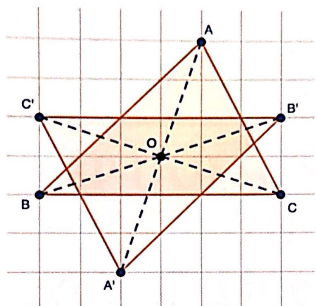
Hình 8.

Ví dụ 2.3: Tam giác $A'B'C'$ phải nằm ở vị trí nào để nó đối xứng với tam giác ABC qua tâm O ?



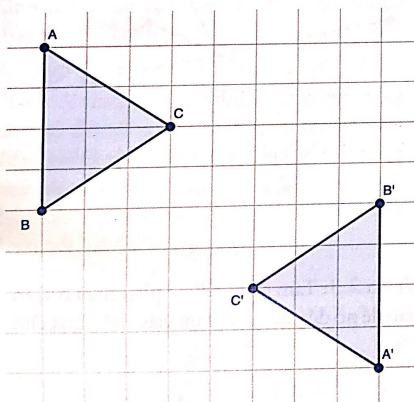
Hình 9.

Lời giải: Tương tự Ví dụ 2.2, ta lần lượt xác định ba điểm A' , B' và C' rồi nối chúng lại với nhau:



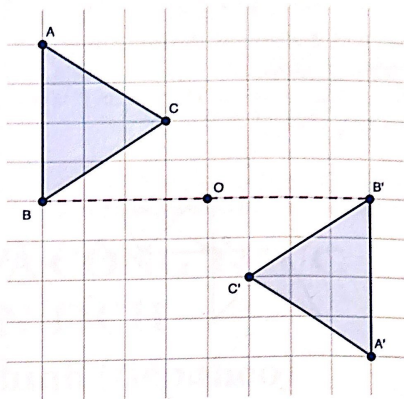
Hình 10.

Ví dụ 2.4: Hình vẽ dưới đây cho biết tam giác $A'B'C'$ đối xứng với tam giác ABC qua tâm đối xứng O . Hãy xác định vị trí của tâm đối xứng O .



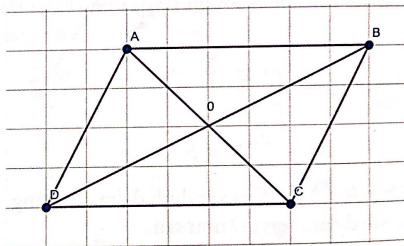
Hình 11.

Lời giải: Vì tam giác ABC và $A'B'C'$ đối xứng với nhau qua O nên O là trung điểm của ba đoạn thẳng AA' , BB' và CC' . Như vậy ta chỉ cần tìm trung điểm của một trong ba đoạn thẳng, chẳng hạn BB' là có thể xác định được tâm O . Tâm đối xứng O được cho như hình vẽ sau.



Hình 12.

Ví dụ 2.5. Cho hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Hãy tìm các cặp tam giác là ảnh của nhau qua phép đối xứng tâm O .



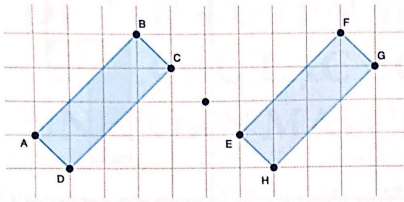
Hình 13.

Lời giải. Các cặp tam giác là ảnh của nhau qua phép đối xứng tâm O là:

- AOB và COD
- AOD và COB
- ABC và CDA
- ABD và CDB

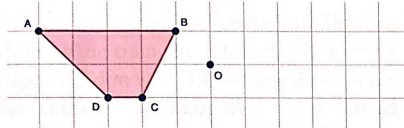
Các bạn nhỏ hãy làm một số bài tập sau để luyện tập thêm về phép đối xứng tâm.

Bài tập 1: Trong hình vẽ sau đây, hình chữ nhật $GHEF$ có là ảnh của $ABCD$ qua một phép đối xứng tâm không?



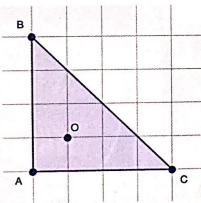
Hình 14.

Bài tập 2: Xác định $A'B'C'D'$ đối xứng với $ABCD$ qua tâm O .



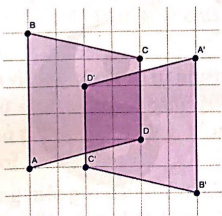
Hình 15.

Bài tập 3: Tam giác $A'B'C'$ phải nằm ở vị trí nào để nó đối xứng với tam giác ABC qua tâm O ?



Hình 16.

Bài tập 4: Hình vẽ dưới đây cho biết tứ giác $A'B'C'D'$ là ảnh của tứ giác $ABCD$ qua tâm đối xứng O . Hãy xác định vị trí của tâm đối xứng O .

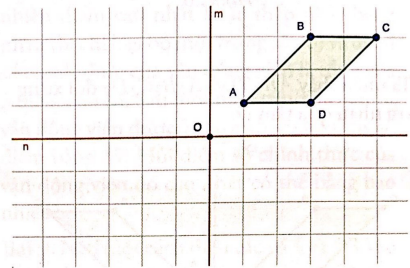


Hình 17.

Liên hệ giữa phép đối xứng tâm và phép phản xạ

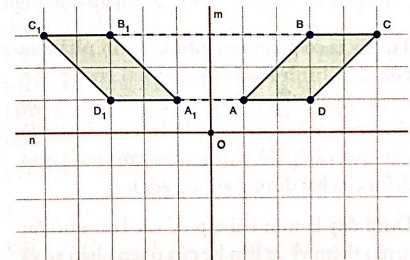
Bây giờ chúng ta hãy cùng xem mối liên hệ giữa phép đối xứng tâm và phép phản xạ qua ví dụ sau.

Ví dụ 2.5: Cho hình bình hành $ABCD$ và hai đường thẳng m, n vuông góc với nhau như hình vẽ dưới đây.



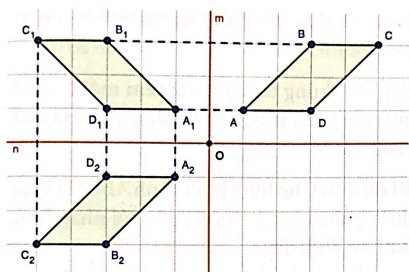
Hình 18.

Tiếp theo ta cho hình bình hành $ABCD$ phản xạ qua đường thẳng m để thu được hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$



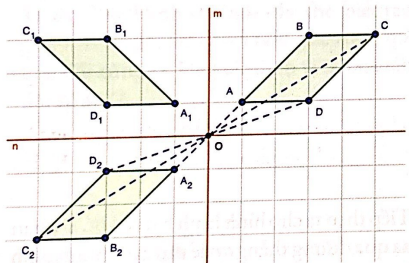
Hình 19.

Sau đó lại cho hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$ phản xạ qua đường thẳng n để thu được hình bình hành $A_2B_2C_2D_2$



Hình 20.

Ta nhận thấy $ABCD$ và $A_2B_2C_2D_2$ đối xứng với nhau qua tâm O .

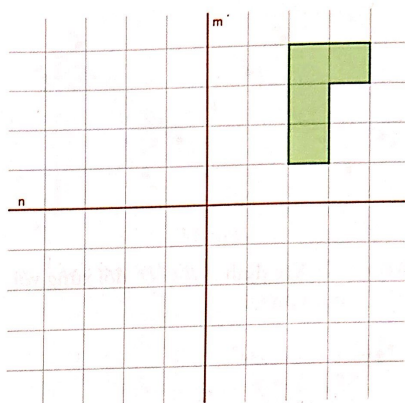


Hình 21.

Từ đây ta có nhận xét: **Khi lấy ảnh phản xạ của một hình lần lượt qua hai trục phân xạ là hai đường thẳng vuông góc với nhau thì được một hình mới là ảnh của hình đã cho qua phép đối xứng tâm** (với tâm là giao điểm của hai đường vuông góc).

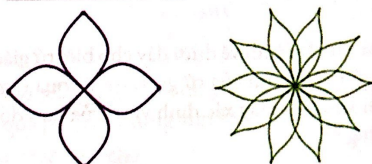
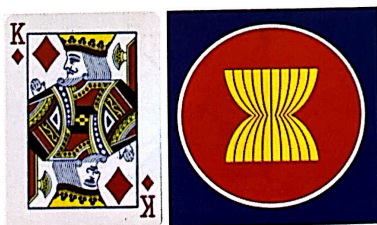
Dưới đây là một bài tập để các bạn nhỏ ôn luyện thêm về sự liên hệ của phép phản xạ và phép đối xứng tâm vừa được đưa ra ở trên.

Bài tập 5: Hãy tìm ảnh của phép phản xạ lần lượt qua đường thẳng m và n của hình vẽ sau đây. Phép biến hình nào sẽ có kết quả giống như hai phép phản xạ vừa thực hiện này?



Hình 22.

Phép đối xứng tâm cũng được nhìn thấy trong nhiều hình ảnh trong thực tế. Việc lấy hình ảnh đối xứng của những bộ phận đã cho của một hình qua một tâm tạo ra những hình ảnh đẹp và cân đối.



Hình 23.

ĐỀ THI TUYỂN SINH NĂM 2023-2024

CÂU LẠC BỘ TOÁN HỌC

UNICORN MATCH CIRCLE (Phần IV)

Tiếp tục với nội dung về đề thi tuyển sinh vào Câu lạc bộ Unicorn Math Circle, trong số này, tạp chí Pi giới thiệu đến bạn đọc bài thi dành cho các bạn học sinh lớp 7. Thời gian đề xuất làm bài là 90 phút.

Bài 1. Tìm một số có 3 chữ số mà khi tăng chữ số hàng trăm lên 3 đơn vị, chữ số hàng chục lên 2 đơn vị và chữ số hàng đơn vị lên 1 đơn vị thì ta nhận được số mới gấp 4 lần số ban đầu.

Bài 2. Trên bảng có viết số 798798798798. Bạn cần xóa đi một hoặc vài chữ số để kết quả nhận được là một số chia hết cho 9. Hỏi số lớn nhất mà bạn có thể nhận được là bao nhiêu?

Bài 3. Năm học 2022 – 2023 là một năm học đặc biệt: không thể đổi chỗ các chữ số của số 2022 để có một số nhỏ hơn 2022 và số 2023 cũng như vậy. (Các số không được bắt đầu bằng chữ số 0). Hỏi năm học nào gần nhất trước đó cũng đặc biệt như vậy?

Bài 4. Hãy đưa ra ví dụ 5 số hữu tỷ phân biệt nằm giữa $\frac{1}{2022}$ và $\frac{1}{2023}$.

Bài 5. Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau, chia hết cho 11, được tạo thành từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9?

Bài 6. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ chia hết cho 1000.

Bài 7. Tom viết tất cả các số tự nhiên sao cho tích các chữ số của mỗi số bằng 2016. Jerry chọn số nhỏ nhất trong chúng. Hỏi Jerry đã chọn số nào?

Bài 8. Trong một giải đấu thể dục dụng cụ, mỗi vận động viên được hội đồng giám khảo gồm 7 người chấm điểm. Mỗi giám khảo cho

điểm là một số tự nhiên từ 1 đến 10. Sau đó, theo quy định, trong số các điểm mà 7 giám khảo chấm thì một điểm cao nhất và một điểm thấp nhất sẽ bị loại bỏ (nếu có nhiều điểm cao nhất hoặc thấp nhất bằng nhau thì chỉ loại bỏ một trong số đó) và điểm số chính thức của vận động viên là tổng của 5 điểm còn lại. Sau một màn trình diễn, một vận động viên được 7 giám khảo cho tổng số điểm bằng 37. Hỏi điểm số chính thức của vận động viên đó cao nhất có thể bằng bao nhiêu?

Bài 9. Nếu một cách điền các số 1 và -1 vào các ô của một bảng 5×6 , mỗi ô một số, sao cho nếu lấy tổng của các số trên các hàng và các cột của bảng thì ta nhận được 11 số khác nhau.

Bài 10. Trên một hòn đảo nhỏ có 40 cư dân gồm hai loại người: người Dối trá, luôn luôn nói dối và người Khôn ngoan, khi thì nói thật lúc lại nói dối. Một hôm tất cả các cư dân ngồi họp quanh một bàn tròn và mỗi người đều nói “Ngồi sát bên cạnh tôi là một người Dối trá và một người Khôn ngoan”. Biết rằng lần đó có đúng 3 người Khôn ngoan nói dối. Hỏi trên đảo có tất cả bao nhiêu người Dối trá.

Đáp án

Bài 1. 107.

Bài 2. 9879879879.

Bài 3. 2008 – 2009.

Bài 4. Bài toán có nhiều đáp án, một đáp án

mẫu là: $\frac{10}{20221}, \frac{10}{20222}, \frac{10}{20223}, \frac{10}{20224}, \frac{10}{20225}$.

Bài 5. 8.

Bài 6. 121.

Bài 7. 4789.

Bài 8. Lời giải. Một mặt, điểm số thấp nhất không ít hơn 1. Mặt khác, do tổng điểm của 7 giám khảo bằng 37 nên có một giám khảo cho điểm từ 6 trở lên (nếu không, tổng số điểm của 7 giám khảo không vượt quá $7 \times 5 = 35$). Như vậy, tổng điểm của giám khảo cho thấp nhất và cao nhất không ít hơn $1 + 6 = 7$. Chính vì vậy, điểm chính thức của vận động viên cao nhất là $37 - 7 = 30$. Đảo lại, nếu các giám khảo cho điểm là 1, 6, 6, 6, 6, 6, 6 thì điểm chính thức của vận động viên đúng bằng 30. Đáp số 30.

Bài 9. Lời giải. Một ví dụ

-1	-1	-1	-1	-1	1	-4
-1	-1	1	1	1	1	2
-1	-1	-1	1	1	1	0
-1	-1	-1	-1	1	1	-2
-1	1	1	1	1	1	4
-5	-3	-1	1	3	5	

Bài 10. Lời giải. Nhận xét rằng nếu có 2 người Đối trá ngồi cạnh nhau thì bên cạnh những người này phải đều là những người Đối trá. Và cứ tiếp tục như vậy thì không bao giờ xuất hiện người Khôn Ngoan, điều này là vô lý. Do đó giữa 2 người Đối trá luôn có ít nhất 1 người Khôn ngoan.

Ta thấy rằng chỉ có đúng 2 trường hợp mà một người Khôn Ngoan nói dối:

Trường hợp 1: Nếu giữa hai người Đối trá có đúng 1 người Khôn ngoan, thì người này đã nói dối;

Trường hợp 2: Cũng như vậy, nếu giữa hai người Đối trá có đúng $k \geq 2$ người Khôn ngoan thì sẽ có đúng $k - 2$ người Khôn Ngoan ở chính giữa đã nói dối.

Gọi số người Khôn ngoan đã nói dối trong TH1 là a và TH2 là b thì $a + b = 3$. Hơn nữa nếu ta bỏ đi những người loại b thì trong số các cặp 2 người Đối trá liên tiếp sẽ có đúng a cặp có 1 người Khôn ngoan, các cặp còn lại có đúng 2 người Khôn ngoan. Do đó ta suy ra: $40b + a$ chia hết cho 3. Chỉ có thể xảy ra điều này nếu $a = 1, b = 2$. Từ đây dễ dàng suy ra có 13 người Đối trá.

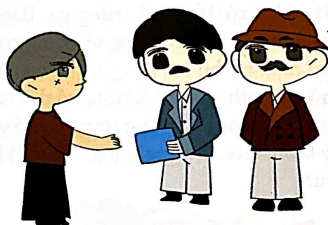
CUỘC THẨM TRA ĐẶC BIỆT

GIA DƯƠNG

Thám tử Xuân Phong cùng thanh tra Lê Kính được bên cảnh sát mời tới thẩm tra các đối tượng vừa bị bắt giữ tại khu tạm giam. Theo ý kiến đề xuất của Xuân Phong, Lê Kính cho mời 20 đối tượng từ hai băng cướp có tên là Mèo Rừng và Báo Hoa vào phòng và phát riêng cho mỗi đối tượng một câu hỏi. Có tất cả 20 câu hỏi được in ra trên các tấm bìa gồm hai màu xanh và hồng. Không đối tượng nào nhìn thấy màu tấm bìa mà đối tượng khác được phát. Qua bên cảnh sát thuật lại, các tên cướp từ băng Mèo Rừng luôn nói thật, còn các tên cướp từ băng Báo Hoa luôn nói dối. Sau khi đã được phát các câu hỏi, tất cả các đối tượng đều tuyên bố “Tôi đã nhận được câu hỏi in trên tấm bìa màu xanh”. Sau đó, các câu hỏi được thu lại, tráo đều lên và lại được phát lần thứ hai cho các đối tượng. Lần này thì chỉ có một nửa số các đối tượng được triệu tập tuyên bố

“Trong lần phát thứ hai này tôi đã nhận được câu hỏi in trên tấm bìa màu xanh”, còn tất cả các đối tượng còn lại đều tuyên bố “Trong lần phát thứ hai này tôi đã nhận được câu hỏi in trên tấm bìa màu hồng”.

Em hãy giúp thám tử Xuân Phong tìm ra số các đối tượng đến từ băng Mèo Rừng đã nhận được câu hỏi in trên tấm bìa màu hồng trong lần phát câu hỏi thứ hai nhé.



CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Hai đoàn tàu xuất phát cùng một thời điểm trên một tuyến đường sắt, một tàu đi từ A tới B với tốc độ 80 km/h , tàu còn lại đi từ B tới A với vận tốc 70 km/h . Hỏi trước khi gặp nhau một giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km , cho biết quãng đường từ A tới B dài ít nhất là 350 km .



anh đi xuống với tốc độ là 5 km/h . Tổng thời gian đi và về của anh Sơn là 6 h . Em hãy tính quãng đường từ chân dốc lên đỉnh dốc.



2. Anh Sơn xuất phát từ chân dốc và đi lên dốc với tốc độ 2.5 km/h . Lên đến đỉnh dốc,

3. Tí đi mua bánh rán hết 45 ngàn đồng. Bánh rán cỡ to giá 7 ngàn đồng/chiếc, cỡ nhỏ giá 5 ngàn đồng/chiếc. Tí đã ăn luôn một chiếc bánh to sau khi mua, hỏi Tí còn lại mấy chiếc bánh rán?



4. Bác Tâm có 100 quả trứng gà. Bác bỏ chúng vào 5 chiếc rổ. Tổng số trứng trong rổ thứ nhất và thứ hai là 52, số trứng trong rổ thứ hai và thứ ba là 43, trong rổ thứ ba và thứ tư là 34, tổng số trứng trong hai rổ cuối cùng là 30. Hỏi số trứng trong mỗi rổ là bao nhiêu?



5. Có 3 đĩa đựng những quả táo, trong đó một đĩa có 11 quả, 1 đĩa có 7 quả và đĩa còn

lại có 6 quả táo. Người ta muốn chuyển chỗ những quả táo giữa các đĩa sao cho số táo trên ba đĩa bằng nhau với điều kiện mỗi lần thêm táo vào một đĩa, số táo thêm vào phải bằng số táo hiện có trên đĩa đó và tất cả những quả táo được thêm vào lấy ra từ chỉ một đĩa trong hai đĩa còn lại. Em hãy cho biết có thể thực hiện với 3 lần chuyển chỗ những quả táo hay không?



6. Ban đầu bốn bạn An, Bách, Công, Dũng mỗi người có một số viên bi nhất định trong đó Công có nhiều hơn Dũng 10 viên bi. Nếu Công cho Bách $\frac{1}{4}$ số bi của mình, An lấy $\frac{1}{3}$ số bi của An cho Bách, tiếp đến Bách cho Công $\frac{1}{4}$ số bi Bách hiện có, rồi Công lại cho $\frac{1}{5}$ số bi của mình đang có cho Dũng và cuối cùng Bách lấy $\frac{1}{4}$ số bi chia đều cho 3 bạn còn lại thì bốn bạn có số viên bi bằng nhau. Ban đầu mỗi bạn có bao nhiêu viên bi?



LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 11 năm 2023)

1. Tuấn và Tú cùng tham gia một giải thi đấu cờ vua cùng các bạn học sinh khác trong trường. Hai bạn tổng cộng ghi được 6.5 điểm, trong khi tất cả các bạn học sinh còn lại đều ghi được số điểm bằng nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu học sinh tham gia giải cờ vua đó? (Biết rằng trong giải thi đấu, mỗi người tham gia thi đấu đúng một ván với mỗi người còn lại, ghi được 1 điểm sau mỗi trận thắng, 0.5 điểm sau mỗi trận hoà và 0 điểm sau mỗi trận thua).



2. Lớp 6A gồm 22 bạn chia thành hai đội: Xanh gồm các bạn nam và Đỏ gồm các bạn nữ để tổ chức thi tài đối đáp, trả lời thông minh. Đầu tiên, bạn Hoa ở nhóm Đỏ đối đáp với 6 bạn nam ở nhóm Xanh và giành chiến thắng. Tiếp theo, bạn Mai ở nhóm Đỏ đối đáp với 7 bạn nam ở nhóm Xanh và cũng giành chiến thắng. Tiếp tục bạn Huệ ở nhóm Đỏ cũng chiến thắng 8 bạn nam ở nhóm Xanh. Cứ tiếp tục như vậy, cuối cùng bạn Hà ở nhóm Đỏ đã đối đáp thông minh với toàn bộ các bạn nam ở nhóm Xanh và giành chiến thắng chung cuộc. Hỏi trong lớp có tất cả bao nhiêu bạn nam?



Lời giải. Giả sử số học sinh tham gia trừ Tuấn và Tú là a (bạn). Khi đó có tất cả $(a+2)$ bạn tham gia giải thi đấu, và có tổng cộng $\frac{(a+1)(a+2)}{2}$ điểm được ghi. Từ đây suy ra mỗi học sinh, trừ Tuấn và Tú, đã ghi được $\left(\frac{(a+1)(a+2)}{2} - 6.5 \right) : a = \frac{a^2 + 3a - 11}{2a}$ điểm.

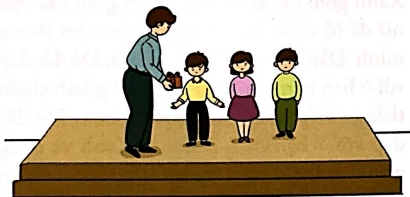
Số $\frac{a^2 + 3a - 11}{2a}$ hoặc là phải là một số nguyên, hoặc là một nửa của một số nguyên. Do số $\frac{a^2 + 3a}{2a}$ đã là một số nguyên, hoặc là một nửa của một số nguyên nên $\frac{11}{2a}$ là số nguyên hoặc một nửa số nguyên. Từ đó $a = 1$ hoặc $a = 11$. Nếu $a = 1$ thì điểm các bạn nhỏ hơn 0. Do đó $a = 11$.

Đáp số: Kể cả Tuấn và Tú có 13 bạn đã tham gia giải thi đấu cờ vua.

Lời giải. Giả sử có n bạn nữ ở nhóm Đỏ. Khi đó người cuối cùng ở nhóm Đỏ là bạn Hà đã đối đáp thông minh với $(n+6)$ bạn nam. Suy ra cả lớp có $n + (n+6) = 22$. Từ đây ta có $n = 8$ và số học sinh nam trong lớp là 14 (bạn).

3. Có bốn chủ doanh nghiệp tới thăm trường học cũ của mình, mang theo một số món quà với dự định sẽ trao tặng cho các học sinh đang học ở đó. Khi tất cả 252 em học sinh được mời xếp thành một hàng ngang, chủ doanh nghiệp thứ nhất tặng quà cho mỗi em đứng thứ tư trong hàng (các em ở số thứ tự 4, 8, 12, ...). Chủ doanh nghiệp thứ hai lại

tặng quà cho mỗi em đứng thứ bảy (các em ở số thứ tự 7, 14, 21, ...). Chủ doanh nghiệp thứ ba trao tặng quà cho mỗi em đứng thứ mười một (các em ở số thứ tự 11, 22, 33, ...). Chủ doanh nghiệp thứ tư sẽ tặng quà cho các em còn lại. Hỏi có bao nhiêu em học sinh nhận được quà từ mỗi chủ doanh nghiệp?



Lời giải. Số 252 được phân tích ra các thừa số như sau: $252 = 4 \cdot 63 = 7 \cdot 36 = 11 \cdot 22 + 10$.

Vậy có 63 em đứng ở vị trí 4, 8, 12, ...; có 36 em đứng ở vị trí 7, 14, 21, ...; có 22 em đứng ở vị trí 11, 22, 33, ...

Do $252 = 28 \cdot 9 = 44 \cdot 5 + 32 = 77 \cdot 3 + 21$ nên có 9 em học sinh đã được nhận quà từ nhà tài trợ thứ nhất và thứ hai, có 5 em nhận quà từ nhà tài trợ thứ hai và ba, và 3 em nhận quà từ nhà tài trợ thứ ba và thứ nhất. Ngoài ra không có em nào nhận quà từ cả ba nhà tài trợ này.

Suy ra số học sinh đã nhận quà từ ba nhà tài trợ thứ nhất, thứ hai, thứ ba là

$$63 + 36 + 22 - (9 + 5 + 3) = 104 \text{ (em)}.$$

Vậy số em nhận quà từ nhà tài trợ thứ tư là $252 - 104 = 148 \text{ (em)}$.

Tóm tắt số học sinh được nhận quà từ các nhà tài trợ thứ nhất, hai, ba, tư lần lượt là 63, 36, 22 và 148.

4. Có ba nhà tài trợ quyết định giúp đỡ một tạp chí khoa học thường thức với tên gọi là Phi. Nhà tài trợ Quốc trao tặng một khoản tiền tính bằng dollar gồm có 4 chữ số: 2 chữ số đứng trước dấu phẩy, và hai chữ số sau dấu phẩy, trong đó số cent lẻ (tức là hai chữ số

đứng sau dấu phẩy) bằng với đúng số dollar chẵn (tức là hai chữ số đứng trước dấu phẩy; ta nhớ lại $100 \text{ cent} = 1 \text{ dollar}$). Nhà tài trợ Minh tặng số tiền với số dollar chẵn lớn hơn 3 dollar so với số dollar chẵn mà nhà tài trợ Quốc đã tặng nhưng số cent lẻ lại ít hơn 8 lần số cent lẻ của nhà tài trợ Quốc. Nhà tài trợ Vũ hào phóng đem tặng số tiền bằng $1/7$ tổng số tiền của hai nhà tài trợ Quốc và Minh đã trao cộng lại. Hỏi số tiền ủng hộ của ba nhà tài trợ cho tạp chí Phi là bao nhiêu?



Lời giải. Giả sử nhà tài trợ Quốc đã tặng x dollar chẵn và x cent. Ta thấy x không thể lớn hơn 99. Khi đó nhà tài trợ Minh đã tặng $x + 3$ dollar và $x/8$ cent. Từ đây suy ra x chia hết cho 8. Có nghĩa là $x = 8y$, với y không vượt quá 12.

Tổng số tiền hai nhà tài trợ Quốc và Minh tặng tạp chí Phi là $16y + 3$ dollar và $9y$ cent, đổi ra cent là $1609y + 300 \text{ (cent)}$.

Số này viết được ở dạng $7(230y + 43) - (y + 1)$, suy ra $y + 1$ chia hết cho 7 để tổng số tiền của hai nhà tài trợ Quốc và Minh đã tặng chia hết cho 7 (ta nhớ lại rằng nhà tài trợ Vũ đã tặng số tiền bằng $\frac{1}{7}$ tổng số tiền của ông Quốc và ông Minh). Trong số các số từ 1 tới 12, chỉ có duy nhất $y = 6$ là thỏa mãn điều kiện này.

$$\text{Vậy } x = 48.$$

Cuối cùng, ta thấy nhà tài trợ Quốc đã tặng tạp chí 48.48 dollar, nhà tài trợ Minh đã tặng 51.06 dollar và nhà tài trợ Vũ đã tặng 14.22 dollar. Tổng cộng cả ba nhà tài trợ đã tặng cho tạp chí Phi 113.76 dollar.

5. Trên hòn đảo Ngọc ở giữa một đại dương

xanh ngắt có 100 thổ dân sinh sống, một số người trong họ luôn nói dối, còn những người còn lại luôn nói thật. Mỗi một thổ dân thờ phụng đúng một trong ba vị thần: thần Mặt trời, thần Mặt trăng hoặc thần Đất. Người ta hỏi mỗi thổ dân ba câu hỏi sau đây:



1. Ông (bà) có thờ phụng thần Mặt trời hay không?
2. Ông (bà) có thờ phụng thần Mặt trăng hay không?
3. Ông (bà) có thờ phụng thần Đất hay không?

Có 60 người trả lời khẳng định “có” với câu hỏi thứ nhất, 40 người trả lời khẳng định “có” với câu hỏi thứ hai và 30 người trả lời khẳng định “có” với câu hỏi thứ ba. Hỏi trên đảo Ngọc có bao nhiêu thổ dân nói dối?

Lời giải. Mỗi người nói dối sẽ đưa ra câu trả lời “có” tận hai lần cho ba câu hỏi, còn những người nói thật sẽ chỉ trả lời “có” đúng một lần. Tổng cộng có 130 lần nhận được câu trả lời là “có”, mà số thổ dân là 100, nên số người trả lời “có” hai lần sẽ là $130 - 100 = 30$ (người).

Đáp số: 30 người nói dối.

6. Có 100 em học sinh được mời tới buổi tổng kết cuối năm học của nhà trường. Các ghế trong phòng họp được xếp ngay ngắn thẳng hàng theo dạng một hình vuông với 10 dãy ghế, mỗi dãy có đúng 10 chiếc ghế. Buổi họp phải diễn ra muộn hơn do bị cắt điện, vì

thể các em học sinh bắt đầu bàn luận trao đổi với các bạn bên cạnh về kết quả điểm trung bình của mình. Em học sinh nào thấy trong tất cả những bạn ngồi kề sát mình: bên trái, bên phải, đằng sau, đằng trước và theo các đường chéo, chỉ có tối đa một bạn có điểm trung bình cao hơn hoặc bằng điểm trung bình của mình, sẽ tự coi mình là “có thành tích”.



Hỏi trong buổi họp đó có thể có tối đa bao nhiêu em học sinh đã tự coi mình là “có thành tích” trong học tập?

Lời giải. Ta chia hình vuông 10×10 thành 25 hình vuông nhỏ 2×2 . Rõ ràng, trong mỗi hình vuông nhỏ như vậy chỉ có tối đa 2 em học sinh tự coi mình “có thành tích” trong học tập, do đó số các em học sinh như vậy không quá 50 em.

Ta chỉ ra ví dụ về điểm trung bình của các em học sinh và cách sắp xếp các em ngồi tại các ghế trong phòng họp, hơn nữa có đúng 50 em tự coi mình “có thành tích” trong học tập (đó là các em có điểm trung bình khác 0).

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0
3	0	3	0	3	0	3	0	3	0
4	0	4	0	4	0	4	0	4	0
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0
7	0	7	0	7	0	7	0	7	0
8	0	8	0	8	0	8	0	8	0
9	0	9	0	9	0	9	0	9	0
10	0	10	0	10	0	10	0	10	0



PROOF BY CONTRADICTION (Part II)

NGHIA DOAN¹

This article is the second part of the series on *Proof by Contradiction*.

Example 6. Twenty-five persons from 8 different provinces are elected to the National Congress. Prove that at least 4 of them are from the same province.

Solution. Assume that this is not true. Then no 4 of them are from the same province. In this case, not more than 3 persons are from the 1st province, not more than 3 from the 2nd, and so on. Altogether, there are not more than $3 \times 8 = 24$ persons. This contradicts the fact that there are 25 persons.

Example 7. At the graduation event of the School of Wizardry, 5 outstanding students are called to the podium. They stand in a row. Altogether, these 5 students know 300 different spells. Prove that there are 2 students standing next to each other who, if combined, know at least 100 spells.

Solution. Suppose that this is not true. Then the 1st and 2nd students together know less than 100 spells, and the 4th and 5th students together know less than 100 spells. Then these four know less than 200 spells together. In this case, the 3rd student knows more than 100 spells.

Example 8. The only way to travel in the Kingdom of so many swamps is to use magic carpets. Twenty-one carpet-transportation lines serve the capital. A

single carpet-transportation line goes to Tinyville, and every other city is served by exactly 20 carpet-transportation lines. Show that it is possible to travel by magic carpet from the capital to Tinyville (perhaps by transferring from one carpet line to another).

Solution. Let's take a look at all the cities that are accessible by magic carpet from Tinyville. The capital does not belong to this group. In this group there is a number of cities, each has 20 lines leading to it, and one city (Tinyville) with only one line leading to it. Thus the sum of all lines leading to the cities is an odd number. But this is not true. If we count the lines among these cities, then they have to be counted twice, thus it is an even number. This contradiction means Tinyville is connected to the capital.

Example 9. The game of Trick-a-Troll is played with 10 players and a deck of 20 cards: 2 through 10 and an ace of spades, and 2 through 10 and an ace of clubs. Each player gets 1 club and 1 spade and adds his cards (aces count as 1). Prove that there will be at least 2 players with sums that end in the same digit.

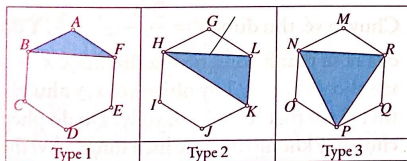
Solution. Let's consider the sum of the values of all the cards. If we assume that all players had different last digits for their sums, then all 10 digits would be present, and the sum of them all would end with a 5. On the other hand, the sum of the values of all cards in play ends with a 0, a contradiction.

¹ Ottawa, Canada.

Example 10. At each of the vertices of a regular hexagon there stands a grasshopper. At the same time, all six grasshoppers jump off the ground. They land at the same time, each at one of the vertices. No two grasshoppers land at the same vertex. Each of the grasshoppers does not necessarily land at a vertex different from the one it jumps off. Prove that there exist three grasshoppers jump off vertices A, B , and C , and land at A', B' and C' , such that $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$ are congruent.

Solution. Let assume that it is not possible for such a scenario. In other words, if any three grasshoppers jump off vertices A, B , and C , and land at A', B' and C' , then $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$ are not congruent.

First, we find out how many types of triangles can be constructed with three vertices of the hexagon. There are three types of triangles, such that they are pair-wise not congruent, see the diagram below.

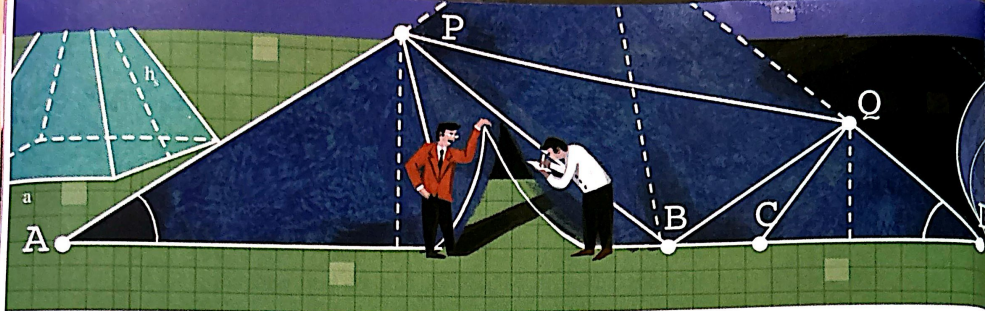


For Type 1, there are 6 such triangles; for Type 2, 12 triangles; and for Type 3, 2 triangles. (there are 20 such triangles in total.)

Now, our assumption means that 12 triangles of Type 2 should be changed to the same number of distinct triangles of Type 1 or Type 2, which is impossible since there are only $6 + 2 = 8$ of them. This is a contradiction.

Vocabulary

Acc: (đ.t) quân bài Át.
 Capital: (đ.t) thủ đô.
 Carpet: (đ.t) tấm thảm.
 Club: (đ.t) chất nhép (trong cổ bài).
 Combine: (đ.t) kết hợp, phối hợp.
 Connect: (đ.t) liên kết.
 Construct: (đ.t) xây dựng.
 Count: (đ.t) đếm.
 Deck: (đ.t) deck of card: cỗ bài.
 Digit: (đ.t) chữ số.
 Even: (t.t) chẵn.
 Fact: (đ.t) thực tế, sự kiện.
 Graduation: (đ.t) tốt nghiệp.
 graduation event: lễ tốt nghiệp.
 Grasshopper: (đ.t) con châu chấu.
 Hexagon: (đ.t) lục giác.
 regular hexagon: lục giác đều.
 Jump: (đ.t) nhảy.
 Land: (đ.t) đậu.
 Magic: (t.t) kỳ diệu.
 National Congress: (đ.t) Quốc hội.
 Outstanding: (t.t) xuất sắc.
 Province: (đ.t) tỉnh.
 Podium: (đ.t) bục danh dự.
 Serve: (đ.t) phục vụ.
 Scenario: (đ.t) kịch bản.
 Spade: (đ.t) chất bích (trong cổ bài).
 Spell: (đ.t) phép thuật.
 Sum: (đ.t) tổng.
 Swamp: (đ.t) đầm lầy.
 Transfer: (đ.t) đổi tàu/xe, chuyển tuyến.
 Triangle: (đ.t) tam giác.
 congruent triangles: tam giác bằng nhau.
 Transportation: (đ.t) vận chuyển.
 transportation line: tuyến giao thông.
 Type: dạng.
 Value: (đ.t) giá trị.
 Vertex: (đ.t) đỉnh.



TÌM TÒI NHIỀU LỜI GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM

TRẦN NHẬT QUANG¹

1. Giới thiệu

Những bài toán phương trình hàm trên tập hợp số thực dương đã không còn quá xa lạ đối với các bạn học sinh chuyên Toán và ngày càng xuất hiện nhiều hơn trong các đề thi Olympic đạo gần đây. Trong số đó, có thể kể đến bài toán nằm trong đề thi chọn đội tuyển Quảng Ninh tham dự kỳ thi học sinh giỏi cấp quốc gia môn Toán (VMO) năm học 2022 – 2023 dưới đây:

Bài toán: [Quảng Ninh 2022 – 2023]

Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(3f(x) + 3y) = f(3x + y) + 2y, \quad (1)$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}^+$.

Bài viết này bàn về bảy lời giải cho bài toán trên qua đó giới thiệu cho bạn đọc những kỹ năng, kỹ thuật cơ bản để giải quyết những bài toán phương trình hàm trên tập hợp số thực dương nói riêng và những bài toán phương trình hàm nói chung.

2. Lời giải bài toán

Giả sử rằng tồn tại hàm f thỏa mãn các yêu cầu bài toán. Trước hết ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 1. $f(x) \geq x, \forall x > 0$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) < x_0$. Trong (1) cho $x = x_0$ và $y =$

$$\frac{3(x_0 - f(x_0))}{2} \text{ ta được:}$$

$$3(x_0 - f(x_0)) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0, \text{ vô lý!}$$

Do đó $f(x) \geq x, \forall x > 0$.

Bình luận. Lý do nào khiến ta nghĩ ra được đánh giá trên? Quan sát phương trình (1), ta mong muốn triệt tiêu f ở cả hai vế bằng cách lựa chọn $x, y > 0$ sao cho:

$$3f(x) + 3y = 3x + y.$$

Chuyển vế, thu được $y = \frac{3(x - f(x))}{2}$. Ý đồ của ta sẽ thành công nếu ta tìm được $x > 0$ sao cho $f(x) < x$. Tuy nhiên với x, y như vậy thì (1) trở thành: $2y = 0$, vô lý! Do đó phép chọn này không thể thực hiện được, và vì thế điều ngược lại là $f(x) \geq x, \forall x > 0$ ắt phải đúng!

Nhận xét 2. f là đơn ánh.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $a > b > 0$ sao cho $f(a) = f(b) = c$. Trong (1) lần lượt cho $x = a$ và $x = b$ thì được:

$$\begin{aligned} f(y + 3a) + 2y &= f(3y + 3c) \\ &= f(y + 3b) + 2y, \forall y > 0. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$f(y + 3a) = f(y + 3b), \forall y > 0.$$

¹Sinh viên Trường ĐH Sư phạm TP.HCM.

Từ đây thay y bởi $y - 3b$ và đặt $T = 3a - 3b > 0$ thì được:

$$f(y) = f(y + T), \forall y > 3b.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$f(y) = f(y + nT), \forall y > 3b, n \in \mathbb{N}^*.$$

Trong đẳng thức trên chọn $y = 3b + 1$ và sử dụng **Nhận xét 1** ta được:

$$\begin{aligned} f(3b + 1) &= f(3b + 1 + nT) \\ &\geq 3b + 1 + nT, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Đến đây cho $n \rightarrow +\infty$ ta thu được điều vô lý. Do vậy f là đơn ánh.

Bình luận. Đối với những bài toán tìm hàm $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, ta thường chú ý đến tính đơn điệu, đơn ánh, tuần hoàn, bị chặn, cộng tính, ... của hàm f . Đặc biệt, kỹ thuật phản chứng, xây dựng hàm tuần hoàn nhằm chứng minh f đơn ánh đã trở thành ý tưởng quen thuộc khi giải quyết những bài toán dạng này.

Sau khi thu được hai nhận xét trên, tôi xin trình bày bảy lời giải cho bài toán gốc như sau:

Cách 1:

Trong (1) thay x bởi $3f(x) + 3z$ thì được:

$$\begin{aligned} f(3f(3f(x) + 3z) + 3y) \\ = f(9f(x) + 9z + y) + 2y, \forall x, y, z > 0 \end{aligned}$$

Suy ra, theo (1)

$$\begin{aligned} f(3f(3x + z) + 6z + 3y) \\ = f(9f(x) + 9z + y) + 2y, \forall x, y, z > 0 \end{aligned}$$

suy ra, theo (1)

$$\begin{aligned} f(3(3x + z) + 2z + y) + 4z + 2y \\ = f(9f(x) + 9z + y) + 2y, \forall x, y, z > 0 \end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned} f(9x + 5z + y) + 4z \\ = f(9f(x) + 9z + y), \forall x, y, z > 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Đến đây thay y và z bởi $\frac{z}{2}$ ta được:

$$f(9x + 3z) + 2z = f(9f(x) + 5z), \forall x, z > 0$$

suy ra

$$f(3(3x + \frac{2z}{3}) + z) + 2z = f(9f(x) + 5z),$$

với mọi $x, z > 0$. Suy ra, theo (1)

$$f(3f(3x + \frac{2z}{3}) + 3z) = f(9f(x) + 5z),$$

với mọi $x, z > 0$. Mặt khác f là đơn ánh nên:

$$3f(3x + \frac{2z}{3}) + 3z = 9f(x) + 5z, \forall x, z > 0.$$

Dẫn đến:

$$f(3x + \frac{2z}{3}) = 3f(x) + \frac{2z}{3}, \forall x, z > 0.$$

Đến đây thay z bởi $\frac{9z}{2}$ thì được:

$$f(3x + 3z) = 3f(x) + 3z, \forall x, z > 0.$$

Trong đẳng thức trên hoán đổi vị trí của x và z cho nhau ta được:

$$\begin{aligned} 3f(z) + 3x &= 3f(x) + 3z, \forall x, z > 0 \\ \Rightarrow f(x) - x &= f(z) - z, \forall x, z > 0. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$f(x) = x + C, \forall x > 0 \quad (C \text{ là hằng số}).$$

Thay công thức trên vào (1) ta được:

$$3x + 3y + 4C = 3x + 3y + C, \forall x, y > 0.$$

Vậy $C = 0$. Vậy bài toán đã cho có duy nhất một nghiệm hàm là $f(x) = x, \forall x > 0$.

Cách 2: (tiếp nối từ (2))

Trong (2) cho $z = x$ thì được:

$$f(14x + y) + 4x = f(9f(x) + 9x + y),$$

với mọi $x, y > 0$. Đến đây thay y bởi $y - 14x$ thì được:

$$f(y) + 4x = f(y + 9f(x) - 5x),$$

với mọi $x > 0, y > 14x$.

Với mọi $x > 0$, đặt $g(x) = 9f(x) - 5x \geq 4x > 0$. Lúc này đẳng thức trên trở thành:

$$\begin{aligned} f(y) + 4x \\ = f(y + g(x)), \forall x > 0, y > 14x. \end{aligned} \quad (3)$$

Đến đây thay x bởi $x + z$ thì được:

$$\begin{aligned} f(y + g(x + z)) &= f(y) + 4x + 4z \\ &\stackrel{(3)}{=} f(y + g(x)) + 4z \\ &\stackrel{(3)}{=} f(y + g(x) + g(z)), \end{aligned}$$

với mọi $x, z > 0, y > 14(x + z)$. Lại có f là đơn ánh nên:

$$y + g(x + z) = y + g(x) + g(z),$$

với mọi $x, z > 0, y > 14(x + z)$. Dẫn đến:

$$g(x) + g(z) = g(x + z), \forall x, z > 0.$$

Như vậy $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ và g cộng tính trên $\mathbb{R}^+$ nên $g(x) = xg(1), \forall x > 0$. Nói cách khác,

$$9f(x) - 5x = xg(1), \forall x > 0,$$

suy ra

$$f(x) = \alpha x, \forall x > 0. (\alpha \text{ là hằng số})$$

Thay công thức trên vào (1) ta được:

$$\alpha(3\alpha x + 3y) = \alpha(3x + y) + 2y, \forall x, y > 0,$$

suy ra $\alpha = 1$. Vậy bài toán đã cho có duy nhất nghiệm hàm $f(x) = x, \forall x > 0$.

Cách 3: (tiếp nối từ (3))

Trong (1) thay y bởi $2y$ thì được:

$$f(3f(x) + 6y) = f(3x + 2y) + 4y, \forall x, y > 0$$

suy ra, theo (3)

$$f(3f(x) + 6y) = f(3x + 2y + g(y)),$$

với mọi $y > 0, 3x + 2y > 14y$.

Lại có f là đơn ánh nên:

$$3f(x) + 6y = 3x + 2y + g(y),$$

với mọi $y > 0, x > 4y$. Nói cách khác,

$$f(x) - x = 3(f(y) - y),$$

với mọi $y > 0, x > 4y$.

Với mọi $x > 0$, đặt $h(x) = f(x) - x$. Từ đẳng thức trên ta có ngay:

$$h(x) = 3h(y),$$

với mọi $y > 0, x > 4y$.

Giả sử ta cố định $y > 0$ thì lập tức h là hàm hằng trên khoảng $(4y, +\infty)$. Bằng cách cho $y \rightarrow 0^+$ ta sẽ thu được h là hàm hằng trên toàn bộ khoảng $(0, +\infty)$. Dựa trên phân tích này, ta có thể giải tiếp bài toán như sau:

Lấy $x > z > 0$ tùy ý. Ta sẽ chứng minh $h(x) = h(z)$.

Thật vậy, chọn $y = \frac{z}{5}$ thì $x > 4y$ và $z > 4y$.

Khi đó $h(x) = 3h(y) = h(z)$. Do đó h là hàm hằng trên $\mathbb{R}^+$. Nói cách khác,

$$f(x) - x = C,$$

với mọi $x > 0$. C là hằng số.

Thay công thức trên vào (1) ta tìm được: $C = 0$.

Cách 4: (tiếp nối từ (3))

Điểm mấu chốt của Cách 2 và Cách 3 là dựa vào phương trình (3) và tìm cách vận dụng tính đơn ánh của hàm f . Tuy nhiên trong một số trường hợp, nếu ta không chỉ ra được hàm f đơn ánh thì liệu có cách nào giải quyết được phương trình (3) hay không? Bỏ đề sau đây sẽ giúp chúng ta trả lời câu hỏi đó.

Bổ đề. Cho các hàm $f, g, h, q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(y + g(x)) = f(y) + h(x), \quad (4)$$

với mọi $x > 0, y > q(x)$. Khi đó $\frac{g(x)}{h(x)}$ là hàm hằng.

Chứng minh. Trong (4) thay y bởi $y - g(x)$ thì được:

$$f(y - g(x)) = f(y) - h(x),$$

với mọi $x > 0, y > q(x) + g(x)$.

Bằng quy nạp ta thu được:

$$f(y - ng(x)) = f(y) - nh(x), \quad (5)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*, x > 0, y > q(x) + ng(x)$.

Từ (4) bằng quy nạp ta cũng có:

$$f(y + mg(x)) = f(y) + mh(x), \quad (6)$$

với mọi $m \in \mathbb{N}^*, x > 0, y > q(x)$.

Lấy $x, y > 0$ tùy ý, ta hoàn toàn chọn được $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $mg(x) > ng(y)$. Đặt $z = q(x) + q(y)$, khi đó với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ thì:

$$\begin{aligned} & f(z + kmg(x) - kng(y)) \\ & \stackrel{(5)}{=} f(z + kmg(x)) - knh(y) \\ & \quad (\text{do } z + kmg(x) > q(y) + kng(y)) \\ & \stackrel{(6)}{=} f(z) + kmh(x) - knh(y) \quad (\text{do } z > q(x)) \\ & = f(z) + k[mh(x) - nh(y)]. \end{aligned}$$

Nếu $mh(x) - nh(y) < 0$ thì $\lim_{k \rightarrow +\infty} k[mh(x) - nh(y)] = -\infty$. Vì thế khi k đủ lớn thì $f(z + kmg(x) - kng(y)) < 0$, vô lý! Do đó $mh(x) \geq nh(y)$.

Nói tóm lại, ta thu được kết luận sau:

$$\text{“Nếu } \frac{g(x)}{g(y)} > \frac{n}{m} \text{ thì } \frac{h(x)}{h(y)} \geq \frac{n}{m}.”$$

Bây giờ giả sử $\frac{g(x)}{h(x)}$ không phải hàm hằng, tức là tồn tại $x, y > 0$ sao cho $\frac{g(x)}{h(x)} > \frac{g(y)}{h(y)}$. Suy ra $\frac{g(x)}{g(y)} > \frac{h(x)}{h(y)}$.

Mặt khác do $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên tồn tại số hữu tỷ dương $\frac{m}{n}$ sao cho:

$$\frac{g(x)}{g(y)} > \frac{n}{m} > \frac{h(x)}{h(y)}.$$

Điều này mâu thuẫn với kết luận ở trên. Vậy $\frac{g(x)}{h(x)}$ phải là hàm hằng.

Trở lại bài toán: Áp dụng bổ đề trên cho phương trình (3) ta có ngay điều cần chứng minh.

Cách 5:

Giả sử tồn tại $x_0 > 0$ để mà $f(x_0) > x_0$.

Trong (1) cho $x = x_0$ ta được:

$$f(3f(x_0) + 3y) = f(3x_0 + y) + 2y, \quad (7)$$

với mọi $y > 0$.

Đặt $A = 3f(x_0) - 3x_0 > 0$. Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$f(y) \geq y + nA, \forall y > 3x_0, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Theo **Nhận xét 1** thì bất đẳng thức (8) đúng với $n = 0$. Giả sử ta đã có $f(y) \geq y + kA$ với mọi $y > 3x_0$ và k là một số tự nhiên nào đó. Nhiệm vụ của ta bây giờ là chứng minh:

$$f(y) \geq y + (k + 1)A, \forall y > 3x_0.$$

Rõ ràng $3f(x_0) + 3y > 3x_0$ với mọi $y > 0$ nên theo giả thiết quy nạp thì:

$$f(3f(x_0) + 3y) \geq 3f(x_0) + 3y + kA, \forall y > 0,$$

suy ra, theo (7)

$$f(3x_0 + y) + 2y \geq 3f(x_0) + 3y + kA, \forall y > 0,$$

suy ra

$$f(y + 3x_0) \geq y + 3f(x_0) + kA, \forall y > 0.$$

Đến đây thay y bởi $y - 3x_0$ ta được:

$$f(y) \geq y + A + kA, \forall y > 3x_0,$$

suy ra

$$f(y) \geq y + (k+1)A, \forall y > 3x_0.$$

Do đó bất đẳng thức (8) được chứng minh xong. Trong (8) chọn $y = 3x_0 + 1$ và cho $n \rightarrow +\infty$ ta có ngay điều vô lý.

Nói cách khác, không tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) > x_0$. Kết hợp với **Nhận xét 1** ta có ngay $f(x) = x$ với mọi $x > 0$. Thử lại thấy đây là nghiệm hàm của bài toán.

Bình luận. Bất đẳng thức (8) được tìm ra như sau: Sử dụng **Nhận xét 1** trong (7) ta suy ra:

$$f(3x_0 + y) + 2y \geq 3f(x_0) + 3y, \forall y > 0,$$

suy ra

$$f(3x_0 + y) \geq 3f(x_0) + y, \forall y > 0.$$

Đến đây thay y bởi $y - 3x_0$, ta được:

$$f(y) \geq y + A, \forall y > 3x_0.$$

Lặp lại quá trình trên, ta sẽ thu được bất đẳng thức (8).

Cách 6:

Trước hết ta chứng minh f đồng biến (tăng ngặt) trên $\mathbb{R}^+$.

Sử dụng **Nhận xét 1** ở (1) ta được:

$$f(3x + y) + 2y \geq 3f(x) + 3y, \forall x, y > 0$$

suy ra

$$f(3y + x) \geq 2(f(x) - x) + f(x) + 3f(y),$$

với mọi $x, y > 0$. Đến đây thay y bởi $3f(y)$ rồi sử dụng (1) ta được:

$$f(3y + x) + 2x \geq 3f(x) + 3f(y),$$

suy ra

$$\begin{aligned} f(3y + x) &\geq 2(f(x) - x) + f(x) + 3f(y), \\ &\geq f(x) + 3f(y), \forall x, y > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Do đó với mọi $a, b > 0$ mà $a > b$ thì:

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(3 \cdot \frac{a-b}{3} + b\right) \stackrel{(9)}{\geq} f(b) + 3f\left(\frac{a-b}{3}\right) \\ &> f(b). \end{aligned}$$

Như vậy f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$.

Trong (9) thay x bởi $3f(x)$ rồi sử dụng (1) và tính đồng biến của f thì được:

$$\begin{aligned} f(3x + y) + 2y &\geq f(3f(x)) + 3f(y), \quad (10) \\ &\geq f(3x) + 3f(y), \forall x, y > 0 \end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned} f(3x + y) &\geq f(3x) + 2(f(y) - y) + f(y) \\ &\geq f(3x) + f(y), \forall x, y > 0. \end{aligned}$$

Nói tóm lại,

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y), \forall x, y > 0.$$

Sử dụng đánh giá trên, ta có (với mọi $x, y > 0$):

$$\begin{aligned} f(3f(x) + 3y) &= f(3f(x) + y + 2y) \\ &\geq f(3f(x) + y) + f(2y) \\ &\geq f(3f(x) + y) + 2y, \end{aligned}$$

suy ra, theo (1)

$$\begin{aligned} f(3x + y) + 2y &\geq f(3f(x) + y) + 2y, \\ f(3x + y) &\geq f(3f(x) + y), \end{aligned}$$

Mặt khác f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ nên từ bất đẳng thức trên ta có ngay:

$$\begin{aligned} 3x + y &\geq 3f(x) + y, \forall x, y > 0 \\ x &\geq f(x), \forall x > 0. \end{aligned}$$

Kết hợp với **Nhận xét 1** ta thu được $f(x) = x$.

Cách 7:

Ta sẽ chứng minh f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ bằng phản chứng.

Giả sử tồn tại hai số dương $a > b$ sao cho $f(a) \leq f(b)$. Đặt $\varepsilon = f(b) - f(a) \geq 0$.

Trong (1) cho $x = b$ thì được (với mọi $y > 0$):

$$f(3f(b) + 3y) = f(3b + y) + 2y,$$

suy ra

$$f(3f(a) + 3(y + \varepsilon)) = f(3b + y) + 2y,$$

suy ra, theo (1)

$$f(3a + y + \varepsilon) + 2(y + \varepsilon) = f(3b + y) + 2y,$$

suy ra

$$f(y + 3b) = f(y + 3a + \varepsilon) + 2\varepsilon,$$

Đến đây thay y bởi $y - 3b$ và đặt $T = 3a - 3b + \varepsilon$ thì được:

$$f(y) = f(y + T) + 2\varepsilon \geq f(y + T), \forall y > 3b.$$

Sử dụng đánh giá trên liên tiếp ta được:

$$f(y) \geq f(y + nT), \forall y > 3b, n \in \mathbb{N}^*.$$

Áp dụng **Nhận xét 1** vào bất đẳng thức trên ta có ngay:

$$f(y) \geq y + nT, \forall y > 3b, n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đây chọn $y = 3b + 1$ và cho $n \rightarrow +\infty$ ta có ngay điều vô lý. Do vậy f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$.

Sử dụng **nhận xét 1** trong (1) ta được:

$$f(3x + y) + 2y \geq 3f(x) + 3y, \forall x, y > 0$$

suy ra

$$f(3x + y) \geq 3f(x) + y, \forall x, y > 0. \quad (11)$$

Ta có $3f(x) + 3y \geq 3x + 3y, \forall x, y > 0$ và f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ nên:

$$f(3f(x) + 3y) \geq f(3x + 3y), \forall x, y > 0$$

suy ra, theo (1)

$$f(3x + y) + 2y \geq f(3x + 3y), \forall x, y > 0.$$

Đến đây thay x bởi $\frac{x}{3}$ thì được:

$$f(x + y) + 2y$$

$$\geq f(x + 3y) \stackrel{(11)}{\geq} 3f(y) + x, \forall x, y > 0.$$

Trong đánh giá trên cho $x = 2y$ ta được:

$$f(3y) \geq 3f(y), \forall y > 0. \quad (12)$$

Trong (1) thay y bởi $3f(y)$ rồi sử dụng (1) ta được:

$$\begin{aligned} & f(3f(x) + 9f(y)) \\ &= f(3y + x) + 6f(y) + 2x, \forall x, y > 0. \quad (13) \end{aligned}$$

Mặt khác $3f(x) + 9f(y) \geq 3(x + 3y), \forall x, y > 0$ và f đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ nên:

$$\begin{aligned} & f(3f(x) + 9f(y)) \\ &\geq f(3(x + 3y)) \stackrel{(12)}{\geq} 3f(x + 3y), \forall x, y > 0. \end{aligned}$$

Sử dụng đánh giá này ở (13) ta được:

$$f(3y + x) + 6f(y) + 2x \geq 3f(x + 3y),$$

với mọi $x, y > 0$. Suy ra

$$x + 3f(y) \geq f(3y + x), \forall x, y > 0.$$

Mặt khác theo (11) ta lại có $f(3y + x) \geq x + 3f(y), \forall x, y > 0$. Do đó:

$$f(3y + x) = x + 3f(y), \forall x, y > 0.$$

Đến đây thay x bởi $3x$ ta được:

$$f(3y + 3x) = 3x + 3f(y), \forall x, y > 0.$$

Trong đẳng thức trên hoán đổi vị trí của x và y cho nhau ta được:

$$3x + 3f(y) = 3y + 3f(x), \forall x, y > 0,$$

suy ra

$$f(x) - x = f(y) - y, \forall x, y > 0.$$

Nói cách khác,

$$f(x) = x + C, \forall x > 0.$$

Thay công thức trên vào (1) ta tìm được: $C = 0$.

3. Lời kết

Vậy là chúng ta đã cùng nhau đi qua bảy lời giải cho bài toán phương trình hàm trên. Trong số các lời giải này, có 3 cách sử dụng Nhận xét 2 và cũng có 3 cách lấy Nhận xét 1 làm ý tưởng chủ đạo, xen vào giữa là lời giải sử dụng một bổ đề rất mạnh thường dùng để giải quyết những bài toán phương trình hàm trên tập hợp số thực dương. Sẽ là tuyệt vời hơn nữa nếu số lượng lời giải cho bài toán này không chỉ dừng lại ở con số 7. Nói đến đây, tôi chợt nhớ đến lời khuyên từ một người thầy của tôi: “Làm toán không nhất thiết phải chạy theo số lượng bài tập, mà đôi khi chỉ cần hiểu sâu sắc một bài và dành thời gian đào sâu bản chất của bài toán đó.” Hy vọng rằng với những gì tôi chia sẻ trên đây sẽ góp phần giúp bạn

đọc tìm ra phương pháp học tập tốt nhất cho bản thân, đồng thời luôn nuôi giữ được niềm say mê Toán học của mình. Mọi góp ý cho bài viết này xin vui lòng gửi về email quangchv1234@gmail.com.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Tài Chung, Lê Hoàng Phò, *Chuyên khảo Phương trình hàm*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội: Hà Nội, 2016.

[2] Nguyễn Nhật Huy, Phạm Hoàng Sơn, “Khai thác một lớp các hệ thức đặc biệt khi giải phương trình hàm” trong *Các phương pháp giải toán qua các kỳ thi Olympic 2023*, Trần Nam Dũng. Vũng Tàu, 2023, tr.93 – 116.

[3] Group Facebook: *Hướng tới Olympic Toán VN*.

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Cuộc thẩm tra đặc biệt

Lần phát câu hỏi thứ nhất, tất cả các đối tượng đến từ băng Mèo Rừng đều được phát câu hỏi trên tấm bìa màu xanh, còn các đối tượng đến từ băng Báo Hoa đều được phát câu hỏi trên tấm bìa màu hồng. Vậy tổng số tấm bìa màu hồng bằng số tên cướp của băng Báo Hoa. Ta gọi số này là n .

Trong lần phát câu hỏi thứ hai, số các đối tượng đến từ băng Mèo Rừng nhận câu hỏi có màu hồng bằng số các đối tượng đến từ băng Báo Hoa nhận câu hỏi có màu xanh (vì băng băng n trừ đi số các đối tượng đến từ băng Báo Hoa nhận câu hỏi có màu hồng).

Có tất cả 10 đối tượng tuyên bố “lần này tôi nhận được câu hỏi in trên tấm bìa màu hồng”. 10 đối tượng này gồm những tên đến từ băng Mèo Rừng nhận tấm bìa màu hồng và những tên đến từ băng Báo Hoa nhận tấm bìa màu xanh. Suy ra có đúng $10 : 2 = 5$ đối tượng đến từ từ băng Mèo Rừng đã nhận được câu hỏi in trên tấm bìa màu hồng trong lần phát câu hỏi thứ hai.

Đố vui

Giả sử có thể trả được a xu bằng b đồng xu, bao gồm x đồng 1 xu, y đồng 2 xu, z đồng 5 xu, t đồng 1 hào, u đồng 2 hào, v đồng 5 hào và w đồng 1 đồng. Nghĩa là $x + y + z + t + u + v + w = b$ và

$$x + 2y + 5z + 10t + 20u + 50v + 100w = a.$$

Suy ra, bằng cách nhân cả hai vế của phương trình đầu với 100, ta được

$$100x + 100y + 100z + 100t + 100u + 100v + 100w = 100b.$$

Hay,

$$x \cdot 100 + 2y \cdot 50 + 5z \cdot 20 + 10t \cdot 10 + 20u \cdot 5 + 50v \cdot 2 + 100w \cdot 1 = 100b.$$

Điều này có nghĩa là có thể trả b đồng bằng $x + 2y + 5z + 10t + 20u + 50v + 100w = a$ đồng xu, gồm x đồng 1 đồng, $2y$ đồng 5 hào, $5z$ đồng 2 hào, $10t$ đồng 1 hào, $20u$ đồng 5 xu, $50v$ đồng 2 xu và $100w$ đồng 1 xu.



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục “Thách thức kỳ này” cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A , và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm LaTeX, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bài 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P781–P790: trước ngày 15/3/2024.

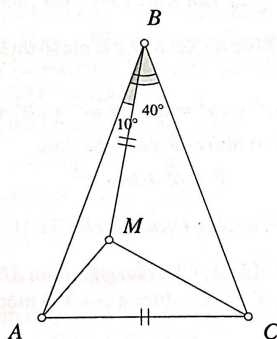
THÁCH THỨC KỲ NÀY

P781. (Mức B) Chuẩn bị quà tặng cho nhân viên dịp Tết Giáp Thìn hai doanh nghiệp A và B đến một cơ sở sản xuất rượu vang để mua hàng. Cơ sở này có 6 thùng rượu vang: Thùng 1 chứa 310 lít, thùng 2 chứa 200 lít, thùng 3 chứa 190 lít, thùng 4 chứa 180 lít, thùng 5 chứa 160 lít, thùng 6 chứa 150 lít. Doanh nghiệp A mua 2 thùng, doanh nghiệp B mua 3 thùng và số lượng mua gấp đôi số lượng mua của doanh nghiệp A . Theo bạn cơ sở sản xuất rượu vang còn lại thùng nào chưa bán? Mỗi doanh nghiệp đã mua bao nhiêu lít rượu vang?

Nguyễn Thanh Giang, Hưng Yên

P782. (Mức B) Cho tam giác ABC cân tại B có $\angle ABC = 40^\circ$. Gọi M là điểm nằm trong

tam giác sao cho $BM = AC$ và $\angle ABM = 10^\circ$. Tìm số đo của góc AMC .



Đỗ Thanh Sơn, Hà Nội

P783. (Mức B) Cho các số hữu tỷ a, b, c thoả mãn $(a+bc)(b+ac)(a+b) \neq 0$ và

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ac} = \frac{2}{a+b}.$$

Chứng minh rằng, $c^2 - 1$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Phạm Nhật Nguyệt, Hải Phòng

P784. (Mức B) Tồn tại hay không 2024 số nguyên tố lẻ đôi một phân biệt, sao cho tổng của 11 số bất kỳ trong 2024 số đó đều là hợp số?

Đỗ Khải Phương, Hà Nội

P785. (Mức B) Cho sáu số thực a, b, c, x, y, z thoả mãn $ax + by + cz = 0$ và

$$a^2 + b^2 + 1 = c^2.$$

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$.

Phạm Công Tài, Hà Nội

P786. (Mức B) Cho số nguyên dương $n \geq 4$ và n điểm phân biệt trên mặt phẳng, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Bạn Trung vẽ $n + 1$ đoạn thẳng, sao cho mỗi đoạn đều có cả hai đầu mút là các điểm đã cho. Chứng minh rằng, tồn tại 2 đoạn thẳng không có điểm chung.

Lê Văn Kiệt, Vĩnh Phúc (sưu tầm)

P787. (Mức A) Xét a, b, c là các số thực thoả mãn

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 = 6\sqrt{3} + ac^2 + cb^2 + ba^2.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

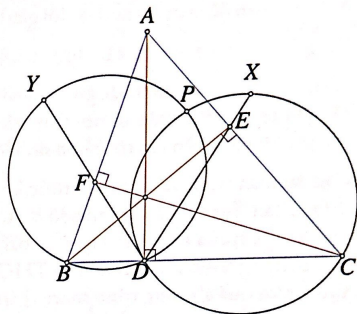
$$P = a^2 + b^2 + c^2.$$

Trần Công Diên, Tp. Hồ Chí Minh (st)

P788. (Mức A) Cho tam giác nhọn ABC , có AD, BE, CF là các đường cao. X là một điểm

di động trên tia DE , và Y là một điểm di động trên tia DF , sao cho X, Y không trùng D , và $DX = DY$. Giả sử các đường tròn (CDX) và (BDY) cắt nhau tại điểm thứ hai P , khác D . Chứng minh rằng, điểm P di động trên một đường thẳng cố định.

((XYZ) ký hiệu đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z .)



Lưu Công Đông, Hà Nội

P789. (Mức A) Trong mặt phẳng toạ độ, xét 100 điểm có toạ độ nguyên sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ là một số tự nhiên. Hỏi, có ít nhất bao nhiêu khoảng cách là số chẵn.

Tô Trung Hiếu, Nghệ An

P790. (Mức A) Tìm tất cả các số thực α có tính chất: Với mỗi số thực dương c , tồn tại số nguyên $n > 1$ sao cho

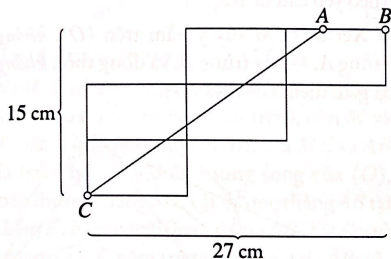
$$\frac{\phi(n!)}{n^\alpha(n-1)!} > c.$$

(Với mỗi số nguyên dương m , $\phi(m)$ là số các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m .)

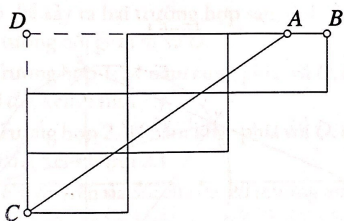
Nguyễn Cung Thành, Hà Nội

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P751. (Mức B) Người ta ghép năm hình chữ nhật bằng nhau với nhau, để được một hình dài 27cm và rộng 15cm, như ở hình vẽ dưới đây. Biết rằng, đoạn thẳng AC chia hình đó thành hai phần có diện tích bằng nhau. Hãy tính độ dài đoạn thẳng AB.



Lời giải (dựa theo cách giải của bạn Liêu Vĩ Hào, lớp 10T1, trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp).



Ta gọi mỗi hình chữ nhật, trong năm hình chữ nhật bằng nhau, là một hình chữ nhật con.

Gọi x (cm) là độ dài đoạn thẳng AB.

Lấy điểm D, như ở Hình trên.

Khi đó, theo hình vẽ ở bài ra,

$$CD = 15\text{ cm, và } AD = 27 - x \text{ (cm).} \quad (1)$$

Từ các giả thiết của bài ra, ta có:

Chiều rộng của mỗi hình chữ nhật con là:

$$15 : 3 = 5 \text{ (cm);}$$

Chiều dài của mỗi hình chữ nhật con là:

$$27 : 3 = 9 \text{ (cm).}$$

Do đó, diện tích của mỗi hình chữ nhật con là:

$$9 \cdot 5 = 45 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Suy ra, diện tích của tam giác vuông (tại D) CAD là:

$$(45 \cdot 5) : 2 + 45 = 157,5 \text{ (cm}^2\text{)}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được:

$$\frac{15 \cdot (27 - x)}{2} = 157,5.$$

Vì vậy

$$x = 27 - \frac{157,5 \cdot 2}{15} = 6.$$

Vậy, độ dài đoạn thẳng AB bằng 6cm.

Bình luận và Nhận xét

Hầu hết các lời giải Tập chỉ đã nhận được từ bạn đọc là lời giải đúng; tuy không ít lời giải khá rườm rà, dài dòng.

Hoàng Phúc

P752. (Mức B) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn:

$$x^2y + y^2z + z^2x = 1 \text{ và } xy^2 + yz^2 + zx^2 = 2.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$P = (x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2).$$

Lời giải (của bạn Phan Minh Huy, lớp 9/3, trường THCS Lý Tự Trọng, Tp. Tam Kỳ, tỉnh Quảng Nam, và bạn Nguyễn Chánh Thiện, lớp 9/12, trường THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh).

Với a, b, c là ba số thực tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned} & (a-b)(b-c)(c-a) \\ &= (ab^2 + bc^2 + ca^2) - (a^2b + b^2c + c^2a), \quad (1) \\ & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a). \quad (2) \end{aligned}$$

Áp dụng (1) cho $a = x, b = y, c = z$, với lưu ý tới giả thiết của bài ra, ta được:

$$(x-y)(y-z)(z-x) = 2 - 1 = 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} P &= (x^2 + xy + y^2)(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) \\ &= (x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + xy + y^2) \\ &\quad \times (y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2) \\ &= (x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(z^3 - x^3). \end{aligned}$$

Từ đó, áp dụng (1) cho $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, ta được:

$$\begin{aligned} P &= (x^3 y^6 + y^3 z^6 + z^3 x^6) \\ &\quad - (x^6 y^3 + y^6 z^3 + z^6 x^3). \end{aligned} \quad (3)$$

Lần lượt, áp dụng (2) cho $a = xy^2$, $b = yz^2$, $c = zx^2$, và cho $a = x^2 y$, $b = y^2 z$, $c = z^2 x$, ta được:

$$\begin{aligned} &x^3 y^6 + y^3 z^6 + z^3 x^6 \\ &= (xy^2 + yz^2 + zx^2)^3 - 3xyz(xy + yz + zx) \\ &\quad \times (yz + zx + xy), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &x^6 y^3 + y^6 z^3 + z^6 x^3 \\ &= (x^2 y + y^2 z + z^2 x)^3 - 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad \times (y^2 + z^2 + x^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5), với lưu ý tới giả thiết của bài ra, ta có:

$$P = 2^3 - 1^3 = 7.$$

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tập chí nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng. Tuy nhiên, ngoài lời giải của các bạn *Phan Minh Huy* và *Nguyễn Chánh Thiện*, tất cả các lời giải còn lại đều rất dài dòng, cồng kềnh, phức tạp.

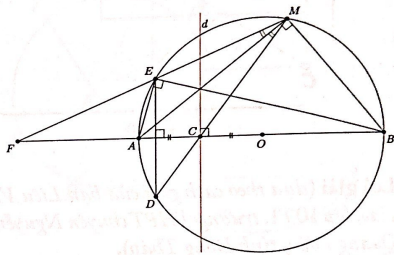
Hoàng Phúc

P753. (Mức B) Cho đường tròn (O) với đường kính $AB = 2R$. Gọi C là trung điểm của OA . M là một điểm nằm trên (O) . Đường thẳng MC cắt (O) tại điểm thứ hai D . Đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt (O) tại điểm thứ hai E . Đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại điểm F . Tìm vị trí của điểm M sao cho tổng $EF + MC$ có giá trị nhỏ nhất.

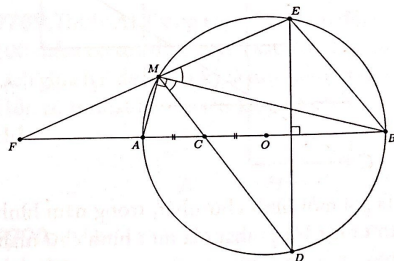
Lời giải (của người chấm bài).

• Trước hết, dễ thấy, nếu M trùng A , hoặc trùng B , hoặc là giao điểm của đường tròn (O) và đường trung trực d của AO , thì tổng $EF + MC$ không tồn tại, do không thể xác định được điểm F . Vì vậy, các vị trí vừa nêu trên của M không phải là các vị trí cần tìm theo yêu cầu đề bài.

• Xét điểm M tùy ý nằm trên (O) , không trùng A , không trùng B , và đồng thời, không là giao điểm của d và (O) .



Hình 1.



Hình 2.

Do AB là đường kính của (O) và $DE \perp AB$, nên D và E đối xứng với nhau qua AB . Do đó, A và B , tương ứng, là điểm chính giữa của cung EAD và của cung EBD . (1)

Lại do AB là đường kính của (O) , nên

$$\angle AMB = 90^\circ \text{ hay } MA \perp MB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra, MA và MB , tương ứng, là phân giác trong và phân giác ngoài của góc

FMC. Do đó

$$\frac{AC}{AF} = \frac{BC}{BF} = \frac{MC}{MF}; \quad (3)$$

suy ra, $\frac{BF}{AF} = \frac{BC}{AC}. \quad (4)$

Vì O là trung điểm AB , C là trung điểm OA , và $AB = 2R$, nên

$$AC = \frac{R}{2} \text{ và } BC = \frac{3R}{2}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra $BF = 3AF. \quad (6)$

Vì M, D nằm khác phía với AB , và E đối xứng với D qua AB (chứng minh trên), nên M và E nằm cùng phía đối với AB . Mà ME và AB là hai dây cung không song song của (O) , nên đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại điểm F , nằm ngoài đoạn thẳng AB . Từ đây và (6), suy ra, F nằm trên tia đối của tia AB , và

$$2R = AB = FB - FA = 2FA.$$

Vì vậy, $FA = R$ và $FB = 3R. \quad (7)$

Từ (3), (5), (7), suy ra $MC = \frac{1}{2}MF \quad (8)$

Có thể xảy ra hai trường hợp sau, đối với vị trí tương đối giữa M và O :

– Trường hợp 1: M nằm cùng phía với O , đối với d . (Xem Hình 1.)

– Trường hợp 2: M nằm khác phía với O , đối với d . (Xem Hình 2.)

Vì F nằm trên tia đối của tia AB (chứng minh trên), nên F nằm khác phía với O , đối với d . Từ định nghĩa của E , dễ thấy, E và M nằm khác phía nhau, đối với d .

Vì thế, ở trường hợp 1, F và E cùng nằm khác phía với M , đối với d ; ở trường hợp 2, F và M cùng nằm khác phía với E , đối với d .

Suy ra, ở trường hợp 1, E nằm giữa F và M ; ở trường hợp 2, M nằm giữa F và E .

Do đó:

– Với trường hợp 1, xét hai tam giác FAE và FMB , ta có:

$$\angle EFA = \angle BFM,$$

$$\angle FAE = \angle FMB \text{ (vì cùng bù với } \angle EAB).$$

Vì thế, $\triangle FAE \sim \triangle FMB$.

– Với trường hợp 2, xét hai tam giác FAM và FEB , ta có:

$$\angle MFA = \angle BFE,$$

$$\angle FAM = \angle FEB \text{ (vì cùng bù với } \angle MAB).$$

Vì thế, $\triangle FAM \sim \triangle FEB$.

Do vậy, trong cả hai trường hợp, ta đều có

$$\frac{FA}{FE} = \frac{FM}{FB}. \quad (9)$$

Từ (8), (9), (7), suy ra

$$\begin{aligned} EF \cdot MC &= FE \cdot \left(\frac{1}{2} FM \right) = \frac{1}{2} (FA \cdot FB) \\ &= \frac{3R^2}{2}. \end{aligned}$$

Do đó, theo bất đẳng thức trung bình cộng – trung bình nhân, ta có:

$$EF + MC \geq 2\sqrt{EF \cdot MC} = \sqrt{6}R;$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MC = \frac{\sqrt{6}R}{2}$.

Dễ thấy, khi $MC = \frac{\sqrt{6}R}{2}$ thì M không trùng A , không trùng B , và đồng thời, không là giao điểm của d và (O) .

Vì vậy, tổng $EF + MC$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (O) và đường tròn tâm C , bán kính $\frac{\sqrt{6}R}{2}$.

Ta có điều cần tìm theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Rất tiếc, tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải chưa đúng, do người giải bài hoặc chưa xét hết các cấu hình có thể, hoặc tuy xét hết nhưng xét sai một trong các cấu hình đó.

2. Bài toán dưới đây là một bài toán, mà người chấm bài khai thác được từ bài đã ra. Mời các bạn đọc có quan tâm cùng xem xét.

Bài toán đề xuất. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi C là trung điểm của OA . M là một điểm di động trên (O) , sao cho M không trùng với A, B , và giao điểm của (O) với đường thẳng vuông góc với AB tại C .

Đường thẳng MC cắt (O) tại điểm thứ hai D. Gọi E là điểm đối xứng với D qua AB. Các đường thẳng AE, BM cắt nhau tại F; các đường thẳng AM, BE cắt nhau tại G. Chứng minh rằng, đường thẳng FG đi qua một điểm cố định.

Hạ Vũ Anh

P754. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{b(c+a)}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+ab}+\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải (dựa theo đa số lời giải Tập chỉ đã nhận được từ bạn đọc).

Ký hiệu P là biểu thức ở vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2+bc} + \sqrt{a(b+c)} \\ & \leq \sqrt{(1+1)(a^2+bc+a(b+c))} \\ & = \sqrt{2(a+b)(a+c)}. \end{aligned}$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta thu được các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2+ca} + \sqrt{b(c+a)} & \leq \sqrt{2(b+c)(b+a)}, \\ \sqrt{c^2+ab} + \sqrt{c(a+b)} & \leq \sqrt{2(c+a)(c+b)}. \end{aligned}$$

Từ đó, do $a, b, c > 0$, suy ra

$$\begin{aligned} P & \geq \frac{b+c}{\sqrt{2(a+b)(a+c)}} + \frac{c+a}{\sqrt{2(b+c)(b+a)}} \\ & \quad + \frac{a+b}{\sqrt{2(c+a)(c+b)}} \\ & \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}} \\ & \quad \times \sqrt[3]{\frac{c+a}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}} \\ & = \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

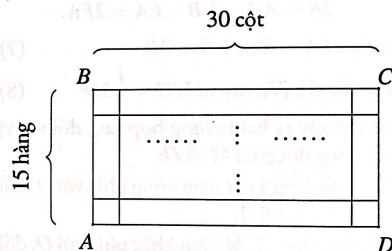
1. Từ lời giải trên, dễ thấy, dấu “=” ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Tất cả các lời giải Tập chỉ đã nhận được, từ bạn đọc, đều là lời giải đúng.

Võ Quốc Bá Cẩn

P755. (Mức B) Trong một hình chữ nhật có kích thước 10×5 , lấy 1351 điểm đôi một phân biệt tùy ý. Chứng minh rằng, tồn tại một hình tròn bán kính bằng chứa ít nhất 4 điểm trong số các điểm đã lấy.

Lời giải (dựa theo đa số lời giải Tập chỉ nhận được từ bạn đọc).



Gọi A, B, C, D là bốn đỉnh của hình chữ nhật cho trong đề bài (xem Hình vẽ).

Kẻ 14 đoạn thẳng song song, cách đều nhau, và cùng song song với AD, BC ; mỗi đoạn thẳng đều có một đầu mút nằm trên cạnh AB , và đầu mút còn lại nằm trên cạnh CD .

Tiếp theo, kẻ 29 đoạn thẳng song song, cách đều nhau, và cùng song song với AB, DC ; mỗi đoạn thẳng đều có một đầu mút nằm trên cạnh BC , và đầu mút còn lại nằm trên cạnh AD .

Các đoạn thẳng kẻ được đã biến hình chữ nhật $ABCD$ thành một bảng ô vuông, gồm 15 hàng và 30 cột, mà mỗi hàng, mỗi cột, đều có độ rộng bằng $\frac{1}{3}$ (vì $AB = 5, BC = 10$ (theo

giả thiết), và

$$5 : 15 = 10 : 30 = \frac{1}{3}.$$

Do đó, 1351 điểm đã lấy thuộc

$$15 \cdot 30 = 450$$

hình vuông cạnh $\frac{1}{3}$.

Theo nguyên lý Dirichlet, trong số các điểm đó, tồn tại ít nhất

$$\left\lfloor \frac{1351}{450} \right\rfloor + 1 = 4$$

điểm cùng thuộc một hình vuông, gọi là H , trong số các hình vuông ấy. (*)

Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông H , ta có:

$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{6} < \frac{1}{4}.$$

Vì thế, hình tròn có tâm là tâm của H và có bán kính bằng $\frac{1}{4}$ sẽ phủ kín H . Mà H chứa ít nhất bốn điểm trong số các điểm đã lấy (theo (*)), nên hình tròn này chứa ít nhất bốn điểm trong số các điểm đã lấy. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Trong số tất cả lời giải tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải sai, do người giải bài đã *ngộ nhận* rằng, có thể phân chia hình chữ nhật đã cho thành 400 hình

vuông cạnh $\frac{\sqrt{2}}{4}$, hoặc thành 450 hình vuông cạnh $\frac{1}{9}$.

2. Trong số các bạn đọc đã gửi lời giải tới Tạp chí, có một vài bạn sử dụng thuật ngữ chưa đúng, trong các lập luận của mình; chẳng hạn, “điểm được phủ trong hình” (*điểm đạt đúng phải là: “điểm được phủ bởi hình”*),

Nguyễn Khắc Minh

P756. (Mức B) Ta gọi số nguyên dương n là “số đẹp”, nếu trong 22 số: $5, n+5, 2n+5, \dots, 21n+5$, tồn tại một số có cùng số dư với

tích tất cả các số đó, trong phép chia cho 23. Hãy tìm tất cả các số đẹp.

Lời giải (dựa theo ý giải của các bạn: Đỗ Viết Hoàng Long, lớp 11A, trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước; và Đỗ Duy Quang, lớp 12T1, trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp).

Với mỗi số nguyên dương n , ký hiệu T_n là tích tất cả các số $5, n+5, 2n+5, \dots, 21n+5$.

Khi đó, theo đề bài, n là số đẹp, nếu trong 22 số $kn+5, k=0, 1, 2, \dots, 21$, có ít nhất một số có cùng số dư với T_n , trong phép chia cho 23.

Xét các trường hợp sau:

• Trường hợp 1: $n \equiv 0 \pmod{23}$.

Khi đó,

$$kn+5 \equiv 5 \pmod{23} \forall k = \overline{0, 21}. \quad (1)$$

Vì vậy, $T_n \equiv 5^{22} \pmod{23}$. (2)

Do 23 là số nguyên tố, và $(5, 23) = 1$, nên

$$5^{22} \equiv 1 \pmod{23} \quad (3)$$

(theo Định lý Fermat nhỏ).

Từ (2) và (3), suy ra $T_n \equiv 1 \pmod{23}$. (4)

Vì $5 \not\equiv 1$, nên (1) và (4) cho thấy số n trong trường hợp này *không* là số đẹp.

• Trường hợp 2: $1: n \not\equiv 0 \pmod{23}$.

Khi đó, do 23 là số nguyên tố, nên $(n, 23) = 1$.

Vì vậy, với $i, j \in \{0; 1; 2; \dots; 21\}$ và $i \neq j$, ta có:

$$in+5 \equiv jn+5 \pmod{23}$$

$$\Leftrightarrow (i-j)n \equiv 0 \pmod{23}$$

$$\Leftrightarrow i \equiv j \pmod{23} \Leftrightarrow i = j.$$

Do đó, tập hợp S các số dư, nhận được khi chia lần lượt 22 số $5, n+5, 2n+5, \dots, 21n+5$ cho 23, sẽ là tập hợp gồm 22 số tự nhiên đôi một khác nhau, trong phạm vi từ 0 đến 22. (5)

– Nếu n là số sao cho $0 \in S$ thì hiển nhiên n là số đẹp, vì khi đó, $T_n \equiv 0 \pmod{23}$.

– Xét n là số sao cho $0 \notin S$.

Khi đó, theo (5), S là tập hợp gồm 22 số nguyên dương đầu tiên. Vì thế, với lưu ý 23 là số nguyên tố, theo định lý Wilson, ta có:

$$T_n \equiv 22! \equiv -1 \equiv 22 \pmod{23}. \quad (6)$$

Vì $22 \in S$ nên (6) cho thấy n là một số đẹp.

Vậy, tóm lại, tất cả các số đẹp là tất cả các số nguyên dương không chia hết cho 23.

Bình luận và Nhận xét

1. Định lý Wilson được nhắc tới trong Lời giải trên là kết quả sau:

Định lý Wilson. Nếu p là số nguyên tố thì

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

2. Nếu chưa biết định lý Wilson, bạn đọc có thể chứng minh (6) bằng cách tính cụ thể $22!$.

3. Tất cả lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Lưu Thị Thanh Hà

P757. (Mức A) Với mỗi số nguyên dương n , ký hiệu a_n là nghiệm thực lớn nhất của phương trình

$$x^{2023} - nx^{2022} - nx^{2021} - \dots - nx + 1 = 0.$$

Xác định tất cả các số thực C , để

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > C \cdot n^2$$

với mọi số nguyên dương n .

Lời giải (dựa theo Đáp án của BBT Tập chí).

Xét số nguyên dương n tùy ý.

Với mọi số nguyên dương $k > 1$, đặt

$$P_k(x) = x^k - nx^{k-1} - nx^{k-2} - \dots - nx + 1.$$

Khi đó, phương trình đã nêu trong đề bài được viết thành

$$P_{2023}(x) = 0. \quad (1)$$

Với $x \geq n+1$, ta có:

$$\begin{aligned} P_k(x) &= x^{k-1}(x-n) - nx^{k-2} - \dots - nx + 1 \\ &\geq x^{k-1} - nx^{k-2} - \dots - nx + 1 = P_{k-1}(x), \end{aligned}$$

với mọi số nguyên dương $k > 2$.

Do đó, với $x \geq n+1$, ta có:

$$\begin{aligned} P_{2023}(x) &\geq P_{2022}(x) \geq P_{2021}(x) \geq \dots \geq P_2(x) \\ &= x^2 - nx + 1 = x(x-n) + 1 \\ &\geq x + 1 > 0. \end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned} P_{2023}(n) &= n^{2023} - n^{2023} - n^{2022} - \dots - n^2 + 1 < 0. \end{aligned}$$

Vì thế, phương trình (1) có nghiệm trong khoảng $(n, n+1)$ và vô nghiệm trong $[n, +\infty)$.

Do đó, vì là nghiệm thực lớn nhất của phương trình (1), nên $a_n \in (n, n+1)$.

Từ đây, do tính tùy ý của n , ta có

$$a_n \in (n, n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^2}.$$

Theo bài ra, ta cần tìm tất cả các số thực C , sao cho

$$s_n > C \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3)$$

Từ (2), suy ra

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i < s_n < \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n (i+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (4)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2n^2} < s_n \\ &< \frac{1}{n^2} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < s_n < \frac{1}{2} + \frac{3}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5) \end{aligned}$$

Để thấy, $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)_{n \geq 1}$, $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2n}\right)_{n \geq 1}$ là các dãy hội tụ, và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Vì vậy, từ (5), theo định lý kẹp, suy ra $(s_n)_{n \geq 1}$ là dãy hội tụ, và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

• Giả sử C là một số thực thỏa mãn (3).

Khi đó, do (6) nên $C \leq \frac{1}{2}$.

• Ngược lại, giả sử C là một số thực không vượt quá $\frac{1}{2}$.

Khi đó, theo (5), ta có:

$$s_n > \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} \geq C \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó, C là số thực thỏa mãn (3).

• Vậy, tất cả các số thực C thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $C \leq \frac{1}{2}$.

Bình luận và Nhận xét

Cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tập chí mới chỉ nhận được đúng một lời giải từ bạn đọc. Rất tiếc, lời giải này là một lời giải không đạt yêu cầu, do có một số khẳng định mang tính cốt yếu được nêu ra một cách cảm tính, không có bất cứ lý giải hay chứng minh nào.

Nguyễn Khắc Minh

P758. (Mức A) Tìm số thực k lớn nhất, sao cho

$$a + b + c - 3 \geq k(a - b)(b - c)(c - a)$$

với mọi số thực không âm a, b, c , thỏa mãn

$$ab + bc + ca = 3.$$

Lời giải (của người chấm bài).

Trong phần trình bày dưới đây, $\mathbb{R}^+$ ký hiệu tập các số thực không âm.

Giả sử k là số thực thỏa mãn yêu cầu đề bài; nghĩa là, với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$ab + bc + ca = 3, \quad (1)$$

đều có

$$a + b + c - 3 \geq k(a - b)(b - c)(c - a). \quad (2)$$

Bằng kiểm tra trực tiếp, ta thấy, các giá trị $a = 1, b = 3, c = 0$ là các số thực không âm, thỏa mãn (1). Vì vậy, theo (2), ta có:

$$1 + 3 + 0 - 3 \geq k(1 - 3)(3 - 0)(0 - 1);$$

$$\text{suy ra, } k \leq \frac{1}{6}. \quad (3)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $k = \frac{1}{6}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài; nghĩa là, ta sẽ chứng minh

$$a + b + c - 3 \geq \frac{1}{6}(a - b)(b - c)(c - a), \quad (4)$$

với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn (1).

Thật vậy, do $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn (1), nên $a + b + c > 0$. Vì thế, với lưu ý tới (1), ta có:

$$(4)$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 - 9 \geq \frac{(b - a)(b - c)(a - c)(a + b + c + 3)}{6}$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) \geq (b - a)(b - c)(a - c)$$

$$\times \frac{a + b + c + \sqrt{3(ab + bc + ca)}}{2(ab + bc + ca)}$$

$$\Leftrightarrow (b - a)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geq (b - a)(b - c)(a - c) \times \frac{a + b + c + \sqrt{3(ab + bc + ca)}}{ab + bc + ca}. \quad (5)$$

Do tính đối xứng vòng quanh, nên không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$.

– Nếu $a \geq b$, hoặc $a = c$, thì (5) hiển nhiên là một bất đẳng thức đúng.

– Xét $b > a > c \geq 0$.

Đặt $x = b - c$ và $y = a - c$; ta có $x > y > 0$,

và do đó

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{ab+bc+ca} \\ &= \frac{(a+b)^2+ac+bc}{(a+b)(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(ab+bc+ca)} + \frac{1}{a+b} \\ &\leq \frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)ab} + \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \\ &\leq \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3(ab+bc+ca)}}{ab+bc+ca} = \sqrt{\frac{3}{ab+bc+ca}} \\ & \leq \sqrt{\frac{3}{ab}} \leq \sqrt{\frac{3}{(a-c)(b-c)}} = \sqrt{\frac{3}{xy}}. \quad (7) \end{aligned}$$

Ký hiệu P, Q , tương ứng, là biểu thức ở vế phải và biểu thức ở vế trái của (5).

Do (6) và (7), với lưu ý $b-a = x-y$, ta có:

$$\begin{aligned} P &\leq xy(x-y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \sqrt{\frac{3}{xy}} \right) \\ &= (x-y) (x+y + \sqrt{3xy}) \\ &= x^2 - y^2 + \frac{(2\sqrt{xy})(\sqrt{3}(x-y))}{2} \\ &\leq x^2 - y^2 + \frac{4xy + 3(x-y)^2}{4} \\ &= \frac{7x^2 - 2xy - y^2}{4} \\ &= x^2 + y^2 + (x-y)^2 - \frac{(x-3y)^2}{4} \\ &\leq x^2 + y^2 + (x-y)^2 = Q. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức (5) được chứng minh, và vì thế, (4) được chứng minh. Từ đây và (3) suy ra, số thực k lớn nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là $k = \frac{1}{6}$.

Bình luận và Nhận xét

1. Chứng minh bất đẳng thức (4) với ràng

buộc (1) (theo ký hiệu ở Lời giải trên) là một bài toán khó. Vì thế, bài đã ra là một bài toán rất khó.

2. Tất cả các lời giải người chấm bài đã nhận được từ Ban biên tập Tạp chí đều là lời giải đúng; tuy nhiên, phần chứng minh bất đẳng thức (4) có quá nhiều các tính toán cồng kềnh, với độ phức tạp rất cao. Có cảm giác, người giải bài đã phải thực hiện các tính toán đó với sự trợ giúp của các phần mềm tính toán.

Vũ Quốc Bá Cẩn

P759. (Mức A) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AH, EF . Gọi P là điểm đối xứng với N qua BC . Chứng minh rằng

$$\angle BMP = \angle NMC.$$

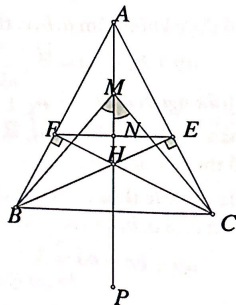
Lời giải (của người chấm bài).

Theo phát biểu của đề bài, ta hiểu E và F là hai điểm không trùng nhau. Vì thế, ta hiểu, tam giác ABC cho trong đề bài *không* vuông tại A . Phần trình bày dưới đây là lời giải cho bài ra với giả thiết đó.

Xét hai trường hợp sau:

• **Trường hợp 1:** Tam giác ABC cân tại A .

Trong trường hợp này, AH là đường trung trực của BC , và tất cả các điểm M, N, P đều thuộc AH (xem Hình 1). Vì thế, kết luận của bài ra hiển nhiên đúng.



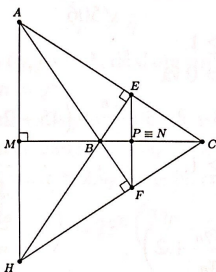
Hình 1.

• Trường hợp 2: Tam giác ABC không cân tại A.

Giả sử $AB < AC$; trường hợp $AB > AC$ được xét tương tự.

Xây ra hai trường hợp nhỏ sau:

◇ Trường hợp 2.1: $AH \parallel EF$. (Xem Hình 2.)



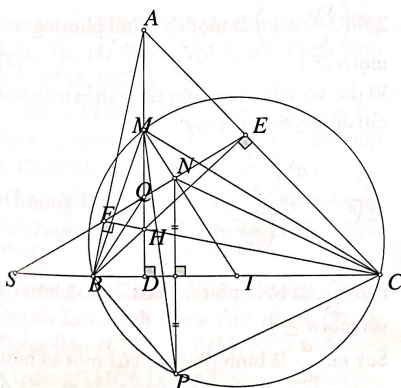
Hình 2.

Trong trường hợp này, các điểm M và N cùng thuộc BC; do đó, $P \equiv N$. Vì thế

$$\angle BMP = \angle NMC = 0^\circ$$

Kết luận của đề bài được chứng minh.

◇ Trường hợp 2.2: AH không song song EF. (Xem Hình 3.)



Hình 3.

Gọi I là trung điểm của BC; gọi S, Q lần lượt là giao điểm của các đường thẳng BC, AH với

đường thẳng EF.

Theo tính chất của tứ giác toàn phần, ta có M, N, I thẳng hàng, và

$$(SQ, EF) = -1.$$

Từ đó, do N là trung điểm của EF, nên

$$\overline{SQ} \cdot \overline{SN} = \overline{SE} \cdot \overline{SF}. \quad (1)$$

Từ định nghĩa các điểm E, F suy ra, bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC. Do đó

$$\overline{SB} \cdot \overline{SC} = \overline{SE} \cdot \overline{SF}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra, bốn điểm B, C, N, Q cùng thuộc một đường tròn. (3)

Từ định nghĩa điểm H, ta có $HE \perp EA$ và $HF \perp FA$. Do đó, bốn điểm A, H, E, F cùng thuộc đường tròn tâm M, đường kính AH. Vì thế, theo định lý Brokard, M là trực tâm tam giác BCQ; và do đó, Q là trực tâm tam giác BCM. Từ đây và (3), do tính đối xứng, ta được:

$$\begin{aligned} (MC; MB) &\equiv (QB; QC) \equiv (NB; NC) \\ &\equiv (PC; PB) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Do đó, bốn điểm B, C, M, P cùng thuộc một đường tròn. (4)

Dễ thấy, $\triangle BHA \sim \triangle BFE$; mà M, N tương ứng là trung điểm của HA, FE, nên $\triangle BMA \sim \triangle BNE$. Suy ra

$$\frac{BN}{BM} = \frac{BE}{BA}. \quad (5)$$

Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\frac{CN}{CM} = \frac{CF}{CA}. \quad (6)$$

Lại có $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ (dễ thấy), nên

$$\frac{BE}{BA} = \frac{CF}{CA}. \quad (7)$$

Do N và P đối xứng với nhau qua BC, nên $CP = CN$ và $BP = BN$ (8)

Từ (5), (6), (7), (8), suy ra

$$\frac{CP}{CM} = \frac{BP}{BM}. \quad (9)$$

Từ (4) và (9) suy ra, $BMCP$ là một tứ giác điều hòa. Mà MI là đường trung tuyến và MP là đường đối trung của tam giác MBC , nên

$$\angle BMP = \angle IMC = \angle NMC.$$

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Lời giải trên cho thấy, giả thiết tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) là một giả thiết không cần thiết.

2. Rất tiếc, tất cả các bạn đã gửi lời giải đến Tạp chí đều chỉ giải bài đã ra trong trường hợp tam giác ABC không cân tại A , và đồng thời AH không song song EF .

Hạ Vũ Anh

P760. (Mức A) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 4$ và

$$x_{n+1} = 45x_n + \sqrt{2024x_n^2 + 16}$$

với mọi số nguyên dương n .

Tìm tất cả các số nguyên a , sao cho

$a^n \left(\frac{x_{2n}}{x_n} + 2 \right)$ là số chính phương, với mọi số nguyên dương n .

Lời giải (dựa theo Đáp án của BBT Tạp chí).

Từ hệ thức xác định dãy (x_n) suy ra dãy đó là dãy tăng thực sự, $x_2 = 360$ và

$$x_n^2 - 90x_{n+1}x_n + x_{n+1}^2 - 16 = 0, \quad (1)$$

với mọi $n \geq 1$.

Trong (1), thay n bởi $n+1$, ta được:

$$x_{n+2}^2 - 90x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+1}^2 - 16 = 0, \quad (2)$$

với mọi $n \geq 1$.

Vì (x_n) là dãy tăng thực sự (chứng minh trên), nên $x_n \neq x_{n+2}$, với mọi $n \geq 1$. Do đó, từ (1) và (2) suy ra, với mọi $n \geq 1$, x_n và x_{n+2} là hai nghiệm của phương trình (ẩn x) sau:

$$x^2 - 90x_{n+1}x + x_{n+1}^2 - 16 = 0.$$

Vì thế, theo định lý Vi-et, ta có:

$$x_{n+2} = 90x_{n+1} - x_n, \quad (3)$$

với mọi $n \geq 1$.

Từ $x_1 = 4$, $x_2 = 360$ và (3), theo công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi tuyến tính cấp 2, ta được:

$$x_n = \frac{(45 + 2\sqrt{506})^n - (45 - 2\sqrt{506})^n}{\sqrt{506}},$$

với mọi $n \geq 1$.

Suy ra, $x_n > 0$ và

$$\frac{x_{2n}}{x_n} = (45 + 2\sqrt{506})^n + (45 - 2\sqrt{506})^n,$$

với mọi $n \geq 1$.

Nhận thấy

$$\begin{aligned} 23^n \left(\frac{x_{2n}}{x_n} + 2 \right) &= \left((23 + \sqrt{506})^n + (23 - \sqrt{506})^n \right)^2, \end{aligned}$$

với mọi $n \geq 1$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ đặt

$$y_n = (23 + \sqrt{506})^n + (23 - \sqrt{506})^n.$$

Để thấy, ta có $y_1 = 46$, $y_2 = 2070$, và

$$y_{n+2} = 46y_{n+1} - 23y_n \quad \forall n \geq 1.$$

Suy ra, $y_n \in \mathbb{Z}$ với mọi $n \geq 1$. Do đó,

$23^n \left(\frac{x_{2n}}{x_n} + 2 \right)$ là một số chính phương, với mọi $n \geq 1$. (4)

Vì thế, với a là số nguyên tùy ý thỏa mãn yêu cầu đề bài, do với mọi $n \geq 1$,

$$\frac{a^n}{23^n} = \frac{a^n \left(\frac{x_{2n}}{x_n} + 2 \right)}{23^n \left(\frac{x_{2n}}{x_n} + 2 \right)} \quad (\text{vì } x_n > 0 \quad \forall n \geq 1)$$

nen $\frac{a^n}{23^n}$ là bình phương của một số hữu tỷ, với mọi $n \geq 1$.

Suy ra, $\frac{a}{23}$ là bình phương của một số hữu tỷ. Do đó, $a \in \mathbb{N}$ và tồn tại $q, p \in \mathbb{N}, p \neq 0$ và $(q, p) = 1$, sao cho

$$\frac{a}{23} = \frac{q^2}{p^2}, \text{ hay } ap^2 = 23q^2. \quad (5)$$

Suy ra, $a = 0$, hoặc a là số nguyên dương lớn hơn 1, mà số mũ của số nguyên tố 23 trong phân tích chuẩn của a là một số lẻ. Do đó, $a = 0$, hoặc a là một số nguyên dương chia hết cho 23. Vì vậy, a là số tự nhiên có dạng $a = 23m$, với m là số tự nhiên. Từ đây và (5), suy ra

$$mp^2 = q^2.$$

Từ đó, do $(q, p) = 1$, dễ dàng suy ra $p = 1$, và vì thế, $m = q^2$.

Như vậy, nếu số nguyên a thỏa mãn yêu cầu đề bài thì a có dạng $a = 23q^2$, $q \in \mathbb{N}$.

Ngược lại, với $a = 23q^2$, $q \in \mathbb{N}$, ta có:

$$a^n \left(\frac{x_{2n}}{x_n} + 2 \right) = 23^n \left(\frac{x_{2n}}{x_n} + 2 \right) \cdot q^2,$$

với mọi $n \geq 1$.

Mà q^2 là số chính phương và $23^n \left(\frac{x_{2n}}{x_n} + 2 \right)$ là số chính phương với mọi $n \geq 1$ (theo (4)), nên $a^n \left(\frac{x_{2n}}{x_n} + 2 \right)$ là số chính phương với mọi $n \geq 1$.

Vậy, tất cả các số tự nhiên có dạng $23q^2$, $q \in \mathbb{N}$, là tất cả các số a thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Rất tiếc, đến thời điểm thảo luận vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được lời giải nào từ bạn đọc.

Lưu Thị Thanh Hà

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI ĐÚNG

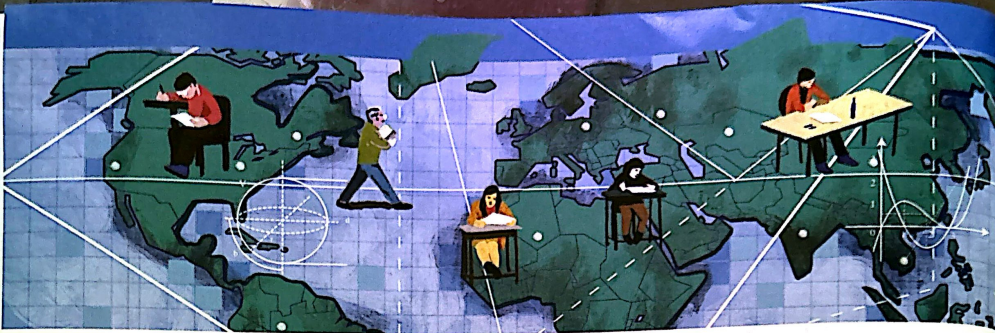
Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải đúng.

KHOÍ THCS

- Trường THCS Nguyễn Thái Bình, Tp. Cà Mau, tỉnh Cà Mau: Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình (lớp 9C; P751, P754, P755).
- Trường TH&THCS Archimedes Đông Anh, Tp. Hà Nội: Ngô Minh Chấn (lớp 9A3; P754, P755).
- Trường THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh: Nguyễn Chánh Thiện (lớp 9/12; P751, P752, P754).
- Trường THCS Mỹ Hưng, Tp. Nam Định, tỉnh Nam Định: Trần Tiến Dũng (lớp 9A1; P754).
- Trường THCS Hồ Xuân Hương, huyện Quỳnh Lưu, tỉnh Nghệ An: Phạm Quang Thắng (lớp 7C; P754, P755).
- Trường THCS Lý Tự Trọng, Tp. Tam Kỳ, tỉnh Quảng Nam: Phan Minh Huy (lớp 9/3; P752, P754).

KHOÍ THPT

- Trường THPT chuyên Quang Trung, tỉnh Bình Phước: Đỗ Viết Hoàng Long (lớp 11A; P756).
- Trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, tỉnh Đồng Tháp: Phạm Tiến Đạt (lớp 10T1; P754, P755), Liêu Vĩ Hào (lớp 10T1; P751, P754), Huỳnh Phúc Vĩnh Nguyên (lớp 10T1; P754), Đỗ Duy Quang (lớp 12T1; P751, P752, P754, P755, P756), Trần Thị Phương Thảo (lớp 10T1; P751, P755), Võ Hải Yến (lớp 11H; P751, P754).
- Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên: Nguyễn Tấn Nguyên Chương (lớp 11 Toán 1; P754), Huỳnh Trần Gia Huy (lớp 10 Toán 1; P758), Đặng Kỳ Nam (lớp 10 Toán 1; P751, P754).
- Trường THPT chuyên Lê Thánh Tông, tỉnh Quảng Nam: Nguyễn Hữu Hoàng Nhật (lớp 11/1; P754).
- Trường THPT chuyên Tiền Giang, tỉnh Tiền Giang: Nguyễn Nhật Minh (lớp 10 Toán 1; P751).



VỀ KỲ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN NĂM HỌC 2023-2024

TRẦN NAM DŨNG¹

Kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia năm học 2023 – 2024 đã diễn ra trong hai ngày 5, 6/1/2024. Bài viết giới thiệu đề thi môn Toán của kỳ thi năm nay cùng một số bình luận và nhận định của tác giả bài viết về đề thi này.

Đề thi năm nay có ưu điểm là đặt các vấn đề thú vị, không theo lối mòn, đặc biệt là không đi theo một mô-típ cũ suốt hơn mười năm nay là đề thi lúc nào cũng có hai bài hình. Điều này sẽ giúp cho việc dạy và học đều hơn, hướng đến cơ bản hơn, tránh bắt tù. Tuy vậy, đề thi cũng có những nhược điểm về cấu trúc, diễn đạt và sắp xếp làm giảm đi đáng kể những điểm tích cực. Trước khi đi đến những đánh giá chung, chúng ta đi chi tiết vào từng bài toán thi.

Bài 1: Với mỗi số thực x , ta gọi $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi:

$$a_n = \frac{1}{4^{[-\log_4 n]}}, \forall n \geq 1. \text{ Đặt } b_n = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{a_1 + a_2} \right), \forall n \geq 1.$$

a) Tìm một đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho $b_n = P\left(\frac{a_n}{n}\right), \forall n \geq 1.$

b) Chứng minh rằng tồn tại một dãy số nguyên dương $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tăng thực sự sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = \frac{2024}{2025}.$$

Bài toán này có định dạng khá lạ so với các bài toán dãy số trong các kỳ thi năm trước, một dãy số dưới dạng tổng đòi hỏi phân xử lý đại số trước. Mặc dù đã có hướng dẫn trước để đi đến công thức mẫu chốt

$$b_n = -\frac{1}{5} \left(\frac{a_n}{n} \right)^2 + \frac{a_n}{n}$$

nhưng đây vẫn là một ý không hề hiển nhiên. Ý thứ hai thì không khó đối với một học sinh (hoặc sinh viên) được học bài bản về giới hạn và về tập số thực, nhưng với các em học sinh chỉ vừa làm quen với giải tích thì quả là quá tầm.

Bài 2: Tìm tất cả các đa thức $P(x), Q(x)$ với hệ số thực sao cho với mỗi số thực a thì $P(a)$ là nghiệm của phương trình: $x^{2023} + Q(a) \cdot x^2 + (a^{2024} + a)x + a^3 + 2025a = 0.$

Đây là một bài phương trình hàm đa thức nhẹ nhàng, chủ yếu dựa vào sự chia hết, đồng dư đa thức.

Bài 3: Cho ABC là tam giác nhọn với tâm đường tròn ngoại tiếp O . Gọi A' là tâm của

¹ Trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TpHCM.

đường tròn đi qua C và tiếp xúc AB tại A , gọi B' là tâm của đường tròn đi qua A và tiếp xúc BC tại B , gọi C' là tâm đường tròn đi qua B và tiếp xúc CA tại C .

a) Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ lớn hơn hoặc bằng diện tích tam giác ABC .

b) Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các đường thẳng $A'B', B'C', C'A'$. Biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ lần lượt cắt lại các đường thẳng $A'B', B'C', C'A'$ tại các điểm X', Y', Z' ($X' \neq X, Y' \neq Y, Z' \neq Z$). Chứng minh rằng các đường thẳng AX', BY', CZ' đồng quy.

Bài toán hình học này khai thác một cấu hình khá thú vị, lời giải chủ yếu sử dụng phép biến đổi góc, tam giác đồng dạng. Bài này có hai ý khá độc lập nhưng đều có thể sử dụng chung phép đồng dạng (vị tự quay) biến ABC thành $A'B'C'$. Đây là năm thứ hai xuất hiện bất đẳng thức hình học và nội dung này vẫn tiếp tục gây khó khăn cho các thí sinh.

Bài 4: Người ta xếp k viên bi vào các ô của một bảng 2024×2024 ô vuông sao cho hai điều kiện sau được thỏa mãn: mỗi ô không có quá một viên bi và không có hai viên bi nào được xếp ở hai ô kề nhau (hai ô được gọi là kề nhau nếu chúng có chung một cạnh).

a) Cho $k = 2024$. Hãy chỉ ra một cách xếp thỏa mãn cả hai điều kiện trên mà khi chuyển bất kỳ viên bi đã được xếp nào sang một ô tùy ý kề với nó thì cách xếp mới không còn thỏa mãn cả hai điều kiện nêu trên.

b) Tìm giá trị k lớn nhất sao cho với mọi cách xếp k viên bi thỏa mãn hai điều kiện trên ta có thể chuyển một trong số các viên bi đã được xếp sang một ô kề với nó mà cách xếp mới vẫn không có hai viên bi nào được xếp ở hai ô kề nhau.

Bài 4 là một bài cực trị tổ hợp có câu a khá nhẹ nhàng, nhưng câu b là một ý khó, dù không sử dụng kiến thức gì cao siêu nhưng

tìm được k đã khó, chứng minh lại càng khó hơn (một cách tiếp cận tự nhiên cho các bài toán kiểu thế này là thay 2024 bằng một số nhỏ hơn để khảo sát).

Bài 5: Với mỗi đa thức $P(x)$, ta đặt

$$P_1(x) = P(x), \forall x \in \mathbb{R};$$

$$P_2(x) = P(P_1(x)), \forall x \in \mathbb{R};$$

...

$$P_{2024}(x) = P(P_{2023}(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho a là số thực lớn hơn 2. Tồn tại hay không một đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện: với mỗi $t \in (-a; a)$, phương trình $P_{2024}(x) = t$ có đúng 2^{2024} nghiệm thực phân biệt?

Bài toán này khai thác một chủ đề truyền thống về nghiệm của đa thức. Bài này là bài nhẹ nhàng nhất của ngày 2, chỉ cần bình tĩnh một chút sẽ thấy số 2024 không có ý nghĩa gì ở đây, có thể thay bằng n và từ đó thì sẽ nghĩ đến quy nạp. Với $n = 1$, một cách tự nhiên sẽ dẫn đến đa thức có dạng $x^2 - c$, với c là hằng số dương. Bài này khai thác một ý không mới, nhưng phù hợp để đặt ở vị trí Bài 5.

Bài 6: Với mỗi số nguyên dương n , gọi $\tau(n)$ là số các ước nguyên dương của n .

a) Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\tau(n) + 2023 = n$ với n là ẩn số.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương k sao cho có đúng hai số nguyên dương n thỏa mãn phương trình $\tau(kn) + 2023 = n$.

Bài số học này khai thác một số tính chất cơ bản của hàm $\tau(n)$ – số các ước số của số nguyên dương n . Bài này về ý tưởng thì nhẹ nhàng, phù hợp với một bài toán thi olympic, nhưng tính toán và xét trường hợp hơi phức tạp, nhất là trong bối cảnh thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Bài 7: Trong không gian, cho đa diện lồi D sao cho tại mỗi đỉnh của D có đúng một số

chấn các cạnh chứa đỉnh đó. Chọn ra một mặt F của D . Giả sử ta gán cho mỗi cạnh của D một số nguyên dương sao cho điều kiện sau được thỏa mãn: với mỗi mặt (khác mặt F) của D , tổng các số được gán với các cạnh của mặt đó là một số nguyên dương chia hết cho 2024. Chứng minh rằng tổng các số được gán với các cạnh của mặt F cũng là một số nguyên dương chia hết cho 2024.

Đây là bài tổ hợp có mô hình lý thuyết đồ thị. Với các thí sinh được học bài bản về lý thuyết đồ thị (đến mức có thể chuyển bài toán đề bài về bài toán đồ thị phẳng) thì Bài 7 này còn nhẹ nhàng hơn Bài 4. Nhưng ngược lại, nếu không được trang bị tốt thì chắc là cần bút, nhất là trong áp lực của phòng thi.

Để bạn đọc cảm nhận được rõ hơn về đề thi cùng hướng giải, chúng tôi sẽ đi chi tiết hơn vào các bước giải cho các bài toán thi.

Ở bài 1, sau một lúc để định thần ta sẽ thấy dãy a_n sẽ bắt đầu bởi 1 số 1, rồi 3 số 4, rồi 12 số 16 ... do $a_n = \frac{1}{4^{1-\log_4 n}}$ nên một cách tự nhiên, ta chọn s sao cho $4^s < n \leq 4^{s+1}$ thì $a_n = 4^{s+1}$. Từ đó sẽ tính được tổng

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= 1 + (4-1)4 + (16-4)4^2 + \dots + (n-4^s)4^{s+1} \\ &= 1 + 12 \cdot (4^0 + 4^2 + \dots + 4^{2s-2}) + (n-4^s)4^{s+1} \\ &= 1 + \frac{3(4^{2s} - 1)}{5} + (n-4^s)4^{s+1}. \end{aligned}$$

Thay 4^s bởi $\frac{a_n}{4}$ vào và chú ý là $\frac{1}{a_1 + a_2} = \frac{1}{5}$ ta sẽ biến đổi về được $b_n = -\frac{1}{5} \left(\frac{a_n}{n} \right)^2 + \frac{a_n}{n}$. Ở ý b), ta chỉ cần gọi α là nghiệm dương của phương trình $-\frac{x^2}{5} + x = \frac{2024}{2025}$ và chứng minh tồn tại dãy con của dãy $\frac{a_n}{n}$ dần về α . Với ý sau, chỉ cần dùng tính chất cơ bản sau đây về xấp xỉ: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[4^n \alpha]}{4^n} = \alpha$.

Ở bài 2, từ điều kiện đề bài ta suy ra $P(x)(P(x)^{2022} + Q(x)P(x) + x^{2024} + x) = -x(x^2 + 2025)$.

Từ đây $P(x)$ là ước của $x(x^2 + 2025)$. Nếu $P(x)$ chia hết cho x thì vế trái chia hết cho x^2 , còn vế phải thì không, mâu thuẫn. Nếu $P(x) = k(x^2 + 2025)$ thì thay vào, ta suy ra $k(x^{2024} + x) + x$ chia hết cho $x^2 + 2025$. Sử dụng sự kiện $x^{2024} \equiv 2025^{1012} \pmod{x^2 + 2025}$ ta sẽ suy ra ngay mâu thuẫn. Vậy chỉ còn lại trường hợp $P(x) = k$ với k là hằng số, thay vào tính được $Q(x)$ tương ứng.

Ở bài 3, ở câu a) ta có thể chứng minh $\triangle CA'O \sim \triangle CAB$, suy ra $\frac{S_{CA'O}}{S_{CAB}} = \left(\frac{CO}{CB} \right)^2 = \frac{R^2}{a^2}$, từ đó $S_{CA'O} = S_{COA'} = \frac{R^2}{a^2} \cdot S_{ABC}$. Cùng các hệ thức tương tự, suy ra $S_{A'B'C'} = S_{CA'O} + S_{A'OB'} + S_{B'OC'} = S_{ABC} \cdot R^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$. Cuối cùng, sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $a^2 + b^2 + c^2 \geq 9R^2$ là hoàn tất chứng minh. Ở câu b), ta chứng minh hai tam giác ABC và $X'Y'Z'$ có các cạnh tương ứng song song bằng cách chứng hạn AB và $X'Y'$ cùng vuông góc với OB' . Khi đó AX', BY', CZ' đồng quy tại tâm vị tự.

Với bài 4, ta gọi một cách xếp k viên bi là tốt nếu nó thỏa mãn hai điều kiện đề bài và một cách xếp là *tiếng* nếu nó tốt nhưng nếu di chuyển bất kỳ một viên bi nào sang ô kề với nó thì cách xếp không còn tốt. Ý a) là quá đơn giản vì ví dụ về đường chéo là rất hiển nhiên. Ở ý b) điểm khó của bài toán nằm ở chỗ nếu có cách xếp cứng với k viên bi thì chưa chắc đã có cách xếp cứng với $k+1$ viên bi. Ta cần tìm k_0 nhỏ nhất sao cho từ k_0 trở đi tồn tại cách xếp cứng. Được gợi ý bởi ý tưởng đường chéo, ta đưa ra thuật toán xây dựng cách xếp cứng cho mọi $k \geq 4046$ như sau. Đánh số các đường chéo song song với đường chéo chính là $D_1, D_2, \dots, D_{4047}$. Đầu tiên ta đặt đầy bi vào hai đường chéo D_{2022} và D_{2026} , cùng với hai viên bi ở đầu của đường chéo D_{2024} . Đây là một cách xếp cứng với $k = 4046$. Sau đó ta sẽ dùng các ô trên đường chéo chính D_{2024} để tăng số bi dần dần (hành lang tạo bởi D_{2022} và D_{2026} sẽ đảm bảo tính cứng của cách xếp), khi đây D_{2024}

rồi thì lại lấy bớt đi và thay bằng nguyên một đường chéo bên dưới (hay trên, cách 1) đường chéo có bi. Như thế ta sẽ xây dựng được các cách xếp cứng cho mọi k từ 4046 cho đến $2024^2/2$. Với $k > 2024^2/2$ thì dễ dàng chứng minh sẽ phải có 2 ô kề nhau, tức là không có cách xếp tốt. Để chứng minh $k = 4045$ là giá trị lớn nhất cần tìm gọi các ta tô màu các ô của hình vuông bằng hai màu đen trắng xen kẽ nhau. Ta lần lượt chứng minh các sự kiện sau i) một cách xếp cứng sẽ chỉ có các viên bi trên các ô cùng một màu ii) Nếu một cách xếp cứng có ít nhất 4045 viên bi thì nó có ít nhất 4046 viên bi. Ở ý i) ta dùng phản chứng và nguyên lý cực hạn (xét hai đường chéo đen, trắng chứa bi gần nhau nhất), khi đó bi đứng đầu hàng của đường chéo ngắn hơn sẽ di chuyển được. Ở ý ii), ta cũng sử dụng nguyên lý cực hạn, chọn ra đường chéo có chỉ số nhỏ nhất và lớn nhất có bi rồi chứng minh rằng toàn bộ các ô của 2 đường chéo này đều có bi. Tiếp theo, ta phải cố gắng xử lý kỹ thuật, “tránh” trường hợp toàn bộ đường chéo đều có bi ở câu a). Câu a) là một gợi ý quan trọng cho việc “tránh” này.

Ở bài 5, một cách tự nhiên ta nghĩ đến quy nạp. Điểm mấu chốt ở đây là ta phải làm mạnh mẽ đề lên thành $P_n(x)$ có 2^n nghiệm phân biệt thuộc $(-a, a)$ (lúc đó mới sử dụng giả thiết quy nạp được). Với $n = 1$, do tính đối xứng ta sẽ chọn $P(x) = P_1(x) = x^2 - c$. Để phương trình $P_1(x) = t$ có đúng 2 nghiệm thực với mọi số thực $t \in (-a, a)$ ta sẽ cần có $c > a$ và để hai nghiệm này thuộc $(-a, a)$ ta cần có $c < a^2 - a$. Vì $a > 2$ nên chọn được c như vậy. Đến đây thì mọi việc dễ dàng rồi: $P_{k+1}(x) = 0 \Leftrightarrow P_k(P(x)) = 0$. Vì phương trình $P_k(x) = 0$ có 2^k nghiệm phân biệt thuộc $(-a, a)$ và ứng với mỗi nghiệm x_i ấy phương trình $P(x) = x_i$ lại có 2 nghiệm phân biệt dạng $\pm \sqrt{x_i + c}$ nên dễ dàng suy ra phương trình $P_{k+1}(x)$ có 2^{k+1} nghiệm phân biệt.

Ở bài 6, ý tưởng đầu tiên là sử dụng đánh giá $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$ để chặn n . Bất đẳng thức này có thể chứng minh dễ dàng dựa vào nhận xét sơ đẳng: các ước số của n chia thành các nhóm (a, b) với $ab = n$. Từ đó áp dụng vào bài toán, ta suy ra được đánh giá $n < 2115$. Từ đây suy ra $2025 < n < 2115$ và như vậy n không chính phương, suy ra $\tau(n)$ chẵn, suy ra n lẻ. Dùng công thức tính $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$ với $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ ta chứng minh được nếu n lẻ và $2025 < n < 2115$ thì $\tau(n) \leq 18$ (chú ý do $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 > 2115$ nên $r \leq 4$). Từ đây tiếp tục chặn được n chặt hơn, thử các trường hợp ta đi đến kết luận không tồn tại n sao cho $\tau(n) + 2023 = n$. Với ý b), ý tưởng cơ bản là chọn k nguyên tố đủ lớn, khi đó thì $\tau(kn) \leq \tau(k)\tau(n) \leq 4\sqrt{n}$ từ đó cũng chặn được $n \leq 2211$. Tương tự như ở trên, ta cũng đánh giá được $\tau(n) \leq 18$. Lúc này do chọn k nguyên tố lớn nên $(k, n) = 1$ và $\tau(kn) = \tau(k)\tau(n) = 2\tau(n)$. Vì n không chính phương, $\tau(n)$ chẵn nên $n \equiv 3 \pmod{4}$, từ đó thử từng trường hợp n từ 2027 đến 2059 (cách 4) ta tìm được đúng 2 nghiệm là 2027 và 2031.

Ở bài 7, đầu tiên ta chuyển mô hình đa diện thành mô hình đồ thị phẳng. Điều này có thể thực hiện bằng cách chiếu các đỉnh của đồ thị lên một mặt cầu nằm trong đa diện rồi dùng phép nghịch đảo có tâm P (không trùng các đỉnh) nằm trên mặt cầu biến mặt cầu thành mặt phẳng. Sau đó ta xét đồ thị đối ngẫu của đồ thị phẳng, có đỉnh là các miền và hai miền có cạnh chung được sẽ được nối với nhau bởi một cạnh. Từ điều kiện đề bài suy ra đồ thị đối ngẫu cũng là đồ thị phẳng có các miền là các chu trình chẵn, từ đó chứng minh được mọi chu trình của nó đều chẵn, suy ra nó lưỡng phân, như vậy có thể tô màu các đỉnh bằng hai màu xanh, đỏ sao cho hai đỉnh kề nhau không cùng màu. Ngược trở lại với bài toán ban đầu, ta có thể tô màu các mặt của đa diện sao cho các mặt kề nhau không cùng màu. Đến đây thì mọi việc đơn giản. Giả sử

F được tô màu xanh. Xét S_1 là tổng các số viết trên các cạnh kề với mặt xanh khác F và S_2 là tổng các số viết trên các cạnh kề với mặt đỏ. Vì mỗi cạnh không kề với F sẽ xuất hiện trong cả hai tổng S_1 và S_2 đúng 1 lần còn mỗi cạnh kề F xuất hiện trong S_2 một lần nhưng không xuất hiện trong F_1 . Từ đó tổng các số viết trên các cạnh kề với F bằng $S_2 - S_1$. Vì mỗi cạnh chỉ kề với đúng một mặt xanh và một mặt đỏ nên S_2 chẳng qua là tổng các số trên các mặt đỏ và S_1 là tổng các số trên các mặt xanh khác F . Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Đề thi năm nay được đánh giá là khó, có nhiều bất ngờ gây ... sốc. Ở ngày thứ nhất, với bốn bài toán và bảy ý cần có sự sắp xếp và chọn lựa phù hợp hơn. Bài số 1 nên là một bài nhẹ nhàng, chân phương thay vì những thách thức. Bài 1 luôn là bài tạo tâm lý tốt (hay xấu) cho học sinh trong cả cuộc thi. Trước đây có một số năm cũng có Bài 1 "sát thủ" (như các năm 1997, 2010) và kết quả là năm đó học sinh làm bài kém hơn thường lệ, dù tổng thể đề không khó hơn. Vì ngày thứ nhất có đến bốn bài nên cũng nên cân nhắc về độ khó của các bài toán. So sánh giữa 5 điểm của Bài 4 với 6 điểm của Bài 5 thì thấy rõ sự khác biệt.

Ngoài vấn đề về độ khó, đề thi năm nay còn có một số điểm thiếu hợp lý. Thứ nhất, đó là chọn chủ đề, hai bài toán đại số của đề thi đều thuộc chủ đề đa thức (đó là chưa kể Bài 1a cũng sử dụng từ đa thức). Đại số là phân môn có các chủ đề đa dạng nhất (đa thức, phương trình hàm, phương trình-hệ

phương trình, bất đẳng thức, tổng và tích ...) và sở trường của các thí sinh ở mỗi phần cũng khác nhau nên đề thi không nên chọn trùng lặp. Thứ hai, trong đề thi năm nay, chủ đề tổ hợp xuất hiện trong hai bài. Điều này là tốt theo ý nghĩa sẽ khuyến khích học tổ hợp thay vì lâu nay luyện hình học hơi sâu. Nhưng vì hai bài này đều đặt ở vị trí cuối cùng của mỗi ngày nên chắc là sẽ rất ít học sinh đụng tới (vì về mặt tâm lý, gặp tổ hợp học sinh đã ngại, lại là bài cuối nên bỏ luôn). Đúng ra, nên chọn một bài dễ hơn (hoặc lấy Bài 7 nhưng phát biểu chân phương hơn) để đặt lên vị trí đầu (Bài 1 hoặc Bài 5). Như năm 2012 có hai bài tổ hợp thì Bài 5 nhẹ nhàng và chân phương, mang tính khuyến khích rất cao.



Em Tạ Đức Anh, học sinh lớp 12 trường THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, là thủ khoa của kỳ thi.

GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày với các bạn lời giải các bài toán trong kỳ thi Olympic toán vùng Trung Mỹ và Caribe năm 2023 đăng trong số báo 11/2023.



OC55. Tìm tất cả các cách tô màu các số nguyên dương sao cho điều kiện sau thỏa mãn:

- Mỗi số có màu xanh hoặc đỏ;
- Tổng của hai số (không nhất thiết phân biệt) cùng màu bất kỳ có màu xanh.

Lời giải. Từ điều kiện bài toán ta suy ra tất cả các số chẵn có màu xanh. Hơn nữa nếu $2k+1$ là số lẻ đầu tiên có màu xanh thì tất cả các số lẻ tiếp theo đều có màu xanh do là tổng của 2 số màu xanh:

$$\begin{aligned} 2k+3 &= (2k+1) + 2, 2k+5 \\ &= (2k+1) + 4, \dots \end{aligned}$$

Như vậy cách tô màu thỏa mãn đầu bài có một trong hai dạng như sau:

- Tất cả các số chẵn tô màu xanh, tất cả các số lẻ tô màu đỏ.

- Các số lẻ $1, 3, \dots, 2k-1$ ($k \geq 1$) tô màu đỏ, tất cả các số còn lại tô màu xanh.

Có thể dễ dàng kiểm tra các cách tô này đều thỏa mãn điều kiện đầu bài.

OC56. Octavio viết một số nguyên dương n lên bảng và sau đó anh bắt đầu một quá trình trong đó, ở mỗi bước, anh xóa số nguyên k

được viết trên bảng và thay thế nó bằng một trong các số sau:

$$3k-1, \quad 2k+1, \quad \frac{k}{2},$$

với điều kiện số mới viết là số nguyên.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , Octavio có thể viết lên bảng số 3^{2023} sau hữu hạn bước.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n . Ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 1: Nếu k lẻ, từ k ta có thể nhận được $3k$. Thật vậy

$$k \rightarrow 3k-1 \rightarrow \frac{3k-1}{2} \rightarrow 2\frac{3k-1}{2} + 1 = 3k.$$

Nhận xét 2: Từ số k ta có thể nhận được $3k+1$. Thật vậy

$$\begin{aligned} k &\rightarrow 2k+1 \rightarrow 3(2k+1)-1 = 6k+2 \\ &\rightarrow \frac{6k+2}{2} = 3k+1. \end{aligned}$$

Theo Nhận xét 1, xuất phát từ số 1 ta sẽ nhận được số 3^{2023} , tức là khẳng định đúng với $n=1$. Giả sử khẳng định đúng với mọi số $k < n$, ta chứng minh nó cũng đúng với n .

Nếu n chẵn, ta viết được $\frac{n}{2}$ và áp dụng giả thiết quy nạp, ta có điều cần chứng minh. Với n lẻ, ta viết được $3n-1$ và $3n+1$ (theo Nhận xét 2). Chú ý rằng trong hai số chẵn liên tiếp $3n-1$ và $3n+1$ phải có ít nhất một số chia hết cho 4, như vậy ta sẽ viết được một số nhỏ hơn n là $\frac{3n-1}{4}$ hoặc $\frac{3n+1}{4}$. Từ đó áp dụng quy nạp ta có điều phải chứng minh.

OC57. Trong một cái ao có n ($n \geq 3$) hòn đá xếp thành vòng tròn. Một công chúa muốn đánh số những hòn đá với các số $1, 2, \dots, n$ theo thứ tự nào đó rồi đặt một số con cóc lên những hòn đá. Sau khi đặt tất cả các con cóc vào vị trí, chúng bắt đầu nhảy theo quy tắc sau: khi một con cóc đến hòn đá có đánh số k , nó đợi k phút rồi nhảy sang hòn đá liền kề theo chiều kim đồng hồ.

Hỏi số lượng cóc nhiều nhất là bao nhiêu để công chúa có thể đánh số các hòn đá và đặt các con cóc sao cho không bao giờ có hai con cóc ở trên cùng một hòn đá trong thời gian từ một phút trở lên?

Lời giải. Ta nói hai con cóc gặp nhau nếu chúng ở trên cùng một hòn đá trong thời gian từ một phút trở lên. Ký hiệu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là số của các hòn đá lần lượt theo chiều kim đồng hồ. Chúng ta coi các chỉ số modulo n , tức là $a_{n+i} \equiv a_i$.

Trước tiên ta chứng minh nhận xét sau: Giả sử có các con cóc trên hòn đá số a_l và a_k , khi đó chúng sẽ không bao giờ gặp nhau nếu và chỉ nếu $a_l + a_{l+1} + \dots + a_{k-1} \geq a_m$ với mọi $1 \leq m \leq n$.

Chứng minh: Giả sử hai con cóc không bao giờ gặp nhau. Nếu tồn tại m để $a_l + a_{l+1} + \dots + a_{k-1} < a_m$ thì

$$a_l + a_{l+1} + \dots + a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + \dots + a_{m-1} < a_k + a_{k+1} + \dots + a_{m-1} + a_m.$$

Như vậy hai con cóc sẽ gặp nhau tại hòn đá a_m sau $a_l + a_{l+1} + \dots + a_{m-1}$ phút và dẫn đến mâu thuẫn.

Chiều ngược lại giả sử $a_l + a_{l+1} + \dots + a_{k-1} \geq a_m$ với mọi $1 \leq m \leq n$. Nếu hai con cóc gặp nhau tại hòn đá a_m thì ta có $a_l + \dots + a_{k-1} + a_k + \dots + a_{m-1} < a_k + \dots + a_{m-1} + a_m$ và điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Ta sẽ chứng minh số lượng cóc nhiều nhất có thể là $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Thật vậy, nếu công chúa đặt $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ con cóc. Với mỗi con cóc ở hòn đá a_i ta xét hòn đá a_{i+1} . Phải có ít nhất 2 giá trị i mà hòn đá a_{i+1} cũng có cóc vì nếu trái lại thì có ít nhất $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ hòn đá trống và điều này mâu thuẫn vì dẫn đến số cóc bé hơn $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Ta suy ra phải có số $a_i < n$ mà trên cả hai hòn đá a_i và a_{i+1} đều có cóc. Như vậy, theo nhận xét trên thì hai con cóc trên đó sẽ gặp nhau tại hòn đá có số n , điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Bây giờ giả sử có $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ con cóc. Công chúa đánh số các hòn đá lần lượt theo chiều kim

đồng hồ như sau:

$$n, 1, n-1, 2, n-2, \dots, k, n-k, \dots$$

Nếu công chúa đặt các con cóc vào hòn đá số n và các hòn số $k < \frac{n}{2}$ thì điều kiện trong nhận xét thỏa mãn và các con cóc không bao giờ gặp nhau. Như vậy số lượng cóc nhiều nhất có thể xếp là $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc các bài toán chọn lọc trong kỳ thi Olympic toán học trẻ của Hàn Quốc năm 2023. Các bài toán này phù hợp với trình độ học sinh lớp 8 – 10.

OC64. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$y^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

OC65. Cho $n (n \geq 5)$ là một số nguyên dương. Có n viên đá trắng và n viên đá đen (tổng cộng $2n$ viên) xếp thành một hàng trong đó n viên đầu tiên có màu trắng và n viên tiếp theo có màu đen.



Ta có thể thực hiện thao tác sau: chọn một số nguyên dương bất kỳ $k (k \leq 2n - 5)$ và đổi chỗ viên đá ở vị trí thứ k với viên đá ở vị trí thứ $(k+5)$.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho chúng ta có thể làm cho n viên đá đầu tiên có màu đen và n viên đá tiếp theo có màu trắng sau một số hữu hạn lần thao tác.

OC66. Có 2023 tay vợt tham gia một giải đấu quần vợt theo thể thức vòng tròn, hai tay vợt bất kỳ đấu với nhau đúng một trận. Biết rằng không có trận hòa và không có tay vợt nào thắng tất cả các tay vợt khác. Ta gọi tay vợt A là “có kỹ năng” nếu với mỗi tay vợt B thắng A , có một tay vợt C thắng B và thua A . Biết rằng có đúng $N (N \geq 0)$ tay vợt “có kỹ năng”. Tìm giá trị nhỏ nhất của N .



TÍNH SỐ PI: XƯA VÀ NAY

Phần II: Tính số Pi - từ thế kỷ XVII đến nay

TẠ DUY PHUONG¹, NGUYỄN HOÀNG VŨ²

Lời dẫn

Số π chắc chắn là hằng số nổi tiếng và hấp dẫn nhất trong Toán học.

Cái tên “Pi Day–Ngày π ” lần đầu tiên được đề nghị bởi nhà Vật lý Larry Shaw, vào ngày 14 tháng Ba năm 1988 ở Bảo tàng Exploratorium, trung tâm San Francisco, vì 3,14 là giá trị gần đúng của số π , nó cũng trùng với ngày sinh của Albert Einstein (14 – 3 – 1879). Kể từ đó, rất nhiều người yêu toán trên thế giới cứ đến 14 tháng 3 lại tập trung kỷ niệm hằng số này và qua đó thể hiện tình yêu với toán học.

Phần 1 (Tập chí Pi, tập 7, tháng 3 – 2023) đã giới thiệu Lịch sử tính số Pi cho tới thế kỷ XVII với phương pháp tính chủ yếu nhờ thuật toán nhân đôi số cạnh của đa giác đều nội ngoại tiếp hình tròn của Archimedes. Phần 2 tiếp tục giới thiệu cách tính gần đúng số Pi nhờ các công thức khai triển số π dưới dạng chuỗi và trên máy tính, chủ yếu từ thế kỷ XVII cho tới nay.

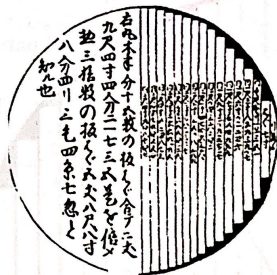
Tính gần đúng số Pi dưới dạng chuỗi

Madhava (1340 – 1425), nhà toán học Ấn Độ, là người đầu tiên sử dụng công thức

chuỗi vô hạn dưới đây để tính số π :

$$\pi = \sqrt{12} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1) \cdot 3^{k-1}}. \quad (1)$$

Công thức (1) cũng được Leibniz, nhà toán học Đức tìm ra vào năm 1676. Công thức (1) sau này được gọi là *chuỗi Madhava – Leibniz*.



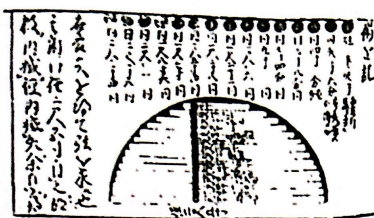
Hình 1: Kazayuki.

Trong hai cuốn sách của ba nhà toán học Nhật Bản, Sawaguchi Kazayuki (1670, Hình 1), Machinag và Ohashi (1687, Hình 2) đã đưa ra công thức (2) tính số π

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \sum_{j=1}^n \sqrt{n^2 - j^2}. \quad (2)$$

¹ Viện Toán học.

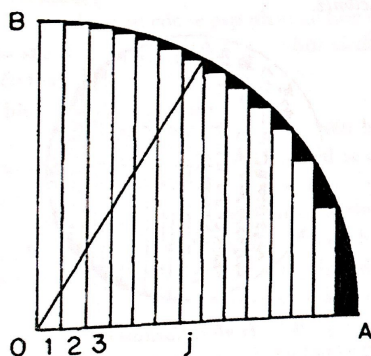
² Hà Nội.



Hình 2: Machinag và Obashi (1687).

Giải thích công thức (2): Chia $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính $OA = OB = 1$ thành n dải rộng bằng nhau. Vì (Hình 3) mỗi dải chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{1}{n}$ và chiều dài bằng (theo Định lý Pythagoras) $\sqrt{1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2}$ nên diện tích của dải chữ nhật thứ j bằng

$$S_j = \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2} = \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2 - j^2}.$$



Hình 3.

Tổng diện tích các hình chữ nhật bằng

$$S_n = \sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sqrt{n^2 - j^2}.$$

Khi $n \rightarrow \infty$ thì S_n tiến tới diện tích ($= \frac{\pi}{4}$) của $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính 1. Suy ra công thức (2).

Về mặt lý thuyết, theo công thức (2), người Nhật có thể tính gần đúng số π với độ chính xác bất kỳ khi chọn số n đủ lớn. Tuy nhiên, chuỗi này hội tụ rất chậm vì phải khai căn, giống như trong phương pháp của Archimedes hoặc công thức của François Viète (xem [1]).

Chưa có cơ sở để khẳng định người Nhật đã thực sự sử dụng công thức (2) để tính gần đúng số π . Tuy nhiên, John Wallis đã tiếp cận tương tự: Vì $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm O bán kính bằng 1 trong góc phần tư thứ nhất có phương trình $y = \sqrt{1 - x^2}$ và có diện tích bằng $\frac{\pi}{4}$ nên theo ngôn ngữ tích phân hiện đại:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

John Wallis trong cuốn *Arithmetica infinitorum* (1655) đã rất vất vả để tìm ra công thức mà bây giờ được gọi là *tích Wallis* hay *tích vô hạn*:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \quad (3)$$

Ngày nay, nhờ kỹ thuật tính tích phân từng phần, học sinh lớp 12 cũng có thể chứng minh được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} \frac{\pi}{2}$$

và

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}.$$

Lấy giới hạn hai vế khi $m \rightarrow \infty$, và vì giới hạn của vế trái của chúng bằng nhau, nên giới hạn của vế phải bằng nhau và ta suy ra công thức Wallis (3).

Công thức Wallis là một cột mốc quan trọng trong lịch sử tính số π : Wallis là người đầu tiên trong lịch sử tìm ra chuỗi vô hạn chỉ gồm

các phép tính đơn giản, không có căn bậc hai gây khó khăn khi tính toán bằng số như trong các công thức của Archimedes hoặc Viète.

Vào những năm 1660, nhà khoa học người Anh Isaac Newton và nhà toán học người Đức Gottfried Wilhelm Leibniz đã xây dựng phép toán vi phân (calculus), dẫn tới phát hiện rất nhiều chuỗi vô hạn cho phép tính số π .

James Gregory vào năm 1672 và Leibniz vào năm 1674, độc lập nhau, đã đưa ra công thức (ngày nay được gọi là công thức Gregory - Leibniz) tính $\arctan$ của t , $0 \leq t \leq 1$:

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \dots \quad (4)$$

Giải thích: Ta có

$$\arctan t = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Vì $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots$ nên

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^t (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx \\ &= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Suy ra công thức Gregory - Leibniz (4).

Cho $t = 1$ ta có

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Tuy nhiên, chuỗi này hội tụ rất chậm, thí dụ, cần phải tính hơn 300 số hạng để nhận được số π chính xác đến hai chữ số thập phân, và số gần đúng này không chính xác bằng $3\frac{1}{7}$, giá trị mà Archimedes đã nhận được hơn 2000 năm trước.

Vì vậy, cần xem xét công thức (4) tỉ mỉ hơn.

Năm 1699, nhà toán học người Anh Abraham Sharp đã dùng chuỗi Gregory -

Leibniz (4) với $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ để tính số π chính xác đến 71 chữ số:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} &= \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \dots \right) \quad (5) \end{aligned}$$

Kỷ lục này phá vỡ kỷ lục tính gần đúng số π đến 39 chữ số được thiết lập nhờ thuật toán Archimedes và cho thấy sức mạnh của Giải tích.

Năm 1719, nhà toán học người Pháp de Lagny đã tính gần đúng số π đến 127 chữ số thập phân (có 100 chữ số chính xác) nhờ chuỗi Sharp (5).

Năm 1706, John Machin (1680 - 1752) sử dụng mẹo sau đây để tăng tốc độ hội tụ của chuỗi Gregory - Leibniz (4): Với $\tan \beta = \frac{1}{5}$ ta có

$$\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{5}{12}$$

và

$$\tan 4\beta = \frac{2 \tan 2\beta}{1 - \tan^2 2\beta} = \frac{120}{119}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \tan \left(4\beta - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\tan 4\beta - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan 4\beta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} \\ &= \frac{1}{239}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\arctan \frac{1}{239} = 4\beta - \frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}.$$

Áp dụng công thức (4) ta được

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \\ &= 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right). \quad (6) \end{aligned}$$

Vì 239 là đủ lớn, nên $\arctan \frac{1}{239}$ là số đủ nhỏ. Hơn nữa, do các số hạng liên tiếp trong phân tích chuỗi $\arctan \frac{1}{5}$ chỉ chênh nhau một đại lượng $\frac{1}{5^2} = 0,04$ nên có thể dễ dàng tính bằng tay $\arctan \frac{1}{5}$. Từ nhận xét này, John Machin đã tính bằng tay xấp xỉ số π đến 100 chữ số.

Dưới đây là một số công thức được Euler (1707 – 1783) phát hiện và trình bày trong cuốn sách *Introductio in Analysin infinitorum* (1748).

Từ công thức đã được Newton chứng minh

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

Euler đặt $x^2 = y$ và xét phương trình

$$\sin x = 0 \quad (7)$$

như phương trình bậc vô hạn, ta có (với $y \neq 0$):

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \dots = 0. \quad (8)$$

Nghiệm của phương trình (7) là $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$. Do đó nghiệm của (8) là $\pi^2, (2\pi)^2, \dots$.

Theo tính chất của phương trình bậc vô hạn, tổng nghịch đảo của các nghiệm của (8) ngược dấu hệ số của y , tức là

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots = \frac{1}{3!}$$

hay

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (9)$$

Lưu ý rằng Jacques Bernoulli (và cả Leibniz) tuy chứng minh được sự hội tụ của chuỗi (9), nhưng đã không tính được tổng này.

Tương tự cho $\cos x$, Euler tính được

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad (10)$$

Nhân (10) với 2 và trừ cho (9), ta được

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Euler đã dùng công thức

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \dots$$

để tính logarithm của π .

Euler cũng đã chứng minh công thức

$$\arctan \frac{1}{p} = \arctan \frac{1}{p+q} + \arctan \frac{q}{p^2+pq+1}$$

Cho $p = q = 1$ ta được

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.$$

Tính $\arctan \frac{1}{7}$ và $\arctan \frac{3}{79}$ trong công thức

$$\pi = 20 \arctan \frac{1}{7} + 8 \arctan \frac{3}{79}$$

theo công thức hội tụ nhanh

$$\arctan x = \frac{y}{x} \left(1 + \frac{2}{3}y + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}y^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}y^3 + \dots \right)$$

với $y = \frac{x^2}{1+x^2}$, Euler đã tính gần đúng số π đến 20 chữ số trong vòng 1 giờ.

Trên đây chỉ là một số trong rất nhiều công thức của Euler tính gần đúng số π theo chuỗi.

Tài liệu tham khảo

- [1] Tạ Duy Phương, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Mai Văn Thu, Nguyễn Hoàng Vũ, Tính số Pi: Xưa và Nay, Phần 1: Tính số Pi: Xưa, Tạp chí Pi, Tập 7, số 3, 2023.
- [2] Petr Beckmann, *A History of π (Pi)*, St. Martin's Press, New York, in lần thứ ba, 1974.
- [3] Lennart Berggren, Jonathan Borwein, Peter Borwein, *Pi: A Source Book* (Second Edition), Springer, 2000.
- [4] Một số tư liệu trên Internet.

VỀ OLGA ALEXANDROVNA LADYZHENSKEYA

M. I. VISHIK¹

(Người dịch: Phạm Triều Dương)

Lần đầu tiên tôi gặp Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya vào năm 1945, và chúng tôi nhanh chóng trở nên bạn bè thân thiết. Lúc đó cô ấy là sinh viên năm thứ ba tại Trường Đại học Tổng hợp Quốc gia Matxcova. Chúng tôi thường gặp nhau tại các buổi seminar, và chúng tôi đã thảo luận các vấn đề toán học khi đi bộ dọc theo những hành lang rộng của Khoa Toán – Cơ trong trường Tổng hợp.



Người hướng dẫn khoa học của cô tại Trường Đại học Tổng hợp Quốc gia Moscow là Ivan Georgievich Petrovsky. Năm 1946, Israel Moiseevich Gelfand đã tổ chức một

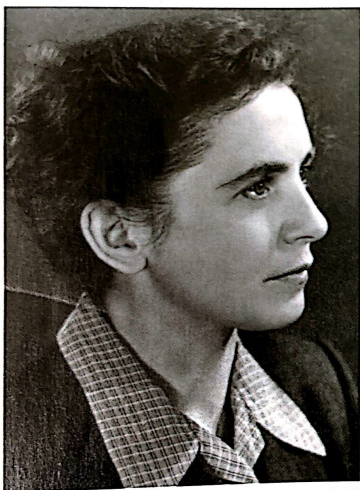
buổi seminar cho ba nhà toán học trẻ: O. A. Ladyzhenskaya, O. A. Oleinik và tôi. Kết quả là mỗi người tham gia buổi seminar đã nhận được một bài toán thú vị để làm việc một cách nghiêm túc. O. A. Ladyzhenskaya nhận được bài toán mô tả miền xác định của toán tử elliptic cấp hai với các điều kiện biên Dirichlet và với vế phải thuộc $L_2(\Omega)$. Cô đã chứng minh được rằng nếu bài toán giá trị biên này có nghiệm duy nhất thì toán tử elliptic là một đẳng cấu giữa không gian Sobolev $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ và $L_2(\Omega)$. Cô cũng đã tìm thấy một đánh giá cho chuẩn của toán tử nghịch đảo tương ứng.

Vào cuối những năm 1940, Olga chuyển đến Leningrad, và bắt đầu làm nghiên cứu sinh dưới sự hướng dẫn của Vladimir Ivanovich Smirnov, người rất ngưỡng mộ tài năng của cô. Olga luôn tham gia một cách tích cực các buổi seminar của thầy giáo hướng dẫn. Về sau Olga trở thành người dẫn dắt các buổi seminar này. Thịnh thoảng Olga cũng đã tổ chức các hội nghị về các phương trình vi phân và ứng dụng của chúng. Những hội nghị như vậy từng rất phổ biến vào thời đó. Nhiều nhà toán học từ các trường đại học khác ở Liên Xô cũng thường tham gia những hội nghị này.

Ở Leningrad, Olga kết hôn với Andrey Alekseevich Kiselev, một người trông rất giống Pierre Bezukhov, nhân vật trong tiểu thuyết *Chiến tranh và hòa bình* của Leo Tolstoy. Vợ chồng tôi thường đến thăm họ khi chúng tôi ở Leningrad. Chúng tôi đã

¹ Bài đã đăng tại *Notices of AMS*, 2004: Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922 – 2004), Volume 51, Number 11 (ams.org).

chứng kiến Andrey luôn thể hiện sự dịu dàng và yêu thương đối với người vợ yêu dấu của mình. Cô thực sự có ý nghĩa như cả thế giới đối với anh ấy. Tuy nhiên, say này họ đã ly thân. Andrey muốn có con, nhưng Olga thì không. Cô lý giải cho quyết định của mình bằng mong muốn cống hiến cuộc đời mình chỉ cho toán học, và do đó con cái có thể trở thành trở ngại đối với niềm say mê này. Vì vậy, Olga đã sống độc thân trong suốt quãng đời còn lại của mình.



Trong nhiều năm bắt đầu từ cuối những năm 1940, Olga đã nhiều lần đến thăm gia đình chúng tôi, và đôi khi thậm chí còn ở lại với chúng tôi. Cô ấy thường quan tâm tới những ý tưởng toán học mới mà tôi đã thực hiện trong suốt mùa hè, và cô ấy, đến lượt mình, kể với tôi về những thành tựu mới của riêng mình. Chúng tôi cũng thường thảo luận với cô về những vấn đề toán học hấp dẫn và thời sự; những sự kết nối giữa giải tích hàm và lý thuyết phương trình vi phân, và về nhiều

điều khác nữa. Ladyzhenskaya và tôi đã công bố một bài viết về những vấn đề này trên Uspekhi Matematicheskikh Nauk.

Năm 1953, tại Đại học Tổng hợp Quốc gia Moscow, Olga đã bảo vệ thành công luận án Tiến sỹ khoa học của mình dành cho vấn đề về tính chính quy của các nghiệm của một bài toán biên hỗn hợp đối với một phương trình hyperbolic tổng quát cấp 2. Cô đã tìm thấy điều kiện khá tối ưu đảm bảo cho các nghiệm của các phương trình này là nghiệm theo nghĩa cổ điển. Olga đã lý giải được phương pháp Fourier trong việc giải bài toán biên dạng hyperbolic. Hơn nữa, cô đã nghiên cứu cả việc ứng dụng phương pháp biến đổi Laplace đối những phương trình này.

Vào những năm năm mươi và sáu mươi, Olga thường báo cáo tại các seminar của Ivan Georgievich Petrovsky tại Trường Đại học Tổng hợp Quốc gia Matxcova. Tôi còn nhớ lại rất nhiều người nghe đã có ấn tượng mạnh mẽ như thế nào bởi phép chứng minh định lý duy nhất đối với nghiệm của bài toán giá trị biên ban đầu cho hệ phương trình Navier–Stokes hai chiều. Do định lý tồn tại đối với những phương trình này đã được chứng minh trước đó, tính đặt đúng của bài toán biên chính đối với hệ Navier–Stokes hai chiều đã được thiết lập nhờ kết quả đáng chú ý của Olga. Định lý duy nhất đối với hệ Navier–Stokes ba chiều cho đến nay vẫn chưa được chứng minh. Olga đã dành cuốn sách của mình² về động lực học chất lỏng cho ba người mà cô kính trọng nhất, cha cô, Vladimir Ivanovich Smirnov, và Jean Leray. Trong cuốn sách này cô đã nghiên cứu rất chi tiết nhiều vấn đề liên quan đến các hệ Navier–Stokes dừng và không dừng.

Cộng tác với Nina Nikolaevna Uraltseva, Olga đã viết một cuốn sách³ về các phương

² O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gostekhizdat, Moscow, 1961; English transl., Gordon and Breach, New York-London, 1963.

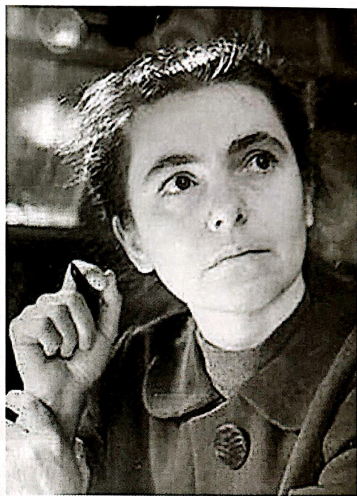
³ O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type*, Nauka, Moscow, 1964 (2nd. ed.), 1973; English transl., Academic Press, New York-London, 1968.

trình elliptic tuyến tính và tựa tuyến tính. Nhiều kết quả cơ bản đã nhận được trong cuốn sách này, một công trình cho đến nay vẫn là một bộ bách khoa toàn thư thực sự về chủ đề nghiên cứu. Trong những năm 1960, Olga Alexandrovna, Nina Nikolaevna Ural'tseva, và Vsevolod Alekseevich Solonnikov đã viết một cuốn sách⁴ về phương trình parabolic tuyến tính và tựa tuyến tính. Olga Alexandrovna cũng là tác giả của cuốn sách⁵ về tập hút của nửa nhóm và các phương trình tiến hóa. Cuốn sách này được biên soạn dựa trên một khoá giảng mà Olga Alexandrovna đã dạy ở các trường đại học khác nhau tại Ý, được biết với tên gọi *Lezioni Lincei*. Olga Alexandrovna là một người rất có học thức và người có văn hóa cao. Nữ thi sỹ Nga nổi tiếng, Anna Akhmatova, người biết rất rõ Ladyzhenskaya, đã viết một bài thơ dành tặng riêng cô.



Olga Ladyzhenskaya với người chông của bà, Andrey Kiselev.

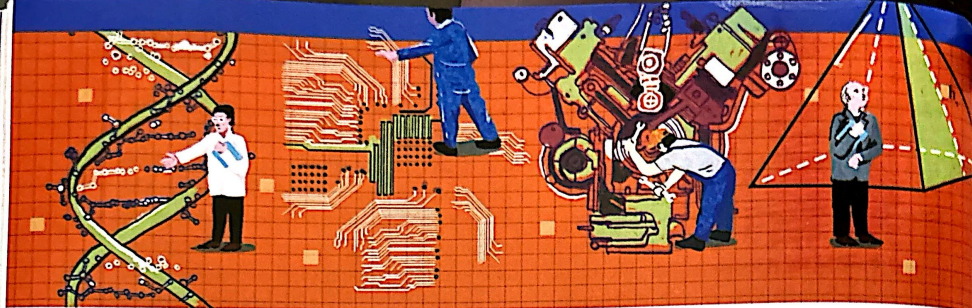
Olga từng là uỷ viên của Hội đồng Nhân dân thành phố. Cô đã giúp đỡ rất nhiều các nhà toán học ở Leningrad để nhận được căn hộ riêng (miễn phí) cho gia đình của họ. Khi còn ở Viện Toán học Steklov ở Leningrad, lúc cởi áo khoác ngoài tại phòng để mũ áo, tôi có nói đùa với người phục vụ phòng để mũ áo rằng tôi sẽ chuẩn bị đưa luôn Olga về hẳn Matxcova với tôi, và tôi đã nhận được một câu trả lời nghiêm trang: “Chúng tôi sẽ không bao giờ rời bỏ Olga Alexandrovna của chúng tôi!”



Olga là một phụ nữ có niềm tin tôn giáo rất sâu sắc. Bà đã cống hiến cả cuộc đời mình cho toán học, hy sinh cả hạnh phúc của chính mình. Và bây giờ, chúng ta có thể nói một cách chắc chắn rằng Ladyzhenskaya đã trở thành một “hình tượng cổ điển” của khoa học Toán học.

⁴O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Nauka, Moscow, 1967; English transl., *Translations of Mathematical Monographs*, 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

⁵O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for Semigroups and Evolution Equations*, *Lezioni Lincei*, 1988, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1991.



CÔNG THỨC LEAVITT VÀ PHÉP ĐO KHOẢNG CÁCH TỚI NHỮNG VÌ SAO

NGUYỄN HOÀNG VŨ¹



Hình 1. Ngay cả một điểm tương đương với một chấm nhỏ trên bầu trời trong mắt thường khi chụp bằng các kính thiên văn hiện đại cũng cho thấy rất nhiều các thiên hà và ngôi sao. Các vật thể này có vị trí thế nào trong bản đồ của vũ trụ vẫn luôn là một bài toán quan trọng của ngành thiên văn học.

Mỗi khi nhìn lên bầu trời với vô số các vì sao, bạn có từng đặt ra câu hỏi những ngôi sao này cách chúng ta bao xa? Đã từ lâu, cùng với việc quan sát những vì sao trên bầu trời, người ta cũng tìm nhiều cách khác nhau để đo khoảng cách từ chúng đến Trái Đất. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng tìm

hiểu về phương pháp đo khoảng cách được nhà thiên văn học Henrietta Leavitt tìm ra vào đầu thế kỷ 20 sử dụng biểu đồ log, cùng những ảnh hưởng sâu sắc của công thức này đến sự phát triển của thiên văn học hiện đại.

1. Leavitt và mối quan hệ chu kỳ – độ sáng

Henrietta Swan Leavitt sinh năm 1868 trong một gia đình trung lưu ở bang Massachusetts, Mỹ. Bà được gia đình cho theo học đại học cho đến khi tốt nghiệp năm 24 tuổi. Sau đó, Leavitt làm việc tình nguyện ở đài thiên văn Havard để có cơ hội học lên cao hơn.

Giám đốc đài thiên văn Havard lúc đó là Edward Pickering, người đã điều hành đài thiên văn từ năm 1876 khi mới 30 tuổi. Những nhân viên dưới quyền Pickering thường là các phụ nữ đảm nhiệm các công việc lặp đi lặp lại như xử lý dữ liệu từ các kính thiên văn cũng như tiến hành tính toán. Những người phụ nữ làm công việc này lúc đó được gọi là các “computer” (trước khi từ này được dùng để chỉ máy tính điện tử). Tiền lương của họ cũng chỉ ngang với lương cơ bản: 25 xu/giờ. Do lương thấp cùng sự đòi hỏi tính nhẫn nại và tỉ mỉ trong lao động nam giới thường không làm các công việc này. Tất nhiên là Pickering cũng không hề

¹ Hà Nội.

có vấn đề gì khi nhận thêm một “computer” miễn phí như Leavitt.



Hình 2. Những “computer” ở Harvard dưới thời Pickering. Leavitt ngồi ở vị trí thứ 3 từ bên trái.

Dưới sự phân công của Pickering, Leavitt tiến hành xử lý những tấm phim ghi hình các ngôi sao được chụp qua kính viễn vọng. Trong cùng một thời gian phơi sáng, những ngôi sao sáng hơn sẽ để lại các đốm to hơn trên một tấm phim, tức là làm cho nhiều hạt trên phim bị tối đi hơn. Thông qua một kính lúp, Leavitt so sánh mỗi ngôi sao quan sát được với độ sáng của các ngôi sao đã biết và ghi lại các kết quả vào một cuốn sổ.

Một công việc Leavitt thường xuyên phải làm là tìm kiếm các ngôi sao biến quang, chúng có độ sáng lên xuống theo chu kỳ, có thể kéo dài vài ngày, vài năm hoặc thậm chí vài tháng. Để xác định các ngôi sao này, người ta cần lấy hai tấm phim chụp cùng một vùng bầu trời ở hai thời điểm khác nhau, một tấm là phim dương bản còn một tấm là phim âm bản. Khi chồng khớp lên, nhau, những ngôi sao có độ sáng không đổi sẽ triệt tiêu, chỉ còn lại những ngôi sao mà độ sáng ở hai thời điểm là khác nhau. Sau khi các ngôi sao này được phát hiện, nhiều tấm phim hơn chụp cùng vị trí bầu trời ở các thời điểm khác sẽ được lấy ra đo đạc để xác định chu kỳ.

Leavitt cần mẫn thực hiện công việc với các sao biến quang cho đến năm 1896. Sau khi đi sang châu Âu hai năm, bà trở lại Boston,

và mang theo bản thảo nghiên cứu của mình về Beloit, bang Wisconsin. Trong khi cha của Leavitt làm mục sư ở đây thì bà trở thành trợ giảng nghệ thuật tại Beloit College. Năm 1902, Leavitt liên lạc lại với Pickering và muốn tiếp tục công việc liên quan đến thiên văn học.



Hình 3. Các đám mây Magellan quan sát từ Trái Đất. Ngày nay người ta đã biết chúng là hai thiên hà vệ tinh của dải Ngân hà của chúng ta.

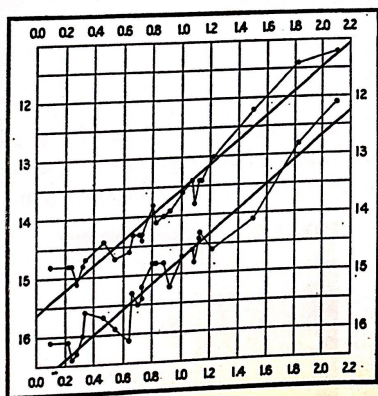
Vào mùa xuân năm 1904, Leavitt bắt đầu phát hiện các ngôi sao biến quang nằm trong đám mây Magellan nhỏ. Tiếp theo đó, nhiều ngôi sao biến quang khác cũng được bà phát hiện. Đến năm 1908, riêng một mình Leavitt đã phát hiện được tổng cộng 1777 sao biến quang ở hai đám mây Magellan. Không chỉ có thế, bà còn đưa ra một nhận định rất quan trọng từ dữ liệu của 16 ngôi sao trong số đó: các ngôi sao sáng hơn sẽ có chu kỳ dài hơn.



Henrietta Swan Leavitt (1868 – 1921).

Để tìm ra quy luật chi tiết hơn, cỡ mẫu 16 ngôi sao là không đủ nhưng công việc lại bị gián đoạn do Leavitt gặp nhiều vấn đề về sức khỏe cũng như việc cha của bà qua đời năm 1910. Mãi một thời gian sau, Leavitt mới có thể tập trung trở lại cho việc phân tích số liệu về các sao biến quang.

Năm 1912, các kết quả của Leavitt được công bố kèm trong bài báo của Pickering. Biểu đồ dữ liệu của 25 ngôi sao cho thấy độ sáng trung bình quan sát được của chúng tỷ lệ thuận với $\log$ của chu kỳ. Các ngôi sao càng sáng sẽ có chu kỳ càng dài. Đồng thời, các ngôi sao này ở cùng trong một đám mây Magellan nên khoảng cách từ chúng đến Trái Đất sẽ xấp xỉ như nhau. Điều đó mở ra khả năng ta có thể xác định được độ sáng thực của một ngôi sao chỉ với chu kỳ của nó rồi so sánh với độ sáng quan sát được tại Trái Đất để ước lượng khoảng cách (độ sáng quan sát được của một ngôi sao tại các điểm khác nhau trong vũ trụ sẽ tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách).



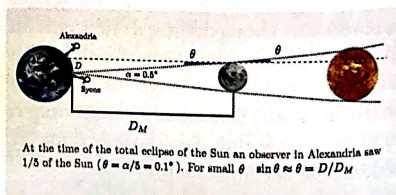
Hình 4. Biểu đồ của Leavitt cho thấy độ sáng quan sát được của các sao biến quang trong đám mây Magellan (trục thẳng đứng) tỷ lệ với $\log$ của chu kỳ của chúng.

Không phải ngôi sao nào cũng có độ sáng thay đổi theo chu kỳ. Những ngôi sao tuân

theo quy luật mà Leavitt nêu ra còn được gọi là các sao Cepheid. Chúng được phát hiện lần đầu năm 1784 trong chòm sao Cepheus bởi nhà thiên văn học nghiệp dư John Goodricke. Vấn đề còn lại để công thức của Leavitt có thể sử dụng được chính là việc tính các hệ số của nó từ các ngôi sao mà ta có thể xác định được khoảng cách theo năm ánh sáng.

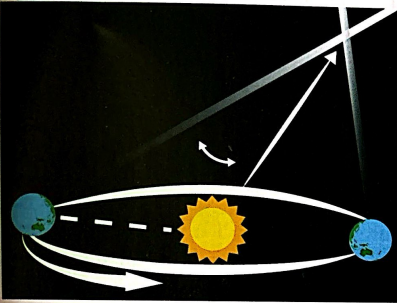
Trong hình học, khi biết độ lớn của một cạnh trong tam giác và độ lớn của hai góc kề cạnh này, ta có thể tính được độ dài của hai cạnh còn lại. Đây chính là cơ sở của phương pháp thị sai trong thiên văn học. Theo đó, người ta quan sát cùng một vật thể trên bầu trời tại hai địa điểm khác nhau vào cùng một thời điểm và đo góc quan sát so với mặt đất tại hai địa điểm này. Nếu biết khoảng cách giữa hai địa điểm, ta có thể tính được khoảng cách từ mỗi điểm đến vật thể.

Vào thế kỷ thứ hai trước Công nguyên, nhà toán học Hipparchus đã dùng phương pháp thị sai để tính khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trăng. Vào cùng một thời điểm, nhật thực toàn phần xảy ra ở thành phố Heliopolis, trong khi ở Alexandria, Mặt Trăng chỉ che đi 4/5 đường kính Mặt Trời. Từ ví dụ của hai thành phố, Hipparchus tính ra rằng khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trăng gấp khoảng 30 lần đường kính Trái Đất, rất gần với kết quả đo được bằng tín hiệu radar ngày nay. Vào thế kỷ 18, người ta cũng đo khoảng cách đến sao Kim một cách tương tự khi nó đi ngang qua trước Mặt Trời.



Hình 5. Phương pháp thị sai mà Hipparchus đã dùng để đo khoảng cách tới Mặt Trăng.

Với những vật thể ở khoảng cách xa hơn, phương pháp thị sai dạng như trên không khả thi do bị giới hạn bởi độ chính xác của phép đo góc. Để giải quyết việc này, người ta tiến hành đo góc từ cùng một vị trí trên Trái Đất tới cùng một vật thể trên bầu trời ở hai thời điểm cách nhau 6 tháng, khi mà Trái Đất ở vào các điểm đầu bán trục lớn của quỹ đạo ellipse quay quanh Mặt Trời. Khoảng cách này đủ lớn để độ chênh lệch góc giữa hai vị trí có thể đo được. Đến thế kỷ 19, người ta đã đo được khoảng cách từ Trái Đất đến nhiều ngôi sao khác nhau bằng cách này.



Hình 6. Phương pháp thị sai sử dụng hai điểm trên quỹ đạo của Trái Đất quanh Mặt Trời làm điểm quan sát.

Tuy nhiên, phần lớn các ngôi sao trên bầu trời ở quá xa để có thể đo khoảng cách bằng phương pháp trên, bao gồm các sao Cepheid mà chúng ta đã nói. Phải đến năm 1913, nhà thiên văn học Ejnar Hertzsprung mới đo được khoảng cách đến một số ngôi sao Cepheid trong dải Ngân Hà của chúng ta. Ông sử dụng một hiện tượng đã được nhà thiên văn học William Herschel phát hiện từ thế kỷ 18: Mặt Trời cũng chuyển động trong vũ trụ. Herschel nhận thấy điều này nhờ quan sát hai chòm sao Hercules và Columba. Khi quan sát từ Trái Đất, các ngôi sao của Hercules có xu hướng tán ra theo thời gian còn các ngôi sao của Columa lại cụm dần lại. Vận tốc chuyển động của Mặt Trời được ước tính vào khoảng 20 km/s. Khi tiến hành

phương pháp đo thị sai ở hai thời điểm cách nhau nhiều năm, hệ Mặt Trời đã di chuyển đủ nhiều để ta có thể xác định một số khoảng cách đến các vật thể vũ trụ xa hơn. Các tính toán của Hertzsprung đã cung cấp các hệ số cho quan hệ mà Leavitt đã chỉ ra và đến lúc này, người ta đã có một công thức để tính khoảng cách đến các ngôi sao Cepheid chỉ dựa vào chu kỳ của chúng.

2. Harlow Shapley và kích thước của dải Ngân hà

Vào thế kỷ 18, trong ngành thiên văn học xảy ra cuộc tranh cãi về bản chất của các tinh vân (*nebula* trong thuật ngữ ngành thiên văn). Nhà thiên văn học William Herschel và nhà triết học Immanuel Kant cho rằng các tinh vân mà ta quan sát được thực chất là các thiên hà ở xa và gồm nhiều hệ Mặt Trời, tương tự như dải Ngân hà của chúng ta. Đây còn được gọi là thuyết "các vũ trụ dạng hòn đảo". Trong khi đó, nhà toán học Laplace lại cho rằng các tinh vân thực chất là các đám mây khí có dạng xoắn ốc xung quanh một ngôi sao nằm trong dải Ngân hà, chứ không phải hệ các ngôi sao. Cuộc tranh cãi vẫn còn tiếp diễn đến đầu thế kỷ 20.

Với các đo đạc dựa trên hiệu ứng Doppler, năm 1914, người ta đã phát hiện được rằng các tinh vân chuyển động với vận tốc rất nhanh (có thể lên đến 1000 km/s). Cùng với một số số liệu khác về các nova (vụ nổ tân tinh) quan sát được, nhiều người đã cho rằng các tinh vân là các thiên hà riêng biệt. Trong số đó, một nhà thiên văn học trẻ là Harlow Shapley bắt đầu chú ý đến phát hiện mới của Leavitt về quy luật của các sao Cepheid. Shapley bắt đầu nảy ra ý tưởng dùng phương pháp tính khoảng cách sử dụng các Cepheid để xác định kích thước và hình dạng của dải Ngân hà mà hệ Mặt Trời của chúng ta đang tồn tại trong đó.

Năm 1914, Shapley bắt đầu tiến hành nghiên cứu các cụm sao hình cầu (globular cluster) nằm rải rác trong dải Ngân hà cùng các ngôi

sao biến quang trong chúng. Kết quả Shapley thu được cho kích thước giữa hai đầu dải ngân hà là 300000 năm ánh sáng, lớn hơn rất nhiều so với con số 25000 được chấp nhận lúc đó (con số hiện nay là 100000 năm ánh sáng với các mô hình và số liệu chính xác hơn nhiều thời của Shapley). Đồng thời, Shapley cũng phát hiện Mặt Trời không nằm ở trung tâm của dải Ngân hà như mọi người lúc đó vẫn tưởng tượng.



Harlow Shapley (1885 – 1972).

Giả sử rằng bản thân dải Ngân hà đã lớn như vậy thì nếu như các tinh vân là những thiên hà ở bên ngoài thì khoảng cách từ chúng đến ta còn vĩ đại hơn nhiều, đến hàng triệu năm ánh sáng hoặc hơn nữa. Với những hiểu biết về vũ trụ lúc đó, những khoảng cách lớn như vậy có vẻ là không chấp nhận được, ngay cả với Shapley. Đồng thời, Shapley cũng dựa trên nhận xét từ quan sát của nhà thiên văn học van Maanen rằng các tinh vân có chuyển động quay quan sát được. Các lý do trên làm cho Shapley chuyển sang nghĩ rằng các tinh vân chỉ là các đám mây khí như Laplace đã nói chứ không phải là các thiên hà riêng biệt. Năm 1920, Shapley tham gia cuộc tranh luận trước công chúng với Herber Curtis,

một nhà thiên văn học nổi tiếng đương thời. Curtis đại diện cho các quan điểm truyền thống lúc đó. Đây còn được gọi là “cuộc tranh luận vĩ đại” (the Great Debate) đầu tiên của ngành thiên văn học. Cả hai người tham gia đều nghĩ rằng mình đã chiến thắng sau khi cuộc tranh luận kết thúc. Thực tế thì cả hai đều chỉ có một phần sự thật. Shapley đã đúng khi nói rằng kích thước dải Ngân hà lớn hơn nhiều so với con số 25000 năm ánh sáng, cũng như việc hệ Mặt Trời không phải là trung tâm của vũ trụ. Curtis tuy không chấp nhận phương pháp đo sử dụng Cepheid nhưng cũng đưa ra một số nhận định đúng bao gồm: phổ bức xạ của các tinh vân tương tự như những cụm sao trong dải Ngân hà nên các tinh vân này là các thiên hà riêng biệt; và số liệu về chuyển động quay của các tinh vân mà van Maanen quan sát được có thể không đáng tin cậy (và thực sự là như vậy, tốc độ quay rất chậm của các tinh vân không phải là một đại lượng một con người có thể tiến hành quan sát trong vòng đời của mình). Đồng thời, trong khi Shapley lập luận rằng độ sáng của các nova quan sát được từ các tinh vân là quá cao so với giả thuyết rằng chúng là các thiên hà ở rất xa thì Curtis đã đúng khi nói rằng có thể có hai mức độ sáng của các nova chứ không phải một. Phải đến vài năm sau cuộc tranh luận của Shapley và Curtis thì những bằng chứng quyết định mới được hé lộ bởi một nhà thiên văn học khác: Edwin Hubble.

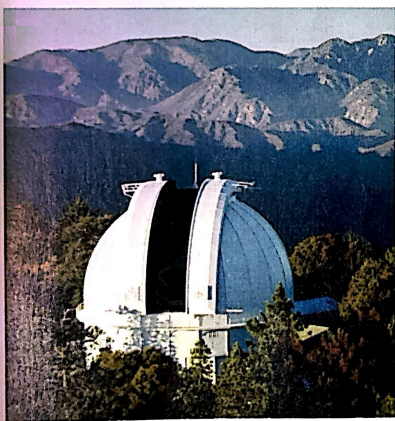
3. Hubble và sự dãn nở của vũ trụ

Hubble là con trai của một luật sư tại bang Missouri, Hoa Kỳ. Ông theo học luật ở Đại học Chicago và sau đó là đại học Oxford. Sau khi đi dạy trung học một thời gian, ông quay lại Chicago và học tiếp thành tiến sỹ ngành thiên văn học. Trong chiến tranh thế giới thứ nhất, Hubble là sỹ quan trong quân đội Mỹ ở châu Âu. Khi trở về, ông làm việc tại đài thiên văn núi Wilson, dưới quyền của Shapley.



Edwin Hubble (1889 – 1953).

Năm 1921, Shapley trở thành giám đốc của đài thiên văn Harvard, thay cho Pickering đã qua đời một năm trước. Shapley muốn Leavitt tiến hành sâu hơn các phân tích về các sao biến quang, công việc mà Leavitt đã không có thời gian theo đuổi do phải thực hiện một số dự án khác mà Pickering cho là quan trọng hơn. Tuy nhiên, mọi việc đã không diễn ra như mong đợi. Leavitt bị mắc bệnh ung thư và qua đời vào tháng 11 năm 1921.



Hình 7. Đài thiên văn trên núi Wilson với kính viễn vọng 100 inch mà Hubble đã sử dụng.

Trong khi Shapley vẫn tiếp tục cuộc tranh cãi học thuật về các kết quả của mình thì

Hubble lại cần mẫn hướng kính viễn vọng lên bầu trời ở đỉnh núi Wilson để tìm dữ liệu mới có thể mang đến đột phá. Tháng 10 năm 1923, khi quan sát các nova trong tinh vân Andromeda, Hubble đã phát hiện ra một ngôi sao Cepheid. Từ chu kỳ của ngôi sao này, theo công thức của Leavitt đã được Shapley bổ sung các hệ số, ông tính ra được khoảng cách từ tinh vân Andromeda đến Trái Đất là 1 triệu năm ánh sáng (con số hiện nay là hơn 2 triệu năm ánh sáng do việc ánh sáng bị hấp thụ trên đường truyền đã không được Hubble xét đến)! Tiếp tục vài tháng sau, ông lại tìm ra một Cepheid nữa cùng nhiều nova khác.

Với những số liệu chắc chắn, Hubble gửi bức thư kèm theo các biểu đồ cho Shapley để thông báo kết quả. Sự kiện này đánh dấu thời điểm mô hình vũ trụ của Shapley đã sụp đổ. Trong khoảng thời gian tiếp theo, Hubble còn tìm thấy theo nhiều Cepheid trong tinh vân Andromeda cũng như một thiên hà khác cách Trái Đất 700000 năm ánh sáng. Hubble báo cáo kết quả của mình trước các nhà khoa học khác vào năm 1925 và công bố bài báo khoa học vào năm 1929. Đến đây thì hầu như tất cả mọi người đều đã hiểu, dải Ngân hà của chúng ta chỉ là một thiên hà trong rất nhiều thiên hà khác của vũ trụ này.



Hình 8. Ảnh chụp của tinh vân Andromeda cho thấy nó là thiên hà với nhiều hệ Mặt Trời.

Không dừng lại ở đây, Hubble bắt đầu nghiên cứu mối liên hệ giữa khoảng cách

từ các thiên hà đến Trái Đất và vận tốc của chúng. Vận tốc di chuyển của mỗi thiên hà có thể được xác định nhờ quang phổ mà ta quan sát được từ thiên hà đó. Do hiệu ứng Doppler, các vật thể chuyển động hướng về Trái Đất (như tinh vân Andromeda) có quang phổ lệch về phía bước sóng xanh (blueshift) trong khi các thiên hà khác rời ra xa Trái Đất sẽ có quang phổ lệch về phía bước sóng đỏ (redshift). Vận tốc di chuyển càng lớn sẽ cho độ lệch càng lớn. Với những thiên hà có các ngôi sao Cepheid quan sát được, Hubble thấy quan hệ tuyến tính giữa vận tốc đo bằng quang phổ và khoảng cách tới Trái Đất xác định theo chu kỳ của các sao Cepheid. Hằng số tỷ lệ giữa vận tốc và khoảng cách này hiện nay được gọi là hằng số Hubble. Sử dụng mối quan hệ tuyến tính vừa mới tìm ra, Hubble dùng các độ lệch sang bước sóng đỏ để tìm cả khoảng cách lẫn vận tốc của các thiên hà ở quá xa mà ta không thể quan sát được các sao Cepheid của chúng. Hubble cho ra hình ảnh của một vũ trụ mới, không chỉ rất rộng lớn mà còn đang chuyển động. Những thiên hà ở càng xa thì càng chuyển động ra xa ta với vận tốc lớn hơn. Phát hiện của Hubble cũng giúp Albert Einstein hoàn thiện thuyết tương đối. Trước đó, các phương trình của ông cho thấy vũ trụ có kích thước không gian thay đổi. Tin tưởng rằng không gian là cố định, Einstein đã thêm vào một “hằng số vũ trụ” để loại trừ ảnh hưởng của trọng lực nhằm dẫn đến một vũ trụ tĩnh. Sau khi biết kết quả của Hubble, Einstein đã gọi hằng số vũ trụ này là sai lầm khoa học lớn nhất của mình và sửa lại các công thức của thuyết tương đối.

Một vấn đề được đặt ra khi biết vũ trụ vẫn đang dần nở là nếu đi ngược thời gian, vũ trụ sẽ nhỏ dần lại. Vậy có phải ở một thời điểm nào đó, vũ trụ này chỉ là một điểm? Đây

cũng là cơ sở của thuyết “vụ nổ lớn” về sự ra đời của vũ trụ. Cho đến ngày nay, sự thực về nguồn gốc và quá trình hình thành của vũ trụ vẫn còn là một câu hỏi lớn của khoa học với nhiều vấn đề còn bỏ ngỏ.

4. Lời kết

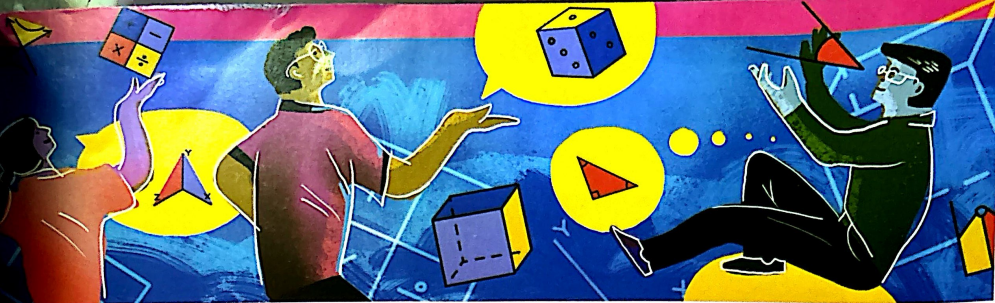
Ảnh hưởng của Leavitt đến sự phát triển của thiên văn học có thể nói là rất to lớn. Năm 1924, nhà toán học Thụy Điển Gustaf Mittag-Leffler đề cử bà cho giải Nobel mà không biết rằng Leavitt đã mất từ vài năm trước đó. Những đóng góp của Leavitt cùng các “computer” khác tại đài thiên văn Harvard hầu như chỉ xuất hiện ở các chú thích trong giáo trình thiên văn. Sự cống hiến của họ cho khoa học thật sự xứng đáng được công chúng biết đến nhiều hơn nữa.



Leavitt khi làm việc tại đài thiên văn Harvard

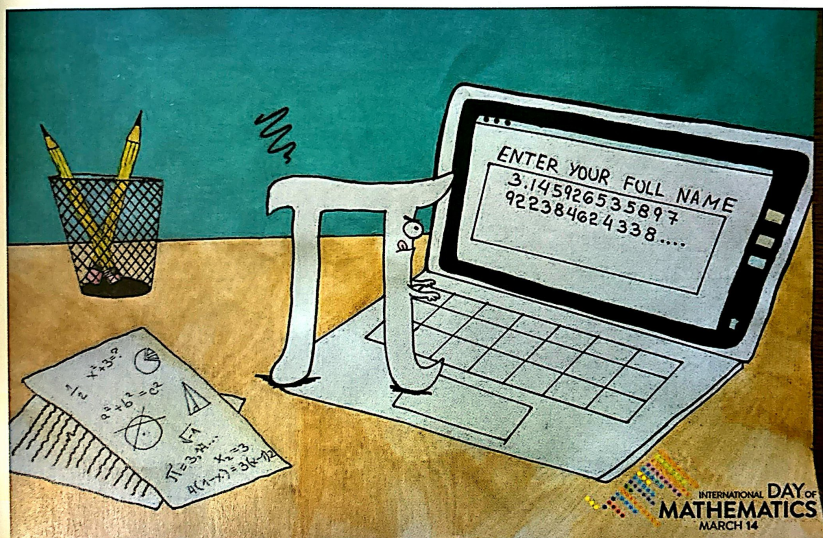
Tài liệu tham khảo

- [1] Fernie, J. D. (1969). The Period-Luminosity Relation: A Historical Review. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 81, 707. <https://doi.org/10.1086/128847>
- [2] Johnson, G. (2006). . W.W. Norton.
- [3] Trimble, V. (1995). The 1920 Shapley-Curtis Discussion: Background, Issues, and Aftermath. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 107, 1133. <https://doi.org/10.1086/133671>



ĐIỀN TÊN CHO ĐỦ*

YOANA BYANNOVA¹

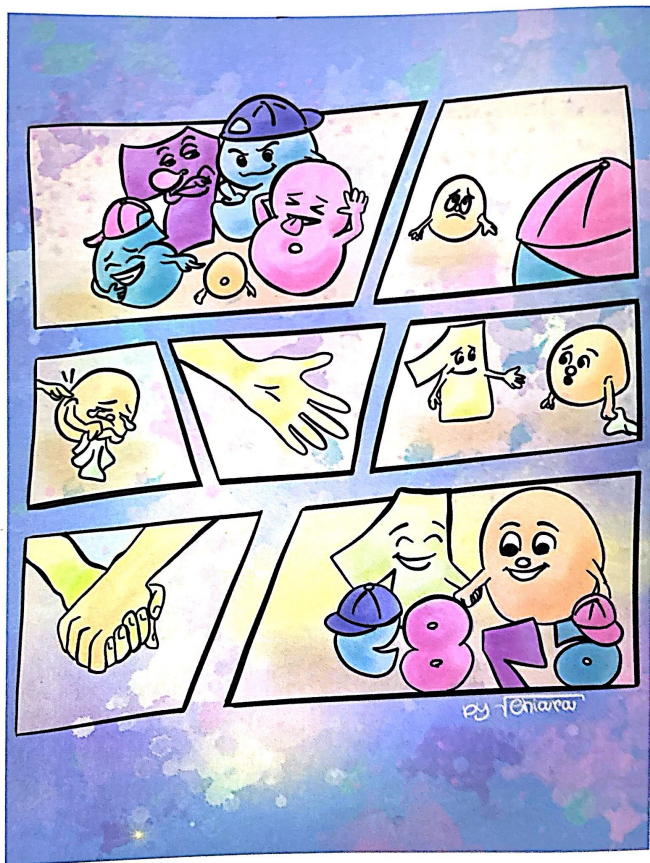


* Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>

¹ Pavlikeni (Veliko Tarnovo), Bulgaria

KHI CÓ BẠN KÊ BÊN*

CHIARA RADICE¹

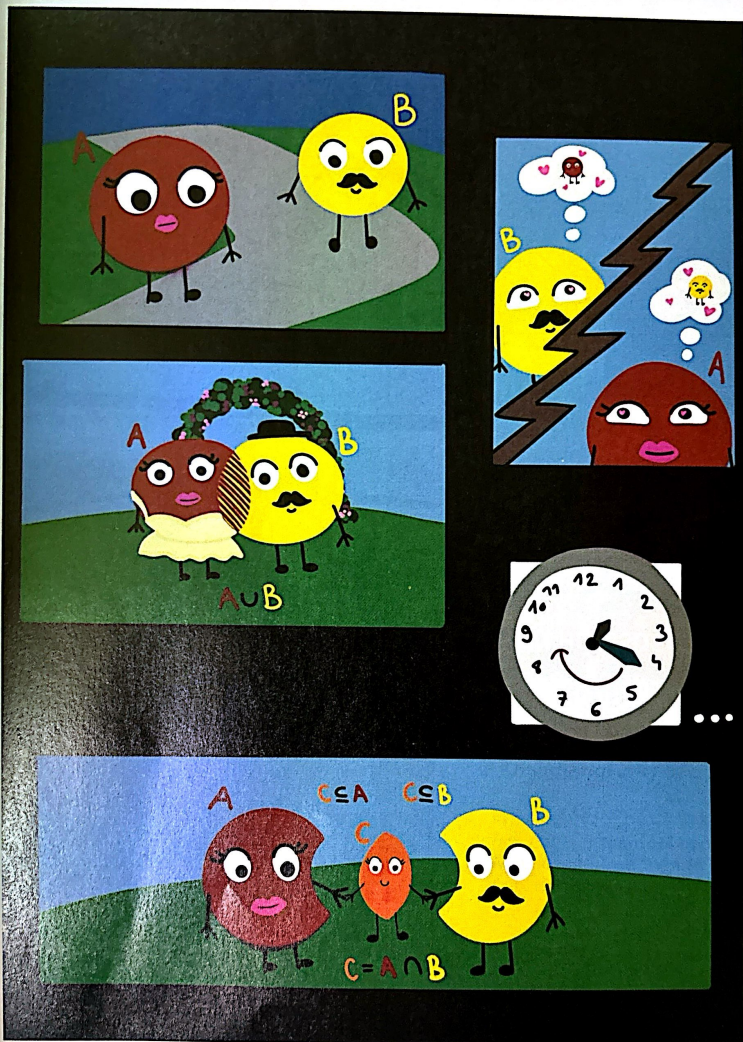


Số Không bé nhỏ, không đếm được chút nào
 Nắm tay số Một để hai bạn cùng cao
 Không sợ những số lớn hơn, số Một bắt đầu thực thi nhiệm vụ
 Để quan tâm tới số Không, giữ vị trí của mình
 Nhờ ký hiệu, nếu Một và Không đứng cùng nhau
 Họ có thể trở nên lớn hơn Chín, Tám, Bảy xếp sau

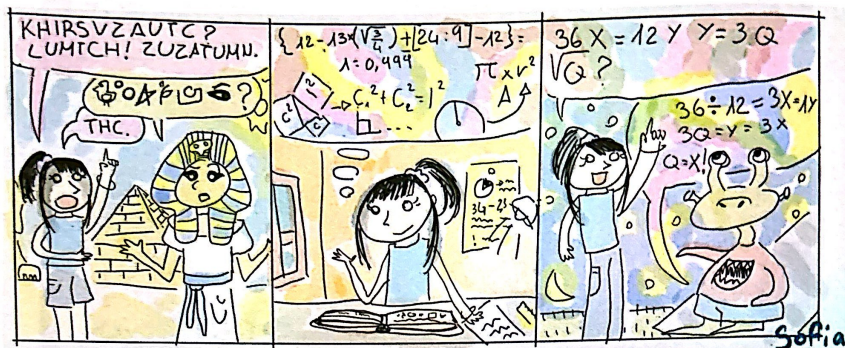
* Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>

¹ Monza, Italy.

PHÉP TOÁN CỦA CUỘC ĐỜI*

LEDA SILOV[†]* Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>[†] Zagreb, Croatia.

NGÔN NGỮ PHỔ DỤNG*

SOFIA SARACCO¹

Toán học như một ngôn ngữ phổ dụng. Sofia thử nói chuyện với người Ai-cập cổ đại, nhưng không đạt được tiến bộ. Sau đó, cô bé học Toán. Với Toán học, cô bé xoay sở giao tiếp được với cả người ngoài hành tinh.

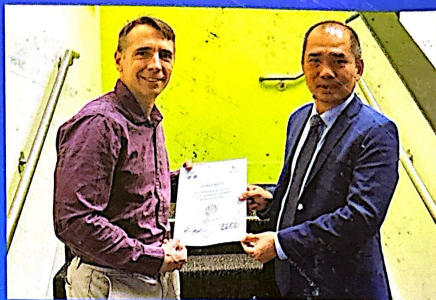
* Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>

¹ Parma (PR), Italy.

MVSM NƠI ƯƠM MẦM TOÁN HỌC TRẺ

Trong bối cảnh cách mạng công nghệ phát triển như vũ bão, thị trường lao động thế giới ngày càng thêm "khát" nhân sự giỏi Toán và tiếng Anh.

Trường Toán Minh Việt - Minh Việt School of Math (MVSM) đã kết hợp với The Arts of Problem Solving (AoPS) - Chương trình giáo dục Toán học nâng cao số 1 tại Hoa Kỳ và hàng đầu thế giới, để mở ra mô hình học tập Toán ưu việt nhất.



SỨ MỆNH MVSM

Khơi dậy
Tinh yêu
Toán học

Khả năng
Sáng tạo

Tư duy
Logic

Nghệ thuật
giải quyết
các vấn đề

CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO

- **Đối tượng:** Học sinh tiểu học từ lớp 1 tới lớp 5
- **Giáo trình học:** Beast Academy của AoPS
- **Phương thức:** Học sinh học Online cùng giáo viên Mỹ
- **Thời gian học:**
 - Lớp Toán: 1 buổi/ tuần, chỉ với 5 triệu đồng/năm
 - Lớp Tiếng Anh **bổ trợ:** 4 buổi/tuần, 6 triệu đồng/năm.

Những học sinh xuất sắc của MVSM sẽ được tặng học bổng một phần hoặc toàn phần và được giới thiệu học Câu lạc bộ Toán Kỳ Lân với những Giáo sư Toán học hàng đầu Việt Nam.

**Beast
ACADEMY**
By Art of Problem Solving



NĂM HỌC 2024-2025

- Mở đăng ký: **1/4/2024**
- Khai giảng: **24/6/2024**

Phụ huynh có thể đăng ký cho con chỉ học Toán, chỉ học Tiếng Anh hoặc học cả Toán và Tiếng Anh.

ĐỌC THÊM



ĐỐ VUI

Trần Nguyên Phương (st)

Trong một quốc gia nọ, các đồng tiền xu có các loại mệnh giá sau đây: 1 xu, 2 xu, 5 xu, 1 hào, 2 hào, 5 hào và 1 đồng, trong đó 1 đồng bằng 10 hào và 1 hào bằng 10 xu.

Biết rằng có thể trả a xu bằng b đồng tiền xu (với a, b là các số nguyên dương). Hãy chỉ ra rằng cũng có thể trả b đồng bằng a đồng tiền xu.



Tài trợ bởi

**MINH VIỆT
ACADEMY**



facebook.com/
pijournal



Giá: 35.000 đồng
www.pi.edu.vn