

TẠP CHÍ PI
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 8 - SỐ 1-2

THÁNG 1 2024

**Cùng chơi
với TOÁN**



ISSN 2525-2437



TÌM ĐỌC TRONG SỐ NÀY

Bạn đọc thân mến, năm 2024 Tạp chí Pi hướng ứng chủ đề “Cùng chơi với Toán” của Ngày Toán học Quốc tế. Mời các bạn cùng thưởng thức những ý tưởng vui nhộn về Toán học từ các bạn trẻ trên thế giới. Pi cũng mong nhận được những sáng tác từ Bạn của Pi về chủ đề này.

Các bạn học sinh trung học phổ thông xin mời đến với chuyên mục **Toán học và Cuộc sống** để tìm hiểu cách Tính diện tích đa giác thông qua tọa độ các đỉnh và ứng dụng vào thực tiễn. Bài viết sẽ phân nào giải thích thắc mắc của các bạn: các công thức phức tạp ở lớp có ích gì, và làm thế nào để nhớ được chúng.

Chuyên mục **Đường vào Toán học** có câu chuyện thú vị về phát kiến toán học của một người yêu toán nghiệp dư. Bài toán lát gạch và câu hỏi về viên gạch bí ẩn mang tên Einstein được quan tâm bởi nhiều nhà khoa học nổi tiếng như R. Penrose (Nobel Vật lý), D. Shechtman (Nobel Hóa học) được một kỹ thuật viên ngành in David Smith đưa ra câu trả lời ngoạn mục.

Lịch sử Toán học cùng bạn dõi theo hành trình khoa học và cách mạng của Evaristé Galois, một thiên tài toán học đồng thời cũng là một thanh niên yêu nước nhiệt thành. Cuộc đời và đóng góp khoa học của Galois đã trở thành biểu tượng cho nhiều thế hệ các nhà toán học.

Mời các bạn yêu toán đến với chuyên mục **Tìm hiểu Khoa học** cùng bài viết về cách Dạy máy tính ngôn ngữ, để cùng khám phá cách các nhà khoa học tạo nên ChatGPT.

Cuối cùng, dành cho các bạn học sinh yêu toán vẫn là nhiều bài viết, bài toán thách thức trí thông minh của các bạn.

BAN BIÊN TẬP

Hà Huy Khoái (Tổng Biên tập)
Phùng Hồ Hải (Phó Tổng Biên tập)
Nguyễn Chu Gia Vượng (Phó Tổng Biên tập)
Vũ Thế Khôi (Thư ký Tòa soạn)
Ngô Bảo Châu (Ủy viên)
Trần Nam Dũng (Ủy viên)
Phạm Triều Dương (Ủy viên)
Hà Duy Hưng (Ủy viên)
Nguyễn Khắc Minh (Ủy viên)
Nguyễn Hoàng Thạch (Ủy viên)

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Phạm Huy Điển, Ngô Trung Hiếu, Nguyễn Thành Nam,
Ngô Văn Minh, Trần Văn Nhung, Tạ Duy Phượng,
Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Duy Thái Sơn, Đỗ Đức Thái,
Phạm Văn Thiệu, Vũ Kim Thủy, Ngô Việt Trung, Vũ Hà V.
Lê Anh Vinh

Chế bản: Nguyễn Thái Hiệp
Đồ họa: Nguyễn Trần, Đoàn Xuân Trường
Nguyễn Chu Chloé Huệ Chi

Ảnh bìa 1: Đoàn Xuân Trường

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYỀN

Hạ Vũ Anh, Bùi Văn Biên, Võ Quốc Bá Cẩn, Lưu Công Đức,
Lưu Thị Thanh Hà, Nguyễn Hiệp, Phan Thanh Hồng,
Trần Quang Hùng, Trần Quốc Luật, Kiều Đình Minh,
Nguyễn Thị Nhung, Vũ Hồng Sơn, Lưu Bá Thắng,
Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Tất Thắng, Nguyễn Xuân Thọ,
Nguyễn Mạnh Toàn, Nguyễn Hoàng Vũ (phụ trách mục
Tìm hiểu Khoa học).

Giấy phép số 484/GP-BTTTT ngày 25.10.2016
In tại: Công ty TNHH Đầu tư TM In Hồng Đức
Tạp chí ra hàng tháng
Giá: 35.000 đồng

TÒA SOẠN

Phòng 107, Nhà A5, Viện Toán học,
18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội
Email gửi bài: btt@pi.edu.vn
Email giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com
Điện thoại: (024) 3215.1407.
Website: www.pi.edu.vn

MỤC LỤC

TOÁN HỌC VÀ CUỘC SỐNG

- 2 Tính diện tích đa giác bằng tọa độ các đỉnh

Nguyễn Hoàng Vũ

ĐƯỜNG VÀO TOÁN HỌC

- 10 Người không chuyên tìm ra viên gạch "Einstein" bí ẩn

Erica Klarreich

(Dịch: Nguyễn Duy Anh & Lê Vũ Minh Trí)

TOÁN CỦA BỊ

- 16 Phép dời hình và công thức tính diện tích (Phần I: Phép dời hình)

Ngô Văn Minh, Phan Ngọc Minh

& Nguyễn Thị Nhung

- 21 Đề thi tuyển sinh năm 2023 - 2024 câu lạc bộ Toán học Unicorn Math Circle (Phần III)

- 24 Các nhà chăn nuôi vui tính

Già Dương

- 24 Các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi

- 26 Lời giải các bài toán cho học sinh nhỏ tuổi (Số 10 năm 2023)

- 29 Proof by contradiction (Part I)

Nghĩa Doan

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

- 32 Đề ra kỳ này

- 33 Giải bài kỳ trước

CÁC KỲ THI TOÁN

- 43 Góc Toán Olympic

VUI CÙNG PI

- 46 Cà phê sáng

Samantha Fafard

- 47 Eratosthenes tính chu vi Trái Đất

Nicolò Bertolotti

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

- 48 Cội rễ của những tính toán

J. J. O'Connor & E. F. Robertson

(Dịch: Phạm Triều Dương)

TÌM HIỂU KHOA HỌC

- 53 Dạy máy tính ngôn ngữ:
Từ Google translate đến ChatGPT

Nguyễn Mạnh Toàn



TÍNH DIỆN TÍCH ĐA GIÁC BẰNG TỌA ĐỘ CÁC ĐỈNH

NGUYỄN HOÀNG VŨ¹

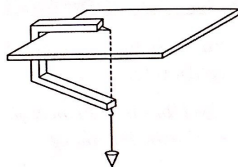
Việc tính diện tích các miền có dạng đa giác là một hoạt động thường thấy trong đời sống và sản xuất, đặc biệt là với ngành trắc địa. Trong bài viết này, chúng ta hãy cùng tìm hiểu một phương pháp giải bài toán trên dựa vào “công thức dây giày” cùng một số ứng dụng thú vị khác của công thức này.

1. Trắc địa sử dụng bàn mặt phẳng

Trước khi đi sâu vào phương pháp toán học cụ thể để tính diện tích đa giác khi biết tọa độ các đỉnh, chúng ta hãy cùng tìm hiểu cách để thu được vị trí tọa độ các đỉnh của một mảnh đất hình đa giác. Với các công cụ trắc địa hiện đại ngày nay, có nhiều cách thức khác nhau để làm việc này. Tuy nhiên, phần này sẽ trình bày về một công cụ trắc địa có lịch sử tương đối lâu đời: bàn mặt phẳng.

Bàn mặt phẳng bao gồm một mặt bàn phẳng được đỡ bởi ba chân bàn có thể điều chỉnh được. Kết nối giữa mặt bàn và các chân được thiết kế sao cho mặt bàn có thể quay tự do trong mặt phẳng ngang, đồng thời mặt bàn cũng có thể được điều chỉnh cho song song với mặt đất dựa vào một thiết bị căn chỉnh nào đó, ví dụ một ống bọt nước. Việc chỉnh cho bàn song song với mặt đất là rất quan trọng để đảm bảo tính chính xác của các đo đạc tiếp theo.

Trên mặt bàn người ta cố định một tờ giấy phẳng. Khi tiến hành đo đạc, mỗi điểm đo đạc trên thực địa sẽ ứng với vị trí tương ứng trên tờ giấy. Để đảm bảo sự tương ứng này khi sử dụng, một kẹp chữ U có buộc dây dọi được gá vào bàn để cho điểm ở trên tờ giấy thẳng hàng đúng với điểm ở trên mặt đất.

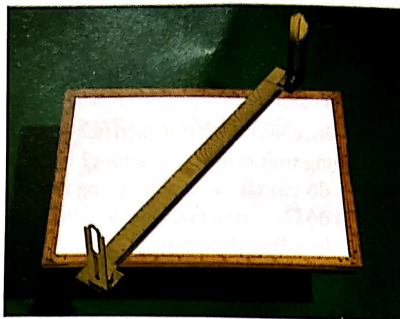


Hình 1. Trái: bàn mặt phẳng và các dụng cụ đi kèm. Phải: cách sử dụng công cụ dây dọi đi kèm bàn mặt phẳng.

Tại mỗi một vị trí, người ta sử dụng một thước ngắm để gióng hàng giữa vị trí hiện tại và cọc cắm vị trí được xác định trước đó.

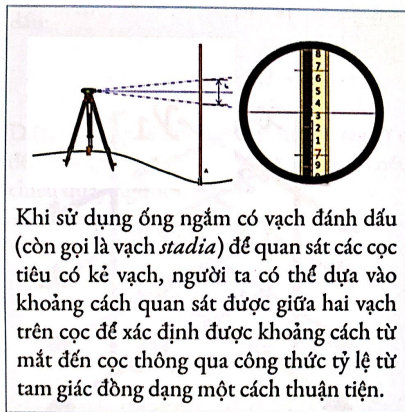
Khi đã gióng hàng xong, một đường thẳng tương ứng cũng được kẻ trên tờ giấy ở mặt bàn theo đúng phương đã được gióng. Khoảng cách giữa điểm đo mới và điểm đo cũ sẽ bằng đúng khoảng cách thực địa nhân với tỷ lệ xích. Khoảng cách thực địa giữa hai điểm có thể được đo trực tiếp bằng thước dây

¹ Hà Nội.



Hình 2. Bàn mặt phẳng với thước ngắm.

hoặc một số phương pháp khác. Một số bàn mặt phẳng sử dụng các ống ngắm có vết đánh dấu còn có thể cho phép xác định khoảng cách bằng các cọc tiêu có chia vạch mà không cần phải nối dây giữa hai điểm.



Khi sử dụng ống ngắm có vạch đánh dấu (còn gọi là vạch *stadia*) để quan sát các cọc tiêu có kẻ vạch, người ta có thể dựa vào khoảng cách quan sát được giữa hai vạch trên cọc để xác định được khoảng cách từ mắt đến cọc thông qua công thức tỷ lệ từ tam giác đồng dạng một cách thuận tiện.

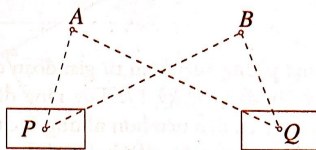
Nhờ cơ chế trên mà bàn mặt phẳng có thể giúp nhân viên trắc địa lập được một bản đồ sơ bộ theo đúng tỷ lệ xích về vị trí giữa các điểm so với nhau. Việc khảo sát có thể được tiến hành theo nhiều phương pháp khác nhau:

- Phương pháp tọa: người sử dụng bàn mặt phẳng đứng ở một vị trí cố định và xác định vị trí tương đối của các cọc tiêu khác nhau so với vị trí này.



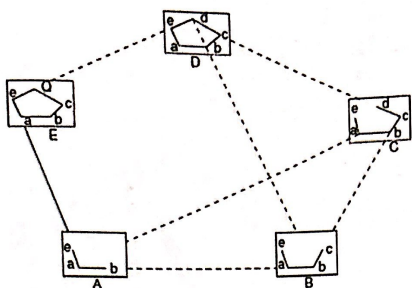
Hình 3. Phương pháp tọa sử dụng bàn mặt phẳng để xác định tọa độ các vị trí từ một điểm cố định.

- Phương pháp giao điểm: Trong trường hợp có một số điểm không đến được, vị trí của một điểm trên bản đồ được xác định bằng giao của hai đường thẳng từ hai điểm khác đến điểm này. Cách làm này thường sử dụng la bàn để đo độ lệch giữa phương nối hai điểm với hướng Bắc.



Hình 4. Phương pháp giao điểm sử dụng bàn mặt phẳng từ một số vị trí để xác định tọa độ của các điểm còn lại.

Phương pháp dịch chuyển: Ở mỗi một lần đo, bàn mặt phẳng lại được dịch chuyển đến một vị trí mới. Khi đó, khoảng cách và hướng từ nó đến vị trí cũ lại được đo đạc. Cứ mỗi lần như vậy, ta lại xác định được một cạnh của miền đã giao.



Hình 5. Phương pháp dịch chuyển xác định tọa độ các điểm bằng cách dịch chuyển bản mặt phẳng và gióng lại điểm ngay trước. Các điểm trước hơn nữa cũng có thể được sử dụng để biểu chính khoảng cách.



Một số nghiên cứu sinh học cho thấy loài kiến sa mạc (Cataglyphis fortis) cũng định vị bằng một cách tương tự như trên, chúng có thể xác định được hướng và khoảng cách giữa một số mốc cố định để không bị lạc đường trong sa mạc.

Bản mặt phẳng xuất hiện từ giai đoạn cuối thế kỷ 16, đầu thế kỷ 17. Tuy rằng đã có nhiều công cụ tiên tiến hơn nhưng đặc tính đơn giản, thuận tiện, dễ sử dụng vẫn giúp bản mặt phẳng được sử dụng trong nhiều trường hợp khác nhau khi tiến hành trắc địa.

2. Công thức dây giày: tính diện tích đa giác từ tọa độ các đỉnh

Như đã thấy ở phần trên, bằng một phương pháp trắc địa nào đó, ví dụ như bản mặt phẳng, ta có thể thu được một bản đồ dạng tỷ lệ xích của miền đa giác, cũng như tọa độ các đỉnh của nó. Để tính diện tích miền đa giác này, một suy nghĩ thông thường là hãy chia nó thành các tam giác rồi tính diện tích từng

tam giác này. Dù sao thì độ dài của mỗi cạnh có thể thu được bằng định lý Pythagoras và diện tích mỗi tam giác có thể được tính từ độ dài ba cạnh qua công thức Heron.

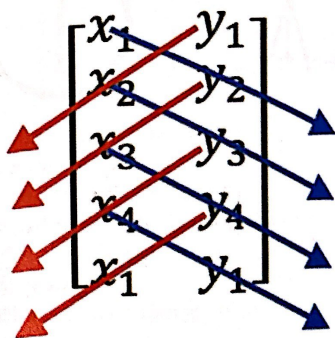
Tuy nhiên, còn có cách tính diện tích nào với khối lượng tính toán ít hơn không? Nếu đã biết tọa độ của tất cả các đỉnh trong một hệ trục tọa độ Descartes, ta có thể tính diện tích đa giác theo công thức sau:

$$S = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix} \right)$$

với (x_i, y_i) là tọa độ của đỉnh A_i của đa giác $A_1A_2A_3 \dots A_n$.

Ở đây, các định thức 2×2 có giá trị được tính theo công thức sau:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$



Hình 6. Minh họa công thức dây giày.

Đây còn gọi là công thức dây giày vì cách thức nhân chéo giống với cách buộc dây giày (Hình 6). Nó còn được gọi là công thức tính diện tích của Gauss. Công thức này có nhiều cách chứng minh khác nhau. Ở đây, ta hãy cùng tìm hiểu một cách chứng minh tương đối đơn giản sử dụng các kiến thức toán sơ cấp.

Xét hai vector u và v như trong Hình 7. Góc θ khi quay từ u đến v sẽ dương khi chiều quay ngược kim đồng hồ và âm khi chiều quay cùng chiều kim đồng hồ. Ta có thể tính $\sin\theta$ theo công thức lượng giác:

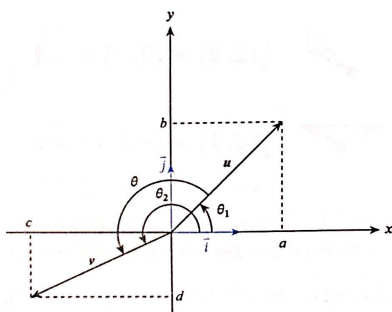
$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ &= \sin\theta_2 \cos\theta_1 - \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ &= \frac{d}{||v||} \cdot \frac{a}{||u||} - \frac{b}{||u||} \cdot \frac{c}{||v||} \\ &= \frac{1}{||u|| \cdot ||v||} (ad - bc).\end{aligned}$$

Ở đây $||u||$ và $||v||$ lần lượt là độ dài của các vector tương ứng.

Ta đã biết diện tích của một hình bình hành bằng với tích của độ dài hai cạnh nhân với $\sin$ của góc giữa chúng. Để phục vụ các tính toán tiếp theo, ta sẽ dùng khái niệm diện tích có dấu:

$$||u|| ||v|| \sin\theta = ad - bc.$$

Diện tích này sẽ dương nếu chiều quay từ u đến v là ngược chiều kim đồng hồ và âm nếu chiều quay ngược lại.



Hình 7. Góc giữa mỗi vector với trục x và góc giữa hai vector.

Do diện tích tam giác bằng một nửa diện tích hình bình hành có chung hai cạnh, diện tích có dấu của tam giác tạo bởi hai vector u và v

là:

$$\frac{1}{2}(ad - bc).$$

Trong trường hợp tam giác tạo bởi hai vector (x_1, y_1) và (x_2, y_2) , ta có diện tích tam giác (có dấu) tính theo công thức:

$$\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

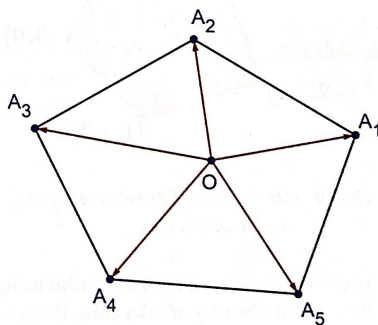
Diện tích này dương khi chiều quay từ vector (x_1, y_1) đến (x_2, y_2) là ngược chiều kim đồng hồ và âm trong trường hợp ngược lại.

Từ công thức này, ta hãy mở rộng cho trường hợp một đa giác lồi có chứa gốc tọa độ ở miền trong của nó. Giả sử tọa độ các đỉnh của đa giác là $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ.

Khi đó diện tích có dấu của đa giác sẽ bằng tổng diện tích có dấu của các tam giác:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + \dots \\ &+ x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1} + x_n y_1 - x_1 y_n),\end{aligned}$$

và sẽ nhận giá trị dương.



Hình 8. Trường hợp đa giác lồi có gốc tọa độ ở miền trong đa giác.

Tất nhiên không phải đa giác nào cũng chứa gốc tọa độ ở miền trong của nó. Với trường hợp này, ta hãy để ý rằng với $u = (a, b), v = (c, d)$ thì $ad - bc$ cũng chính là thành phần theo trục z của tích có hướng $u \cdot v$. Giả sử O

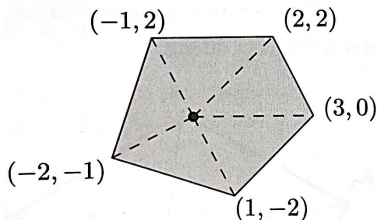
không còn là gốc tọa độ mà chỉ là một điểm bất kỳ ở miền trong tam giác, các vector từ O đến các đỉnh đa giác lần lượt là $v_1, v_2, \dots, v_n$ còn vector từ gốc tọa độ đến O là w .

Ta có:

$$\begin{aligned} & (v_1 + w) \times (v_2 + w) + (v_2 + w) \times (v_3 + w) \\ & + \dots + (v_n + w) \times (v_1 + w) \\ & (v_1 \times v_2 + v_2 \times v_3 + \dots + v_{n-1} \times v_n + v_n \times v_1) \\ & + (v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n) \times w \\ & + w \times (v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + v_n) \\ & (v_1 \times v_2 + v_2 \times v_3 + \dots + v_{n-1} \times v_n + v_n \times v_1) \end{aligned}$$

Ở đây ta đã sử dụng tính chất $a \times b = -b \times a$ để triệt tiêu các thành phần có tích vô hướng liên quan đến w .

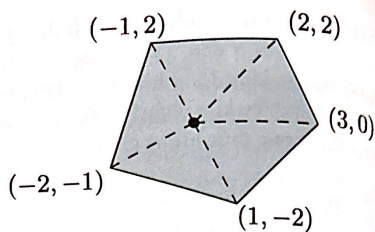
Biểu thức trên cũng chỉ ra rằng dù gốc tọa độ không nằm trong đa giác thì công thức dây giày vẫn cho ta diện tích của đa giác.



Hình 9. Một ví dụ tính diện tích sử dụng công thức dây giày.

Ví dụ với đa giác có tọa độ các đỉnh như trong Hình 9, sau khi thay số vào công thức, ta được giá trị diện tích là 14 (nếu các đỉnh được liệt kê theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ).

Trong trường hợp đa giác là không lồi, công thức dây giày vẫn đúng. Các tam giác có thứ tự liệt kê các đỉnh cùng chiều kim đồng hồ sẽ có diện tích âm. Các phần âm dương sẽ bù trừ cho nhau và công thức dây giày vẫn cho ta diện tích của đa giác.



Hình 10. Minh họa công thức dây giày cho trường hợp đa giác không lồi.

Do đặc điểm bù trừ này mà công thức dây giày cũng vẫn đúng cho trường hợp đa giác có các cạnh cắt nhau như trong Hình 11.

$$\frac{1}{2} (3, 0) \times (2, 2) = 3$$

$$\frac{1}{2} (2, 2) \times (2, 1) = -1$$

$$\frac{1}{2} (2, 1) \times (-2, 1) = 2$$

Hình 11. Công thức dây giày vẫn đúng trong trường hợp đa giác có các cạnh cắt nhau.

Ta cũng có thể tiến hành chứng minh công thức dây giày theo một cách tiếp cận khác. Xét hai đỉnh (x_i, y_i) và (x_{i+1}, y_{i+1}) của một đa giác có các đỉnh nằm hoàn toàn phía trên trục x . Đây là hai đỉnh liên nhau. Biểu thức $\frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) (y_i + y_{i+1})$ chính là một diện tích có dấu của hình thang bao gồm

cạnh nối hai đỉnh này, hai đoạn vuông góc hạ từ các đỉnh xuống trục x , và hình chiếu của cạnh này trên trục x (Hình 12). Ngược lại với chứng minh trên, diện tích này sẽ dương khi chiều từ (x_i, y_i) sang (x_{i+1}, y_{i+1}) là cùng chiều kim đồng hồ (hướng từ trái sang phải trên cạnh của đa giác) và âm trong trường hợp ngược lại. Tất nhiên nó sẽ bằng 0 khi cạnh đa giác vuông góc với trục x .



$$\frac{1}{2}(3, 0) \times (2, 2) = 3$$



$$\frac{1}{2}(2, 2) \times (2, 1) = -1$$



$$\frac{1}{2}(2, 1) \times (-2, 1) = 2$$

Hình 12. Chứng minh công thức dây giày dựa vào diện tích bình thang.

Khi tiến hành cộng tổng diện tích tất cả các hình thang được sinh ra theo cách này và rút gọn lại biểu thức, ta cũng sẽ thu được công thức tính diện tích theo tọa độ. Thật vậy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} + y_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1}y_{i+1} + x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1} + x_iy_i) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_{i+1}y_i - \sum_{i=1}^n x_iy_{i+1} \right). \end{aligned}$$

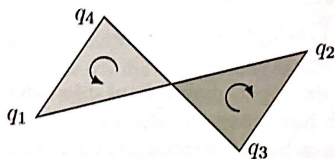
Chú ý rằng công thức này ngược dấu so với công thức dây giày ban đầu do các đỉnh được liệt kê theo chiều kim đồng hồ thay vì ngược chiều kim đồng hồ.

Trong trường hợp đa giác không hoàn toàn nằm phía trên trục x , ta cần chứng minh rằng công thức này cho giá trị không đổi khi dịch gốc tọa độ dọc theo trục thẳng đứng. Giả sử tất cả các tọa độ trên trục y của mỗi điểm đều

được cộng thêm một lượng là C . Khi đó:

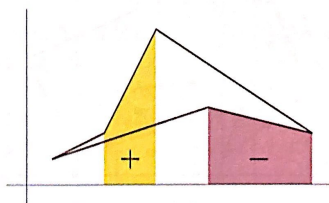
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} + y_i + 2C) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} + y_i) + 2C \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} + y_i) + C \cdot \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} + y_i) \end{aligned}$$

Số hạng chứa C bằng 0 do x_{n+1} cũng chính là x_1 (các cạnh đa giác tạo thành một đường gấp khúc khép kín). Phương pháp chứng minh sử dụng hình thang này cũng đúng cho trường hợp đa giác không lồi (Hình 13).



Hình 13. Các hình thang trong trường hợp đa giác không lồi.

Một ứng dụng đáng chú ý của công thức dây giày là nó cho ta định lý Pythagoras một cách trực tiếp.



Hình 14. Sử dụng công thức dây giày để chứng minh định lý Pythagoras.

Xét tam giác vuông OAB với tọa độ các đỉnh $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(0,b)$. Có thể dễ dàng chứng minh bằng hình học rằng các đỉnh của hình vuông $ABCD$ trong hình có tọa độ là $C(b, a+b)$ và $D(a+b, a)$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ có thể được tính theo công thức dây giày theo thứ tự liệt kê A, D, C, B :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [a \cdot a - 0 \cdot (a+b) + (a+b) \cdot (a+b) \\ & - a \cdot b + b \cdot b - (a+b) \cdot 0 + 0 \cdot 0 - a \cdot b] \\ & = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Đồng thời diện tích hình vuông này cũng bằng c^2 với $c = AB$, và định lý Pythagoras đã được chứng minh.

Bài tập

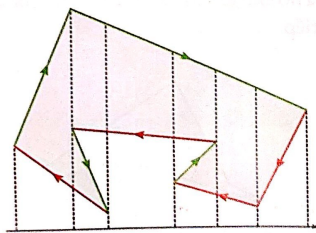
1. Dùng công thức dây giày, tính diện tích của các đa giác với các đỉnh có tọa độ như sau:

a) $(1, 1), (2, 4), (0, 6)$.

b) $(1, 3), (-1, 2), (-3, -6), (0, -1)$.

c) $(2, 2), (-2, 2), (-4, -4), (0, -2), (4, -4)$.

2. Liên hệ giữa định thức và diện tích hình bình hành cũng có thể được chứng minh bằng cách cắt ghép trực quan. Hình bên dưới mô tả cách làm này cho trường hợp $0 < b < d, 0 < c < a$. Bạn đọc hãy liệt kê các trường hợp còn lại và tiến hành chứng minh dùng cắt ghép cho các trường hợp này.



3. Diện tích của miền bao bởi đường cong kín

Sau khi đã giải quyết bài toán tính diện tích của một đa giác, ta hãy giải quyết bài toán tính diện tích của miền được bao bởi một đường cong kín. Trước hết, ta hãy bàn về cách mô tả một đường cong kín như thế nào. Do đường cong kín chắc chắn không thể mô

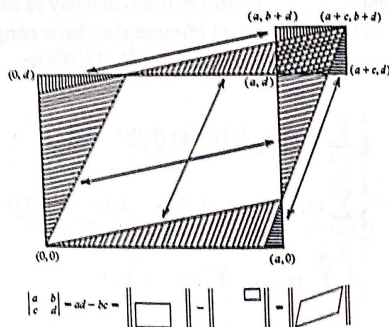
tả bằng một hàm số dạng $y = f(x)$ (vì trong trường hợp này ứng với một giá trị của x có thể có nhiều hơn một giá trị của y) nên ta cần một cách khác để mô tả đường cong.

Nhiều đường cong quen thuộc có thể được mô tả bằng dạng tham số (giống như dạng tham số của đường thẳng trong sách giáo khoa toán). Theo đó, một đường cong có thể được biểu diễn dưới dạng $(x(t), y(t))$ với $t \in [a, b]$ là tham số mô tả đường cong.

Ví dụ, đường tròn bán kính R có tâm ở gốc tọa độ sẽ có dạng tham số $(R \cos t, R \sin t), t \in [0, 2\pi]$. Còn đường ellipse có dạng tham số $(a \cos t, b \sin t), t \in [0, 2\pi]$ với a, b lần lượt là độ dài các bán trục ngang và đứng.

Xét một đường cong kín $(x(t), y(t))$ với $t \in [a, b]$ và khi t tăng thì vị trí điểm tương ứng với giá trị này sẽ đi dọc đường cong theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Xét các điểm t_i :

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$



Hình 15. Miền bao bởi đường cong kín.

Ứng với mỗi giá trị t_i , ta có một điểm $C(t_i)$ tương ứng trên đường cong.

Diện tích của đa giác tạo bởi các điểm $C(t_i)$ này có thể được tính theo công thức dây giày:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x(t_{i-1})$$

Chú ý rằng khi đường cong kín thì $C(t_0)$ và $C(t_n)$ trùng nhau.

Khi khoảng cách giữa các giá trị t_i tiến tới 0, ta có thể viết tổng này dưới dạng tích phân:

$$\frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt.$$

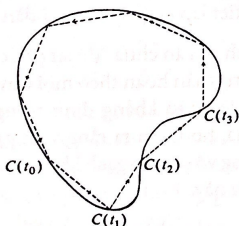
Những bạn đọc đã học qua giải tích vector sẽ biết đây là một công thức được suy ra từ định lý Green cho tích phân đường. Mặt khác, công thức này cũng có thể được chứng minh bằng cách áp dụng công thức trên cho trường hợp đường cong kín là đường gấp khúc.

Ví dụ, với trường hợp đường ellipse, ta có thể tính diện tích của miền bao bởi nó như sau:

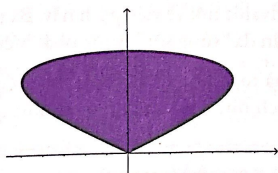
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t) \\ &\quad - (b \sin t)(-a \sin t)] dt \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$

Bài tập

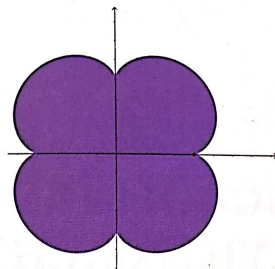
Sử dụng công thức tích phân trên để tính diện tích bao bởi các đường cong kín sau: a) $(\sin 2t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.



b) $(5 \cos t - \cos 5t, 5 \sin t - \sin 5t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



c) $(\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



4. Lời kết

Bài toán tích diện tích đa giác cũng như diện tích miền bao bởi đường cong kín là một đề tài tương đối thú vị khi giảng dạy về ứng dụng toán học cho học sinh phổ thông. Nó cũng có thể được kết hợp với hoạt động tiến hành đo đạc trắc địa thực tế trong các tiết học tích hợp hoặc cho học sinh tự thực hành ở nhà. Đồng thời, nội dung này cũng giúp học sinh làm quen với một số kiến thức sẽ được học ở môn giải tích bậc đại học.

Tài liệu tham khảo

- [1] Braden, B. (1986). The Surveyor's Area Formula. *College Mathematics Journal*, 17(4), 326-337. <https://doi.org/10.1080/07468342.1986.11972974>
- [2] Lee, Y., & Lim, W. (2017). Shoelace Formula: Connecting the Area of a Polygon and the Vector Cross Product. *The Mathematics Teacher*, 110(8), 631 - 636. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.110.8.0631>
- [3] Leise, T. (2007). As the Planimeter's Wheel Turns: Planimeter Proofs for Calculus Class. *The College Mathematics Journal*, 38(1), 24 - 31. <https://doi.org/10.1080/07468342.2007.11922214>
- [4] Stewart, J. (2019). *Calculus: concepts and contexts*. Boston, Ma, Usa: Cengage.



NGƯỜI KHÔNG CHUYÊN TÌM RA VIÊN GẠCH “EINSTEIN” BÍ ẨN¹

ERICA KLARREICH

(Người dịch: Nguyễn Duy Anh và Lê Vũ Minh Trí¹)

Giữa tháng 11 năm 2022, David Smith, một kỹ thuật viên in ấn đã nghỉ hưu có niềm vui thú với xếp hình, hình học fractal và bản đồ đường sá, đang làm việc mình yêu thích: chơi với những hình khối. Nhờ một phần mềm gọi là “PolyForm Puzzle Solver”, ông đã dựng được một miếng gạch hình cái mũ trông khá khiêm tốn. Ông đã bắt đầu thử nghiệm xem có thể phủ kín được bao nhiêu phần màn hình với duy nhất viên gạch lát này, với điều kiện không để hai viên để lên nhau hay để hở khoảng trống.

Thường thì khi ông tạo ra loại gạch mới, chúng sẽ hoặc tạo thành một họa tiết lặp, hoặc chỉ lát được một phần nhỏ màn hình. Viên gạch mũ có vẻ không thuộc cả hai loại này. Thế là Smith cắt 30 miếng giấy bìa màu hình viên gạch này và xếp chúng trên bàn. Rồi ông cắt thêm 30 cái nữa và tiếp tục xếp. “Tôi dần nhận ra rằng mỗi lần xếp là một cách lát tôi chưa thấy bao giờ”, ông nói. “Đó là một viên gạch lát ranh mãnh”. Ông gửi mô tả về viên gạch tới Craig Kaplan, một nhà khoa học máy tính ông quen tại Đại học Waterloo, Canada. Kaplan ngay lập tức bắt đầu tìm hiểu các tính chất của nó.

Ngày 20 tháng 3 vừa qua, Smith và Kaplan, cùng với 2 nhà nghiên cứu nữa, đã công bố rằng đây chính là thứ mà các nhà toán học đã tìm kiếm suốt hơn năm thập kỷ: một viên gạch duy nhất mà ta có thể dùng để lát toàn mặt phẳng, nhưng chỉ theo những họa tiết không lặp lại bất kỳ khối gạch nào. Các nhà toán học gọi những viên gạch, hoặc các bộ viên gạch, có tính chất đó là “phi tuần hoàn” (aperiodic), trái với hình vuông hoặc lục giác là những hình có thể phủ cả mặt phẳng theo các họa tiết lặp lại (hay “tuần hoàn”).

Viên gạch mũ ẩn chứa “đủ sự phức tạp để bẻ gãy trật tự tuần hoàn theo mọi quy mô”, các nhà nghiên cứu khẳng định trong bài báo. Hơn nữa, họ nhận ra rằng viên gạch mũ là một trong vô số viên gạch khác nhau có cùng tính chất này.

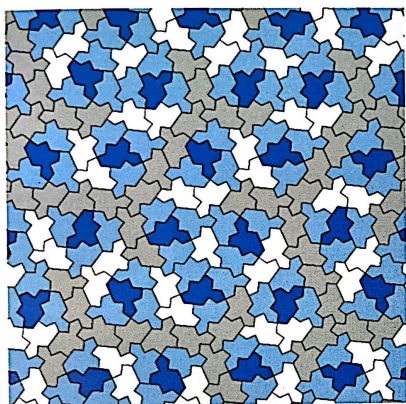
“Tưởng xa tận chân trời mà gần ngay trước mắt,” là những gì Doris Schattschneider, giáo sư toán danh dự tại Đại học Moravian, Pennsylvania nói về viên gạch này. Bà tả rằng bản thân đã “sững sờ” trước phát hiện này.

Các nhà toán học đã bắt đầu tìm kiếm một viên gạch như viên gạch mũ từ những năm

^{*} Nguồn: <https://www.quantamagazine.org/bobbyist-finds-maths-clusive-einstein-tile-20230404>.

¹ THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam.

60 thế kỷ trước, khi Robert Berger dựng ra 20426 loại gạch cùng nhau lát mặt phẳng một cách phi tuần hoàn. Công trình này là phát súng mở màn cho một cuộc đua dựng ra các bộ gạch có thể lát mặt phẳng phi tuần hoàn bằng ít loại hơn, lên đến đỉnh điểm là khám phá của Roger Penrose vào thập niên 70 với chỉ hai viên. Năm 1982, Dan Shechtman đã tìm ra những dạng đối xứng tương tự như của gạch lát Penrose trong tự nhiên, dưới hình hài các cấu trúc gọi là giả tinh thể (quasicrystal), qua đó giúp ông đạt giải Nobel Hóa học năm 2011.



Viên gạch mũ chỉ là một trong một họ các viên gạch phi tuần hoàn

Từ ấy, các nhà toán học vẫn không ngừng tìm kiếm một loại gạch duy nhất có thể lát mặt phẳng 2 chiều một cách phi tuần hoàn, mà không cho phép kẻ hồ hay gạch đè lên nhau. Ludwig Danzer, một nhà hình học người Đức, đã tình nghịch đặt tên cho loại gạch như thế là một “einstein” – chơi chữ của cụm từ tiếng Đức “ein stein”, nghĩa là “một miếng”.

Vào những năm 1990, hai nhóm khác nhau đã tìm ra cách chồng kề nhau một loại gạch 10 cạnh để phủ mặt phẳng. Trong thập kỷ sau đó, Joan Taylor, một nhà toán học nghiệp dư ở Tasmania, đã khám phá ra một hình với

nhiều miếng không liền với nhau. Cùng với Joshua Socolar, một nhà vật lý tại Đại học Duke, họ đã chứng minh được hình này có thể lát mặt phẳng một cách phi tuần hoàn. Và mới năm ngoái, Rachel Greenfield từ Viện Nghiên cứu Cao cấp Princeton và Terence Tao từ Đại học California, Los Angeles đã phát hiện ra một hình trong không gian nhiều chiều có thể lát không gian một cách phi tuần hoàn mà không cần quay hay lật.

Nhưng chưa ai tìm được một “einstein” đích thực – một hình 2 chiều đơn giản phủ mặt phẳng một cách phi tuần hoàn. Cuối cùng, giới toán học bắt đầu nghi ngờ sự tồn tại của chúng, theo lời Marjorie Senechal, một nhà nghiên cứu về lát gạch và giáo sư danh dự tại Đại học Smith. Bà cho biết thêm: việc một “einstein” đơn giản như viên gạch mũ của Smith lù lù trước mắt, chờ đợi được tìm ra là một sự thật “khó tin”.

Theo bà phỏng đoán, có lẽ lý do viên gạch mũ tránh được sự tìm kiếm đến tận bây giờ là do nhiều nhà toán học đã tập trung vào các hình đối xứng kiểu “cắm kỵ” – những kiểu mà không thể có trong các loại gạch lát tuần hoàn. Chẳng hạn như gạch lát Penrose có “đối xứng bậc 5” (đối xứng qua phép quay 72 độ quanh tâm), như ở các ngũ giác đều hay hình ngôi sao. Các ngũ giác đều không thể phủ mặt phẳng, nên bắt đầu từ các “đối xứng bậc 5” là khởi điểm khá tự nhiên.

Trái lại, viên gạch mũ chẳng có đối xứng nào cả, và “đơn giản đến mức tầm thường”, các tác giả bình luận. Cách lát này có quan hệ mật thiết với một cách lát tuần hoàn: lược tổ ong hình lục giác. Ta có thể tạo ra cách lát hình mũ từ cách lát bằng lục giác như sau: trước hết nối các trung điểm các cặp cạnh đối của lục giác. Lục giác sẽ bị chia thành 6 hình “cánh điều”. Mỗi viên gạch mũ được cấu thành từ 8 hình cánh điều liền nhau, kết hợp từ các lục giác kề nhau. Bất kỳ ai đầu tư chút sức lực, cùng một cái bút dạ và sàn nhà vệ sinh gạch hình lục giác cũng có thể viên

được một cách phù hợp mặt phẳng bằng hình mũ.



Khám phá của David Smith được coi là một khám phá khó tin.

Viên gạch mũ, Senechal nói, chỉ ra rằng sự liên kết giữa gạch lát tuần hoàn và phi tuần hoàn chặt chẽ hơn ta tưởng.

Kể từ lúc thông báo phát hiện này, các nhà toán học và người yêu thích lát gạch đã đổ xô tìm tới những loại gạch mới này, cắt chúng ra từ giấy, in 3-D, và làm trang trí họa tiết cho mũ và bánh quy của họ. Phong trào ấy đem lại một cảm giác “hơi siêu thực” cho Smith, một cư dân tại thành phố ven biển Bridlington phía bắc nước Anh. “Tôi không quen với mấy việc kiểu như thế này”.

Nhưng đây không phải là lần đầu tiên một cá nhân nghiệp dư với niềm đam mê to lớn tạo đột phá trong lát gạch. Robert Ammann, một nhân viên phân loại thư, đã độc lập tìm ra một trong các bộ gạch lát Penrose vào những năm 70. Marjorie Rice, một bà nội trợ ở California, tìm ra cả một họ gạch lát hình ngũ giác vào năm 1975. Và ta có Joan Taylor cùng gạch lát Socolar – Taylor. Có lẽ những người như họ, khác với các nhà toán

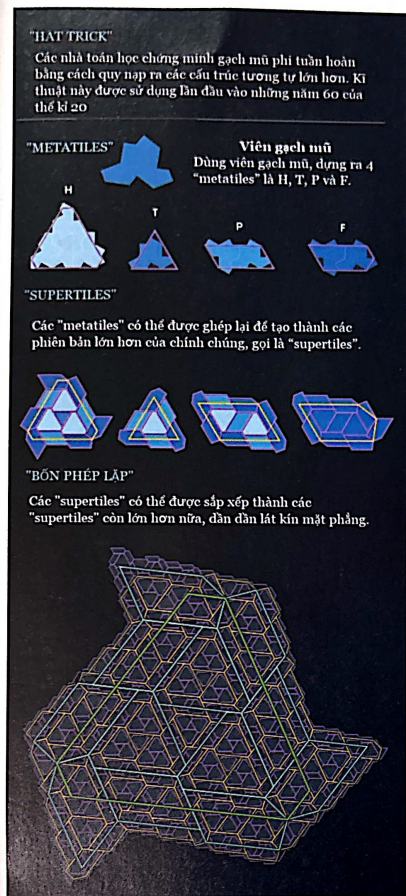
học, “không biết về độ khó của bài toán, vì thế không bị áp lực tâm lý”, Senechal nói.

Với các viên gạch có thể lát mặt phẳng một cách tuần hoàn, thì dùng chúng để lát mặt phẳng một cách không tuần hoàn là tương đối đơn giản. Ví dụ như đặt ngang một vài quân domino trong khi các quân domino khác để dọc. “Nghệ thuật thực sự là tìm một viên gạch với khả năng lát mặt phẳng, nhưng không thể làm vậy một cách tuần hoàn.” Socolar nói.

Ta không thể tạo ra một thuật toán xác định được liệu một tập hợp các viên gạch nào đó có thể lát mặt phẳng hay không (dù theo cách tuần hoàn hay phi tuần hoàn đi chăng nữa). Nên sau khi được Smith giới thiệu viên gạch mũ, Kaplan đã sử dụng một chương trình ông viết có khả năng đặt các viên gạch bao quanh một viên gốc và mở rộng dần dần từ đó. Ngoài các viên gạch lát mặt phẳng tuần hoàn, chưa ai từng tìm được loại gạch lát nào mà có thể lát quá 6 vòng quanh viên gạch gốc. Lần này, chương trình cứ chạy và chạy mãi, và nó lát tới tận 16 vòng gạch mũ trước khi Kaplan dừng chương trình vì đã thu thập đủ dữ liệu.

Trong khi đó, trước sự kinh ngạc của Kaplan, Smith có một khám phá mới: một viên gạch thứ hai, hình dạng giống một con rùa, cũng thuộc loại phi tuần hoàn. “Chỉ ra được 2 einstein liên tiếp thật là ngoài sức tưởng tượng,” nhóm nghiên cứu viết.

Giữa tháng Một, Smith và Kaplan đã tuyên dụng được 2 nhà nghiên cứu nữa: Chaim Goodman-Strauss, một nhà toán học ở Bảo tàng Toán học Quốc gia và Đại học Arkansas, và Joseph Samuel Myers, một kỹ sư phần mềm ở Cambridge, Anh, với bằng tiến sĩ tốt nghiệp. Myers dốc toàn bộ thời gian rảnh của mình cho viên gạch mũ, và chỉ trong hơn một tuần, ông đã chứng minh được nó phi tuần hoàn. “Chúng tôi khá sốc bởi tốc độ ông ấy giải bài toán này,” Kaplan nói.



Chứng minh này được biến tấu từ một phương pháp của Berger vào những năm 1960. Phương pháp đó bao gồm việc ghép một số viên gạch lại với nhau, tạo thành những phiên bản lớn hơn của chính chúng, hình thành một cấu trúc phân chia đẳng cấp. Đầu tiên, Myers xác định bốn hình trung gian được tạo từ viên gạch mũ, gọi là H , T , P và F . Ví dụ, viên gạch H được tạo ra từ 4 viên gạch mũ, ghép lại thành một hình hao hao một tam giác cụt ở các góc. Myers chứng minh rằng có thể ghép 4 hình lại với nhau để

tạo ra vẫn 4 hình đó với kích thước lớn hơn. Chẳng hạn, có thể tạo ra một viên gạch H lớn bằng cách xếp ba viên gạch H quanh một viên gạch T , rồi ghép các viên gạch P và F xung quanh hình vừa tạo.

Phương pháp này giúp ta dựng ra những viên gạch lớn dần. Có thể bắt đầu với bất kỳ loại gạch nào, chẳng hạn như viên gạch H , phóng to nó lên, và lấp đầy các khe hở bằng 4 hình trung gian H , T , P , F . Ta có thể lặp đi lặp lại việc này vô số lần để tạo ra một cấu trúc phân cấp từ những hình này, từ đó lát kín mặt phẳng. Đơn vị cơ bản của cấu trúc chính là những viên gạch mũ.

Họ đã chứng minh được cách lát hình thành từ các cấu trúc phân cấp này không bao giờ tuần hoàn. Đồng thời họ cũng chỉ ra rằng đó là cách duy nhất để phủ mặt phẳng bằng các hình mũ. Vì thế nên cách phủ mặt phẳng bằng các viên gạch mũ không thể tuần hoàn. "Một kết quả rất tuyệt vời", Socolar cho hay.

Vậy là còn lại loại gạch lát thứ hai Smith phát hiện: con rùa. Liệu chẳng việc một người đàn ông khám phá ra tận hai loại lát gạch phi tuần hoàn cùng lúc, trong khi phần còn lại của nhân loại bó tay trong suốt 50 năm, đơn thuần là một sự trùng hợp tuyệt diệu? Viên gạch mũ và "con rùa" nhìn giống nhau đến bất ngờ, khiến các nhà nghiên cứu nghi ngờ rằng con rùa cũng là một viên gạch phi tuần hoàn. Nhưng nghi ngờ vẫn chỉ là nghi ngờ, không phải chứng minh.

Thế rồi Myers có một khám phá: hóa ra, cả cái mũ và con rùa đều thuộc về một họ gồm vô số viên gạch lát mặt phẳng theo cùng một cách.

Mỗi viên gạch mũ có 13 cạnh: 6 dài, 6 ngắn tương ứng với các cạnh hình cánh diều, cộng với một cạnh ghép từ hai cạnh cánh diều ngắn. Bằng cách thay đổi kích cỡ độ dài các cạnh của viên gạch mũ, ta có thể thu được vô hạn không đếm được các viên gạch phi tuần hoàn. Tưởng tượng một thanh trượt:

di sang trái khiến cạnh ngắn (cùng với một cạnh ghép kể trên) ngắn đi; di sang phải thì cạnh dài nhỏ lại. “Con rùa” nằm về bên phải so với viên gạch mũ, nhưng đồng thời cũng có vô số hình khác thuộc kiểu tương tự.

Nếu ta đẩy thanh trượt hết nấc về bên trái, cạnh ngắn sẽ biến mất, viên gạch lúc này có hình chữ **V** 6 cạnh; đẩy hết nấc sang phải thì cạnh dài biến mất và ta được một hình bảy cạnh được đặt tên là “sao chổi”. Khác với viên gạch mũ, gạch hình chữ **V** và hình sao chổi có thể được dùng để lát mặt phẳng một cách tuần hoàn. Hình ở trung tâm thanh trượt, tức cạnh dài và cạnh ngắn bằng nhau, cũng có tính chất này.



Craig Kaplan, nhà khoa học máy tính ở đại học Waterloo, Canada.

Myers còn nhận ra rằng mình có thể sử dụng đặc tính hình học của viên gạch chữ **V** và sao chổi để chứng minh là tất cả các hình dọc theo thanh trượt, trừ hai đầu và trung điểm, đều là gạch loại phi tuần hoàn. Lập luận này, được Kaplan gọi là “một nước đi thiên tài của Toán học”, hoàn toàn mới lạ với bộ môn lát gạch. Trước đây, lĩnh vực này chỉ có 3 cách tiếp cận chính để chứng minh tính phi tuần hoàn, theo lời Goodman–Strauss. “Giờ ta có cách thứ tư.”

Các nhà toán học đang cố gắng thẩm phương pháp chứng minh mới này. “Tôi phải ngồi lại và nghiêm túc dành thời gian cho thứ này,” Senechal nói.

Một câu hỏi tự nhiên, Greenfield nói, là liệu rằng có thể tìm được một nguồn nào đó

tạo ra các cách lát mới không. Năm 1981, Nicolaas de Bruijn đã chứng minh được các cách lát Penrose là hình chiếu xuống không gian 2 chiều của các viên gạch lát tuần hoàn mặt phẳng 5 chiều. “Nếu tương tác hoặc cấu trúc của những cách lát (mới) này tương ứng với một cách lát gạch tuần hoàn trên không gian nhiều chiều hơn, điều ấy sẽ thực sự thú vị để tìm hiểu.” Greenfield nói.

Với tư cách một nhà vật lý, Socolar đã bắt đầu khám phá tính chất vật liệu của cách lát mới này. Ông thấy rằng: kiểu nhiễu xạ khi ánh sáng chiếu qua loại gạch lát này có những đỉnh dốc tương tự như ở giả tinh thể. Kể cả khi ấy, cách lát bằng gạch hình mũ vẫn “trông khác hẳn với tất cả những thứ tôi từng thấy trước đây”, ông khẳng định.

Trong lúc ấy, Smith chưa xong việc với viên gạch ranh mãnh của ông. Ông hiện dự định khám phá tiềm năng nghệ thuật và cách phối màu để làm nổi bật họa tiết của các viên gạch này. “Đường như nó có thái độ riêng,” ông nói. “Tôi nghĩ ta nên tôn trọng khi làm việc với nó.”

Bình luận của các dịch giả: Có ý kiến cho rằng cái mũ chưa thể được tính là “einstein” do thực chất chúng ta cần dùng tới cả cái mũ và viên gạch đối xứng trục với nó để lát toàn mặt phẳng, và hai viên gạch có thể tính là khác nhau. Tuy nhiên, đúng như lời hứa, David Smith đã có một phát hiện mới: một trong các họ hàng đặc biệt của cái mũ, gọi là **Tile(1, 1)**, có thể lát mặt phẳng một cách phi tuần hoàn nếu như ta cấm úp ngược viên gạch lại để ghép. Bằng cách điều chỉnh các cạnh của **Tile(1, 1)**, ông thu được một họ các viên gạch gọi là bóng ma. Lần này, mỗi bóng ma đều tự nó lát được mặt phẳng phi tuần hoàn, kể cả khi cho phép úp ngược viên gạch này để ghép. Bài báo về phát hiện này [<https://arxiv.org/abs/2305.17743>] được đăng lên arXiv vào cuối tháng 5 năm 2023, tại thời điểm đăng bài hiện chúng tôi chưa rõ tính xác thực.

LỜI GIẢI, ĐÁP ÁN

Các nhà chăn nuôi vui tính

Ta nhận xét thấy rằng, không có hai người nào cùng đến từ trang trại Cừ Béo (ta gọi tắt là những người Cừ Béo, viết tắt là C) lại ngồi cạnh nhau, có nghĩa là bên cạnh mỗi người Cừ Béo luôn phải có hai người Bò Mập (viết tắt là B). Thật vậy, ta xét một chuỗi xích những người Cừ Béo ngồi cạnh nhau, vậy xung quanh bởi những người Bò Mập. Người Cừ Béo ngồi ở rìa ngoài cùng sẽ có hai người ngồi cạnh – một là người Cừ Béo, một là người Bò Mập; điều này không thể xảy ra, vì khi đó thì người Cừ Béo đó hoá ra đã nói dối. Như vậy, không có hai người Cừ Béo nào ngồi cạnh nhau, và mỗi người Cừ Béo đều có hai người ngồi cạnh là những người Bò Mập.

Ta sẽ gọi những người Bò Mập không bị nhầm lẫn là những người *Bò Mập chân chính*. Theo điều kiện, hai người ngồi cạnh mỗi người Bò Mập phải đến từ các trang trại khác nhau. Như vậy, bên cạnh mỗi người Bò Mập phải luôn có một người Cừ Béo và một người Bò Mập. Điều này có nghĩa là chuỗi xích sau đây

$$BCBBCB \dots BCB$$

sẽ được lặp đi lặp lại cho đến khi gặp phải một người *Bò Mập không chân chính*. Nếu trước người Bò Mập không chân chính này (tính theo chiều kim đồng hồ) có một người

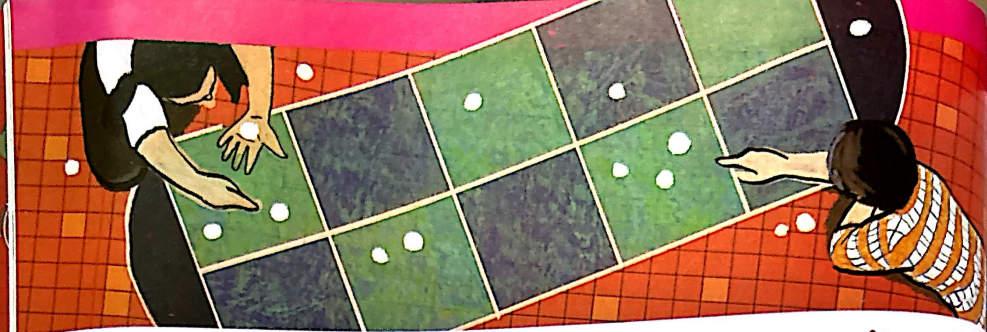
Cừ Béo, thì ngồi sau anh ta cũng phải là một người Cừ Béo khác. Còn nếu ngồi trước anh ta là một Bò Mập thì ngồi sau anh ta cũng phải là một người Bò Mập. Suy ra cách sắp chỗ ngồi với những Bò Mập không chân chính sẽ nhận được từ cách xếp “*BCBBCB \dots BCB*” hoặc bằng cách xếp một người Bò Mập không chân chính vào giữa hai Bò Mập, hoặc bằng cách cho một người Bò Mập chân chính đứng dậy ra khỏi bàn (khi đó một người Bò Mập ngồi cạnh anh ta sẽ biến thành một người Bò Mập không chân chính). Nếu thực hiện cách thứ nhất, số dư khi chia cho 3 của tổng số người ngồi quanh bàn sẽ tăng thêm 1. Còn nếu thực hiện cách thứ hai, số dư khi chia cho 3 của tổng số người ngồi quanh bàn sẽ giảm đi 1. Vì trong cách xếp “*BCBBCB \dots BCB*”, số người ngồi quanh bàn chia hết cho 3, còn số 25 lại chia 3 dư 1, ta phải thực hiện hai lần cách thứ hai, bỏ đi hai người Bò Mập trong cách xếp gồm 27 ghế theo quy luật “*BCBBCB \dots BCB*”. Do đó, số người đến từ trang trại Bò Mập bằng

$$27 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 16.$$

Đáp số: Quanh bàn có 16 người đến từ trang trại Bò Mập.

Đố vui

2 vòng.

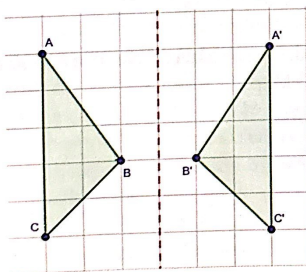


PHÉP DỜI HÌNH VÀ CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH

(Phần I: Phép dời hình)

NGÔ VĂN MINH, PHAN NGỌC MINH VÀ NGUYỄN THỊ NHUNG

Các bạn nhỏ thân mến, tiếp tục với những bài giảng được dạy tại Câu lạc bộ Unicorn Math Circle (UMC), bài viết lần này giới thiệu về chủ đề Phép dời hình và ứng dụng trong việc xây dựng công thức tính diện tích của những hình thường gặp. Những phép dời hình cơ bản được giới thiệu trong chuỗi những bài viết là: Phép đối xứng trục hay phép phản xạ (reflection), phép đối xứng tâm (point reflection), phép quay (rotation) và phép tịnh tiến (translation).



Hình 1.

Những phép dời hình được đề cập ở đây chỉ di chuyển hình mà không làm thay đổi hình dạng và kích thước của những hình đã cho và do đó những hình mới có diện tích không đổi so với hình cũ. Phép dời hình đầu tiên được

giới thiệu trong bài viết này là phép phản xạ. Các phép dời hình còn lại sẽ được giới thiệu lần lượt trong các bài viết tiếp theo.

Phép phản xạ tạo ra một hình mới bằng cách lật hình đã cho thành hình ảnh phản chiếu (mirror image) của nó.



Hình 2.

Trong Hình 1, tam giác ABC bên trái bị phản xạ (hay lật) qua đường kẻ màu đỏ để tạo thành tam giác $A'B'C'$ bên phải. Hoặc có thể nói là các đỉnh A, B , và C của tam giác được phản xạ lên đường kẻ màu đỏ để tạo ra ảnh gương là một tam giác có đỉnh A', B' , và C' khác. Người ta gọi đường kẻ màu đỏ đó là trục phản xạ, trục đối xứng hay trục gương.

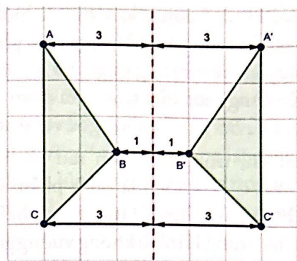
Lưu ý rằng hình bên phải, gọi là ảnh, nằm ngược lại hoàn toàn với hình ban đầu. Các bạn nhỏ có thể dễ dàng nhớ điều này khi liên hệ tới chiếc gương: Hình ảnh trong gương phản chiếu mọi thứ, nhưng tất cả trong ảnh bị ngược lại so với thực tế.

Phép phản xạ cũng được nhìn thấy ở nhiều hiện tượng trong thực tế. Cảnh mặt trời lặn xuống núi được phản xạ (soi bóng) xuống mặt sông là một trong những hình ảnh phản xạ rất đẹp trong cuộc sống.



Hình 3.

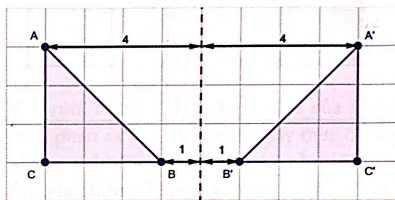
Do phép phản xạ chỉ lật hình qua một trục nên **hình ảnh phản xạ được giữ nguyên hình dáng và kích thước**. Điều này cho ta một kết luận quan trọng đó là: **Diện tích của hình phản xạ và hình đã cho là như nhau**. Chẳng hạn trong ví dụ trên tam giác ABC và tam giác phản xạ của nó là $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau. Hơn nữa, quan sát Hình 1, ta thấy rằng hai điểm A và A' có cùng khoảng cách tới trục phản xạ là 3 đơn vị. Điều tương tự cũng đúng với điểm B' cách 1 đơn vị và điểm C' cách 3 đơn vị. Hơn nữa, ta cũng thấy đoạn thẳng nối AA' , BB' hay CC' đều vuông góc với trục phản xạ. Bất cứ khi nào một hình được phản xạ, thì mỗi cặp điểm tương ứng phải cách trục phản xạ một khoảng bằng nhau và đoạn thẳng nối cặp điểm này phải vuông góc với trục phản xạ.



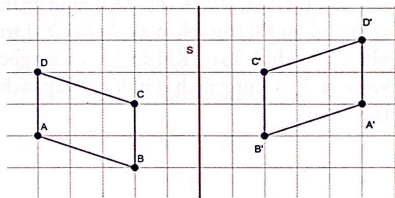
Hình 4.

Chúng ta cùng xem các ví dụ dưới đây để ôn lại những tính chất của phép phản xạ nhé.

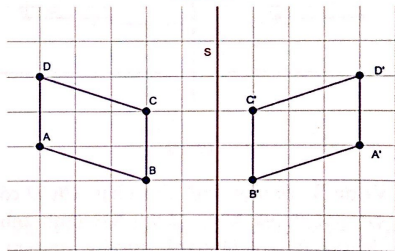
Ví dụ 1. Trong các hình cho dưới đây, cặp hình nào là phản xạ của nhau qua trục cho tương ứng?



Hình 5.



Hình 6.

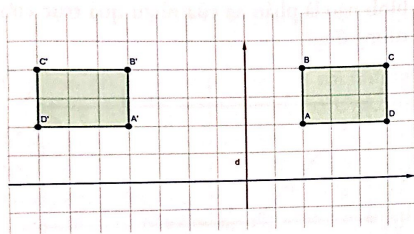


Hình 7.

Lời giải. Hình 5 tam giác $A'B'C'$ là hình ảnh phản xạ của tam giác ABC qua trục phản xạ d vì các cặp điểm tương ứng A và A' , B và B' , C và C' cùng cách đều trục d và đoạn thẳng AA' , BB' , CC' vuông góc với trục d .

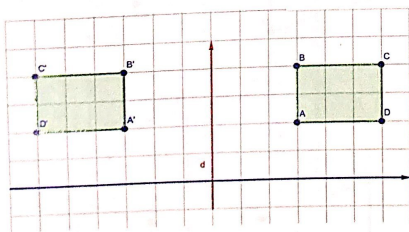
Tuy nhiên, trong hai hình sau hình bình hành $A'B'C'D'$ không là hình phản xạ của hình bình hành $ABCD$ qua trục phản xạ s bởi vì AA' trong Hình 6 không vuông góc với trục phản xạ và cặp điểm A , A' không cách đều trục phản xạ trong Hình 7.

Ví dụ 2. Hình chữ nhật $A'B'C'D'$ phải nằm ở vị trí nào để khi dùng phép phản xạ qua trục d ta thu được hình chữ nhật $ABCD$?



Hình 8.

Lời giải. Để $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là hình phản xạ của nhau thì trục phản xạ d phải ở vị trí như trong Hình 9 sau. Khi đó AA' vuông góc với d và A , A' cùng cách d một khoảng cách là 3 đơn vị.



Hình 9.

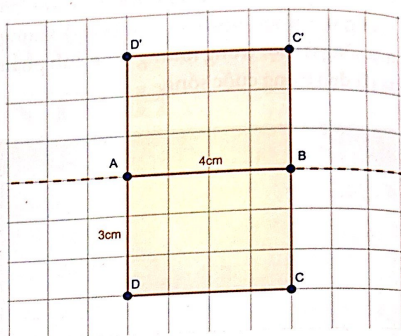
Ví dụ 3. Vẽ một hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4\text{ cm}$ và $AD = 3\text{ cm}$. Xác định ảnh phản xạ của $ABCD$ qua các trục đối xứng sau:

(a) Đoạn thẳng AB

(b) Đoạn thẳng BC

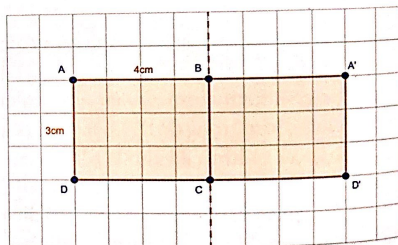
(c) Đoạn thẳng AC

Lời giải. (a) Ta xác định điểm D' sao cho A là trung điểm của đoạn DD' và điểm C' sao cho B là trung điểm của đoạn CC' . Khi đó ảnh phản xạ của $ABCD$ qua đoạn AB là hình chữ nhật $AB'C'D'$ được minh họa trong Hình 10.



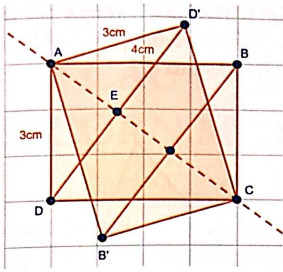
Hình 10.

(b) Tương tự như câu (a), ta xác định hai điểm A' và D' như Hình 11. Vậy $A'BCD'$ là ảnh phản xạ của hình chữ nhật $ABCD$ qua BC .



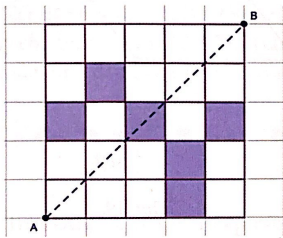
Hình 11.

(c) Do A và C nằm trên trục phản xạ nên ta chỉ cần xác định ảnh phản xạ của hai điểm B và D . Đầu tiên kẻ đường thẳng đi qua D và vuông góc với trục AC tại E . Sau đó xác định điểm D' nằm trên đường thẳng đó sao cho độ dài AD' bằng 3 cm. Làm tương tự với điểm B ta sẽ thu được ảnh phản xạ là hình chữ nhật $AB'C'D'$ như Hình 12.



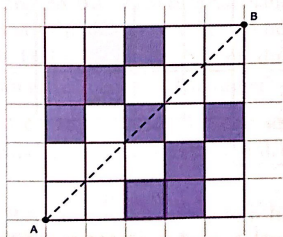
Hình 12.

Ví dụ 4. Hình vuông trong Hình 13 được tạo thành từ 25 ô vuông đơn vị, trong đó 6 ô vuông đã được tô màu. Hãy tô thêm 3 hình vuông nữa để hai nửa của hình vuông phản xạ với nhau qua trục đối xứng AB .



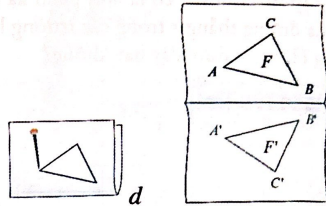
Hình 13.

Lời giải. Ta cần chỉ ra ảnh phản xạ của từng ô vuông đơn vị qua trục AB nằm ở vị trí nào trên hình. Rõ ràng ba ô vuông cần được tô màu nằm ở vị trí dòng 1, cột 3; dòng 5, cột 3 và dòng 2, cột 1. Hình sau khi tô màu được minh họa như trong Hình 14.



Hình 14.

Ví dụ 5. Vẽ một tam giác ABC (Hình F) và đường thẳng d trên một tờ giấy như trong Hình 15. Gấp tờ giấy dọc theo đường thẳng d và dùng một cây kim đâm xuyên qua ba đỉnh A, B và C . Ký hiệu các điểm ở mặt giấy kia là A', B', C' rồi nối chúng lại với nhau để tạo thành hình F' . Theo các bạn hình F' có là ảnh phản xạ của F qua đường thẳng d hay không?

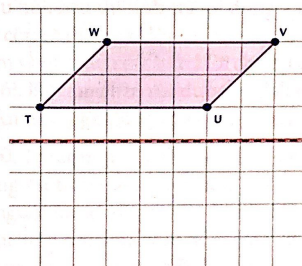


Hình 15.

Lời giải. Hình F' là ảnh phản xạ của F qua trục phản xạ d vì khi gấp tờ giấy theo đường thẳng d thì F' trùng khít với F , hay F được lật qua đường thẳng d để thành hình F' .

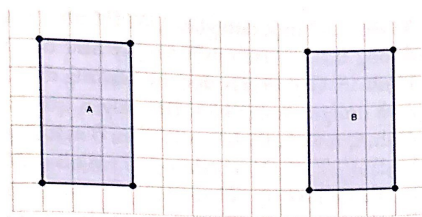
Dưới đây là một số bài tập để các em luyện tập thêm về hình phản xạ và trục đối xứng trong phép phản xạ.

Bài tập 1. Hãy vẽ ảnh phản xạ của hình bình hành qua trục phản xạ trong Hình 16.



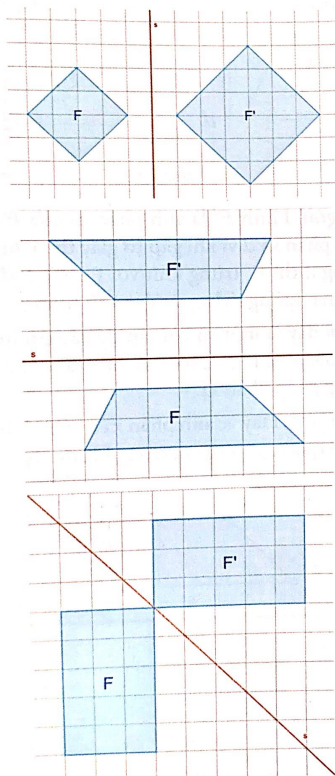
Hình 16.

Bài tập 2. Một hình chữ nhật A được phản xạ để tạo ra hình chữ nhật B như trong Hình 17. Hãy xác định trục đối xứng.



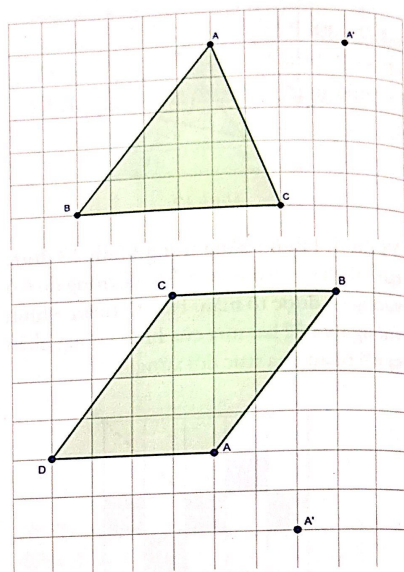
Hình 17.

Bài tập 3: Hình F' có là ảnh phản xạ của F qua đường thẳng s trong các trường hợp trong Hình 18 dưới đây hay không?



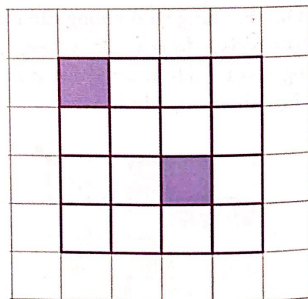
Hình 18.

Bài tập 4. Vẽ trục đối xứng d của hai điểm A và A' . Sau đó vẽ ảnh phản xạ của các hình trong Hình 19 qua d .



Hình 19.

Bài tập 5. Hãy tô thêm đúng hai ô vuông nữa để hình vuông trong Hình 20 có đúng hai trục đối xứng.



Hình 20.

ĐỀ THI TUYỂN SINH NĂM 2023-2024

CÂU LẠC BỘ TOÁN HỌC

UNICORN MATCH CIRCLE (Phần III)

Tiếp tục với nội dung về đề thi tuyển sinh vào Câu lạc bộ Unicorn Math Circle, trong số này, tạp chí Pi giới thiệu đến bạn đọc bài thi dành cho các bạn học sinh lớp 6. Thời gian đề xuất làm bài là 90 phút.

Bài 1. Trong một chiếc hộp kín có 7 quả bóng xanh, 8 quả bóng đỏ và 9 quả bóng vàng. Hỏi cần lấy ra ngẫu nhiên ít nhất bao nhiêu quả bóng để chắc chắn có 2 quả bóng mỗi màu?

Bài 2. Xét dãy hình dưới đây. Dựa vào quy luật, hãy cho biết có bao nhiêu hình tam giác trong 2023 hình đầu tiên tính từ trái sang?

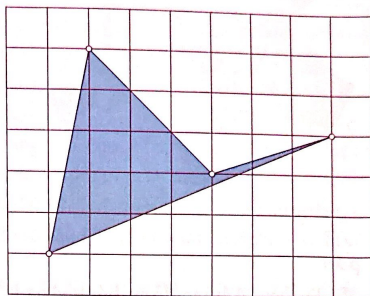
▲○▽■○○▲○▽■○○▲○▽■○○▲○▽■○○...

Bài 3. Trên bảng ta viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 tới 500. Tiếp theo, ta gạch đi tất cả các số là bình phương hoặc là lập phương của một số nguyên. Hỏi trong các số còn lại trên bảng không được xóa, số đứng ở vị trí thứ 105 là số nào?

Bài 4. Trong một câu lạc bộ văn nghệ chỉ có $\frac{1}{7}$ thành viên là các bạn nam. Sau khi có thêm 13 bạn đăng ký thì số bạn nam trong nhóm tăng lên, tuy nhiên tỷ lệ các thành viên nam so với thành viên nữ trong nhóm lại giảm đi. Hỏi số lượng các bạn nữ được bổ sung mới vào câu lạc bộ là bao nhiêu?

Bài 5. Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau, chia hết cho 11, được tạo thành từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9?

Bài 6. Biết rằng mỗi ô vuông trên lưới có cạnh là 1 đơn vị. Hỏi hình được tô đậm dưới đây có diện tích là bao nhiêu?



Bài 7. Mỗi ngày bạn An có thể ăn 2 hoặc 3 viên kẹo. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau để bạn An ăn hết 13 viên kẹo? Biết rằng các viên kẹo giống hệt nhau.

Bài 8. Một phần của một cuốn sách bị rơi ra, trong đó trang đầu tiên là 659 và trang cuối cùng có số trang cũng gồm các chữ số 6, 5, 9 nhưng được viết theo một thứ tự khác. Hỏi có bao nhiêu trang đã rơi ra?

Bài 9. Trong một cuộc thi toán, đề thi gồm có 20 câu hỏi, nếu thí sinh trả lời đúng 1 câu sẽ được cộng 5 điểm, trả lời sai một câu sẽ bị trừ 2 điểm và phải đưa ra câu trả lời cho tất cả các câu hỏi. Biết rằng bạn An được 79 điểm. Hỏi bạn An đã trả lời đúng bao nhiêu câu hỏi?

Bài 10. Trong một văn phòng có 6 nhân viên. Mỗi người trong số họ có thể là người Thật thà (người luôn nói sự thật) hoặc kẻ Dối trá (người luôn nói dối). Một hôm 6 người ngồi họp xung quanh một chiếc bàn tròn và mỗi người đều nói: "Trong số ba người gồm hai người ngồi cạnh tôi và người ngồi đối diện với tôi qua tâm bàn tròn, có đúng hai kẻ Dối trá". Hỏi trong văn phòng có bao nhiêu người Thật thà?



Đáp án

Bài 1. Ta thấy số bóng đỏ và bóng vàng là lớn nhất, nên ta cần lấy ra ngẫu nhiên ít nhất $8 + 9 + 2 = 19$ (quả bóng) để sau khi lấy tổng số bóng lấy ra trừ đi tổng số bóng đỏ và vàng tối đa có thể lấy được, còn lại 2 quả bóng xanh.

Bài 2. Ta thấy dãy hình gồm các nhóm gồm 6 hình



được sắp xếp liên tiếp nhau, trong mỗi nhóm hình có 2 hình tam giác. Do 2023 chia 6 bằng 337 dư 1, nên trong 2023 hình đầu tiên tính từ trái sang có số hình tam giác là: $337 \times 2 + 1 = 675$.

Bài 3. Trong số 100 số nguyên dương đầu tiên có 10 số là bình phương của một số nguyên (từ $1^2 = 1$ tới $10^2 = 100$), và 4 số là lập phương của một số nguyên (từ $1^3 = 1$ cho tới $4^3 = 64$).

Các số 1 và 64 đồng thời vừa là số chính phương và là lập phương đúng của một số nguyên. Vì vậy, theo nguyên lý bao hàm - loại trừ, trong 100 số đầu tiên, ta đã gạch đi $10 + 4 - 2 = 12$ số.

Trong 17 số tiếp theo từ 101 tới 117 không có số nào là bình phương hoặc lập phương

của một số nguyên, do $11^2 = 121$ và $5^3 = 125$. Vì vậy trong các số còn lại trên bảng không được xoá, số đứng ở vị trí thứ 105 là $105 + 12 = 117$.

Bài 4. Gọi số bạn nam là x . Vì số bạn nam chiếm $1/7$ tổng số thành viên, nên tổng số thành viên của câu lạc bộ sẽ là $7x$. Do đó số bạn nữ là $6x$. Ta gọi số bạn nữ được bổ sung mới vào câu lạc bộ là a . Khi đó số bạn nam được bổ sung mới vào câu lạc bộ sẽ là $13 - a$. Theo đề bài ta có: $13 - a > 0$, tức là $a < 13$. Hơn nữa

$$\frac{x + 13 - a}{6x + a} < \frac{1}{6} \Rightarrow 6(x + 13 - a) < 6x + a \\ \Rightarrow 7a > 78 \Rightarrow a > 11$$

Từ đó $a = 12$.

Vậy có 12 bạn nữ được bổ sung mới vào câu lạc bộ.

Bài 5. Giả sử $\overline{abc}$ là một số thỏa mãn điều kiện đề bài. Theo dấu hiệu chia hết cho 11 ta có: $a + c - b$ chia hết cho 11. Vì ta lấy a, b, c là các chữ số khác nhau trong tập $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, nên $a + c - b$ chỉ có thể bằng 11. Do đó $b = a + c - 11$.

Mà $a + c < 9 + 9 = 18$, nên $b < 18 - 11 = 7$. Do đó $b = 1; 3; 5$.

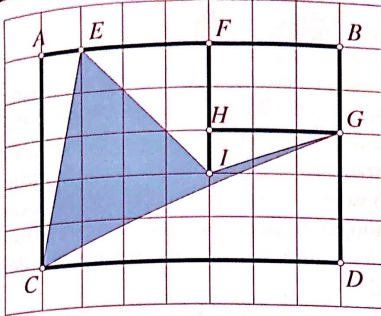
- Khi $b = 1 \Rightarrow a + c = 12 \Rightarrow a = 5, c = 7$ hoặc $a = 7, c = 5$, hoặc $a = 3, c = 9$ hoặc $a = 9, c = 3$. Ta được 4 số.

- Khi $b = 3 \Rightarrow a + c = 14 \Rightarrow a = 5, c = 9$ hoặc $a = 9, c = 5$. Ta được 2 số.

- Khi $b = 5 \Rightarrow a + c = 16 \Rightarrow a = 7, c = 9$ hoặc $a = 9, c = 7$. Ta được 2 số.

Vậy tổng cộng ta được 8 số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 6.



Ta thấy: Diện tích phần tô đậm bằng

$$\begin{aligned}
 & S_{ABCD} - S_{EAC} - S_{GDC} - S_{GHI} \\
 & \quad - S_{BGHF} - S_{IFE} \\
 &= 5 \times 7 - \frac{1 \times 5}{2} - \frac{3 \times 7}{2} - \frac{1 \times 3}{2} \\
 & \quad - 2 \times 3 - \frac{3 \times 3}{2} \\
 &= 10.
 \end{aligned}$$

Bài 7. Gọi x là số ngày bạn An ăn 2 viên kẹo và y là số ngày bạn An ăn 3 viên kẹo, với x, y là các số tự nhiên. Khi đó ta có: $2x + 3y = 13$. Từ đây ta suy ra y phải là số lẻ. Mặt khác $3y \leq 13 \Rightarrow y \leq 4$. Do đó $y = 1$ hoặc $y = 3$.

- Nếu $y = 1$, thì $x = \frac{13 - 3 \cdot 1}{2} = 5$. Tức là có 5 ngày bạn An ăn 2 viên kẹo và 1 ngày bạn

An ăn 3 viên kẹo. Số cách khác nhau để bạn An ăn các viên kẹo như vậy là $C_6^1 = 6$ (cách).

- Nếu $y = 3$, thì $x = \frac{13 - 3 \cdot 3}{2} = 2$. Tức là có 2 ngày bạn An ăn 2 viên kẹo và 3 ngày bạn An ăn 3 viên kẹo. Số cách khác nhau để bạn An ăn các viên kẹo như vậy là $C_5^2 = 10$ (cách). Vậy có tất cả $6 + 10 = 16$ cách khác nhau để bạn An ăn hết 13 viên kẹo.

Bài 8. Vì trang cuối cùng cũng có số trang gồm các chữ số 6, 5, 9 và phải là số chẵn nên trang cuối cùng sẽ có số trang là 956. Như vậy số trang đã rơi ra là: $956 - 659 + 1 = 298$.

Bài 9. Gọi số câu bạn An trả lời đúng là x , khi đó số câu bạn An trả lời sai là $20 - x$. Ta có:

$$5x - 2(20 - x) = 79 \Rightarrow 7x = 119 \Rightarrow x = 17.$$

Bài 10. Giả sử có nhiều hơn 1 người Thật thà. Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu có 2 người Thật thà ngồi cạnh nhau hoặc ngồi đối diện nhau thì từ đầu bài suy ra tất cả 4 người còn lại phải là người Dối trá, để thấy điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Trường hợp 2. Có 2 người Thật thà ngồi cách nhau 1 vị trí. Khi đó, từ giả thiết suy ra phải có 1 người Thật thà thứ 3 ngồi cạnh một trong hai người trước. Dẫn đến mâu thuẫn như Trường hợp 1.

CÁC NHÀ CHĂN NUÔI VUI TÍNH

GIA DƯƠNG

Xuân Phong cải trang thành một nhà buôn để điều tra về tình hình tài chính có nhiều biểu hiện nghi vấn của một Hiệp hội các nhà chăn nuôi gia súc. Thảm tử được mời đến dự buổi liên hoan cuối năm của Hiệp hội, được tổ chức tại một Tủu quán danh tiếng tại chân núi ngoại thành, xung quanh bao bọc bởi một rừng thông xanh tươi và đồng cỏ bát ngát mịn như nhung.

Tủu quán được trang trí bởi vô vàn ngọn nến sáng trưng với mùi thức ăn thơm nức lan toả, có 25 người đến từ hai Trang trại khác nhau là Cừu Bé và Bò Mập đang ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn to và rộng. Xuân Phong chọn cho mình một chỗ ngồi xa bàn tròn để tiện quan sát. Thảm tử cũng biết rằng người của Trang trại Cừu Bé luôn nói thật, còn những người của Trang trại Bò Mập lại luôn nói dối. Đến giờ nâng cốc cạn ly, mỗi người trong số 25 người bọn họ đều lần lượt hồ hởi đứng dậy và tuyên bố một câu giống nhau như sau: “Hai người ngồi

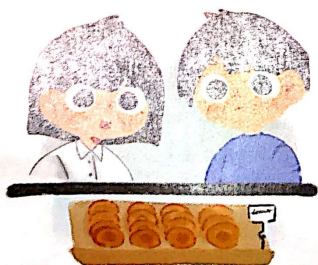
bên cạnh tôi đây đều đến từ cùng một Trang trại”. Xuân Phong thầm nghĩ “Không thể được!” Hoá ra, trong số họ có hai người ở trang trại Bò Mập, do vui quá nên nhầm lẫn và đã vô tình nói thật. “Thế chứ?” Xuân Phong phấn khích “Giờ thì mình biết có bao nhiêu người đến từ trang trại hay nói dối rồi!”

Vậy trong buổi liên hoan đó có bao nhiêu người đến từ trang trại Bò Mập nhỉ? Em hãy cùng thảm tử lập luận để tìm ra câu trả lời nhé.



CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI

1. Ở tiệm bánh ngọt có bán hai loại bánh donut, loại to và loại bé.



Loại donut to đắt gấp đôi loại donut bé. Hai bạn Hương và Bình cùng đến mua bánh donut, Hương mua 5 chiếc donut loại to và 3 chiếc loại bé, còn Bình mua 5 chiếc loại bé và 3 chiếc loại to. Hương phải trả nhiều hơn Bình là 20000 đồng. Hỏi giá mỗi loại donut là bao nhiêu tiền?

2. Cậu bé Hùng và cô bé Lan học cùng một lớp. Trong lớp học của hai em, số học sinh nam nhiều gấp đôi số học sinh nữ. Hùng có số bạn nam học cùng lớp nhiều hơn số bạn nữ học cùng lớp là 7 bạn. Hỏi Lan có bao

nhiều bạn nữ học cùng lớp?



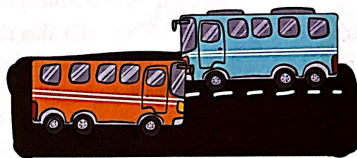
3. Bé Tít được tặng một gói kẹo gồm kẹo sô-cô-la và kẹo caramel. Trong 10 phút đầu tiên, Tít ăn hết 20% số kẹo, hơn nữa có 25% trong số đó là kẹo caramel. Tiếp theo Tít lại ăn thêm 3 chiếc sô-cô-la, vì thế phần kẹo caramel trong số kẹo mà Tít đã ăn bị giảm xuống còn 20%. Hỏi trong túi kẹo ban đầu mà Tít được tặng có tất cả bao nhiêu chiếc kẹo?



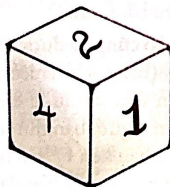
4. Có ba chú cáo là Bobby, Tommy và Ricky nói chuyện với nhau trên đồng cỏ. Tommy nói: “Bobby không phải là chú cáo ranh mãnh nhất trong số chúng ta”. Bobby nói: “Tôi ranh mãnh hơn Tommy”, Ricky nói: “Bobby ranh mãnh hơn tôi”. Biết rằng chú cáo ranh mãnh nhất trong ba chú nói dối, còn hai chú còn lại nói thật. Hỏi chú cáo ranh mãnh nhất tên là gì?



5. Hai chiếc xe bus đi ngược chiều về phía nhau trên cùng một con đường với các vận tốc không đổi. Chiếc thứ nhất khởi hành từ Hà Nội lúc 11h sáng và tới Hạ Long vào lúc 16h chiều, chiếc thứ hai khởi hành từ Hạ Long lúc 12h trưa và đến Hà Nội lúc 17h chiều. Hỏi hai chiếc gặp nhau lúc mấy giờ?



6. Trên 6 mặt của một con xúc xắc hình lập phương được ghi các số từ 1 tới 6 theo một cách nhất định. Người ta gieo con xúc xắc đó hai lần. Ở lần thứ nhất, tổng các số ở bốn mặt bên của xúc xắc bằng 12, ở lần thứ hai tổng các số ở bốn mặt bên của xúc xắc bằng 15. Hỏi số ở mặt đối diện với mặt được ghi số 3 là số nào?



(Con xúc xắc có 6 mặt, bao gồm 4 mặt xung quanh, một mặt đáy và một mặt trên cùng).

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHO HỌC SINH NHỎ TUỔI (Số 10 năm 2023)

1. Trong ngày sinh nhật của mình, An mời 5 người bạn tới nhà ăn bánh ga tô. An cắt cho người bạn thứ nhất $\frac{1}{6}$ chiếc bánh. Người bạn thứ hai được An cắt cho $\frac{1}{5}$ số bánh còn lại,



người bạn thứ ba được An cắt cho $\frac{1}{4}$ số bánh còn lại sau khi đã lấy bánh cho người bạn thứ hai, người thứ tư được chia $\frac{1}{3}$ số bánh còn lại sau khi đã lấy bánh cho người bạn thứ ba. Phần bánh cuối cùng được An cắt làm đôi và chia đều với người bạn thứ năm. Hỏi ai đã được chia nhiều bánh nhất?

Lời giải. Bạn nào cũng đã được chia số bánh đều như nhau (bằng $\frac{1}{6}$ chiếc bánh). Coi chiếc bánh ban đầu đã được chia thành 6 phần bằng nhau, người bạn thứ nhất nhận 1 phần, còn lại 5 phần nên $\frac{1}{5}$ số bánh còn lại là 1 phần bánh như người bạn đầu. Cứ như vậy, mỗi bạn đều nhận $\frac{1}{6}$ chiếc bánh ban đầu.

2. Tùng và Sơn cùng nhảy từ bờ xuống mặt nước và bơi về phía một hòn đảo. Khi Sơn bơi được 40 mét thì Tùng đã bơi đến được bờ của hòn đảo. Vừa chạm tới bờ, Tùng lại

ngay lập tức bơi ngược lại và gặp lại Sơn vào thời điểm Sơn đã bơi thêm được 8 mét nữa. Hỏi khoảng cách từ điểm xuất phát của hai bạn tới bờ hòn đảo là bao nhiêu?



Lời giải. Ký hiệu khoảng cách từ bờ tới bờ hòn đảo là a mét. Do quãng đường 8 mét bằng $\frac{1}{5}$ của khoảng cách 40 mét, nên Tùng khi quay ngược lại đã bơi được $a/5$ mét trong số $(a - 40)$ mét mà lúc đầu Sơn còn cách đảo. Do Sơn đã bơi thêm được 8 mét cho tới khi gặp Tùng, nên

$$a/5 + 8 = a - 40.$$

Suy ra $a = 60$ (mét).

Cách 2: Do quãng đường 8 mét bằng $\frac{1}{5}$ của khoảng cách 40 mét, và quãng đường bơi được của mỗi bạn tỷ lệ thuận với vận tốc bơi, nên quãng đường Tùng bơi được lúc xuôi gấp 5 lần quãng đường bơi được lúc ngược lại đến khi gặp Sơn. Hiệu số của hai quãng đường là

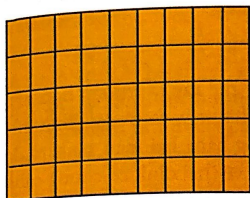
$$40 + 8 = 48 \text{ (mét)}$$

Do đó quãng đường Tùng bơi lúc xuôi cũng là khoảng cách từ bờ tới bờ hòn đảo là

$$\frac{48}{5-1} \times 5 = 60 \text{ (mét)}$$

Đáp số: 60 (mét).

3. Một tấm bìa hình chữ nhật kích thước 5×9 được cắt ra thành 10 hình chữ nhật nhỏ với các cạnh là các số nguyên. Em hãy chỉ ra rằng trong số các hình được cắt ra này có hai hình kích thước giống hệt nhau.



Lời giải. Ta sẽ viết ra tất cả các hình chữ nhật có thể cắt ra được từ hình ban đầu mà các cạnh là các số nguyên theo thứ tự diện tích tăng dần:

$$1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, 1 \times 4, 2 \times 2, 1 \times 5, 1 \times 6, 2 \times 3, 1 \times 7, 1 \times 8, 2 \times 4, \dots$$

Ta thấy tổng diện tích của 10 hình khác nhau đầu tiên trong danh sách này là:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8 = 46$$

Vậy tổng diện tích của 10 hình khác nhau bất kỳ trong số chúng không nhỏ hơn 46. Tuy nhiên diện tích của tấm bìa hình chữ nhật đã cho là

$$5 \times 9 = 45$$

Suy ra trong số 10 hình được cắt ra từ tấm bìa đã cho có ít nhất hai hình kích thước giống hệt nhau.

4. Một nàng tiên đi tới một con suối nguồn với hai chiếc bình trên tay. Một chiếc bình có thể tích 5 lít, còn chiếc kia có thể tích 4 lít. Nước chảy ra từ suối nước theo hai dòng, một dòng chảy mạnh hơn, còn dòng kia yếu hơn. Nàng tiên đặt đồng thời hai chiếc bình mỗi chiếc dưới một dòng nước.



Khi đã hứng đầy được một nửa chiếc bình nhỏ, nàng tiên đổi vị trí hai bình cho nhau. Và vô cùng ngạc nhiên, hai chiếc bình được hứng đầy vào cùng một lúc. Hỏi dòng nước mạnh chảy mạnh hơn gấp mấy lần so với dòng nước còn lại?

Lời giải. Giả sử dòng nước mà lúc đầu chiếc bình lớn hơn đã hứng chảy gấp k lần so với dòng nước kia. Do trước khi đổi chỗ hai chiếc bình, trong bình nhỏ hơn đã hứng được 2 lít, nên trong bình lớn hơn đã hứng được $2k$ (lít). Sau khi đổi chỗ, chiếc bình lớn đã hứng thêm được $5 - 2k$ (lít), còn chiếc bình nhỏ hứng được 2 lít: số nước này gấp k lần so với lượng nước chảy vào bình lớn sau khi đổi chỗ, tức là

$$k(5 - 2k) = 2.$$

Từ đây ta có $2k^2 - 5k + 2 = 0$, suy ra $k = 2$ hoặc $k = 1/2$. Trong cả hai trường hợp ta luôn thấy một dòng nước chảy mạnh gấp đôi dòng còn lại.

5. Bây giờ tuổi của Dũng đúng bằng gấp đôi tuổi của Hùng vào năm khi số tuổi của Dũng bằng tuổi của Hùng bây giờ. Khi Hùng có số tuổi bằng tuổi của Dũng bây giờ thì tổng số tuổi của hai người lúc đó sẽ bằng 63. Hỏi bây giờ tuổi của Dũng và Hùng là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi tuổi của Dũng bây giờ là a , còn tuổi của Hùng bây giờ là b . Khi đó điều kiện đầu tiên có thể viết thành hệ thức

$$a = 2(b - (a - b)),$$

còn điều kiện thứ hai viết lại được ở dạng

$$a + (a + (a - b)) = 63.$$

Giản ước các hệ thức

$$a = 2(b - (a - b))$$

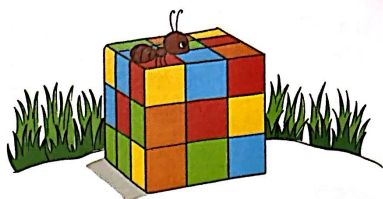
$$a + (a + (a - b)) = 63$$

ta nhận được $3a = 4b$ và $3a - b = 63$. Suy ra $a = 28, b = 21$.

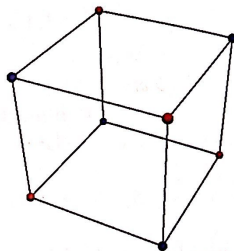
Vậy bây giờ tôi 28 tuổi và bạn 21 tuổi.



6. Một chú kiến bò theo các cạnh của một hình lập phương, chú chỉ quay đầu chuyển hướng tại các đỉnh của hình. Liệu có bao giờ xảy ra trường hợp khi chú đi qua một đỉnh nào đó của hình lập phương tận 25 lần, trong khi chú chỉ đi qua tất cả các đỉnh còn lại tại mỗi đỉnh đúng 20 lần?



Lời giải. Không thể xảy ra trường hợp nêu trong đề bài. Thật vậy, ta tô các đỉnh của hình lập phương bằng hai màu xanh và đỏ như trong hình vẽ (hai đỉnh có chung cạnh là khác màu nhau). Khi đó theo mỗi đường đi chuyển của chú kiến, các màu tại các đỉnh sẽ luân phiên xen kẽ nhau. Do đó tổng số lần đi qua các đỉnh màu đỏ của chú kiến khi bò theo các cạnh chỉ sai khác không quá 1 so với tổng số lần đi qua các đỉnh màu xanh.



Tuy nhiên, trong trường hợp của đề bài, hiệu số lần đi qua 1 đỉnh màu xanh và số lần đi qua 1 đỉnh màu đỏ bằng ± 5 . Điều này mâu thuẫn.



PROOF BY CONTRADICTION (Part I)

NGHIA DOAN¹

In this article, when approaching a problem, we start by assuming that some fact or statement is true. Next, we demonstrate that the consequences of this assumption lead to inconsistency. Therefore, we can conclude that the original assumption is incorrect. This approach of thinking about a problem is called a *proof by contradiction*.

Example 1. Together, 5 soccer players together scored 14 goals, with every player scoring at least 1. Prove that at least 2 of them scored the same number of goals.

Remark. Let say if a student comes up with a solution like this: “If the first player scored 1 goal, the second player scored 2, and so on, then the total number of goals would be 15, which is more than 14. Problem solved.”

What’s wrong with this? The main issue with this argument is that it deals with *one specific scenario*: 1 goal by the first player, 2 by the second, and so on. What if no one scored exactly 1 goal, or the third player scored 7? We cannot use one case to prove the entire problem.

Solution. *Proof by contradiction* provides a simple framework for a proof. Let’s start by assuming that **no two players scored the same number of goals**. If we order the players by their scores, then the first player scored *at least 1*, the second one *at least 2*, the third one *at least 3*, the fourth one *at least 4*, and the fifth one *at least 5*. (Note that we never claim that a player achieved some specific score: we always use the word *at least*.) The players altogether scored at least $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. However, the total score is 14. **This contradiction** proves that

there must have been at least two players with the same score.

Example 2. The parliament of a certain country is formed by representatives from 8 provinces. Fifty of these parliamentarians decide to form a committee. Prove that this committee will include 8 people from the same province or people from all 8 provinces.

Solution. *To the contrary, assume that we were able to find a group of 50 parliamentarians such that no more than 7 people are from the same province and at least 1 province is not represented. Then, since 1 province is not there, at most 7 provinces are included. At the same time, each province is represented by at most 7 parliamentarians. So, there should be no more than $7 \times 7 = 49$ representatives altogether. This conclusion contradicts the fact that the group has 50 people. Therefore, such a committee cannot be formed.*

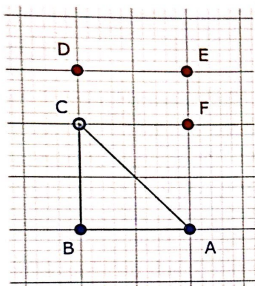
Example 3. Can you find five odd numbers whose sum is 100?

Solution. *Let assume that you can, then after subtracting one of the numbers from 100. We know that the sum of any two odd numbers is an even number, so the sum of any three numbers is an odd number, thus the sum of any four numbers is an even number, and finally the sum of any five numbers is an odd number. This contradicts the fact that 100 is an even number.*

¹Ottawa, Canada.

Example 4. Each node of a square grid is coloured either black or white. Prove that it is possible to find 3 nodes of the same colour that are located at the vertices of a right triangle.

Solution. Let assume the opposite, so no right triangle can have all three vertices with the same colour. Let $\triangle ABC$ be a right triangle such that A and B with the same colour, while C has the other. Since we can always rotate the grid, let $\triangle ABC$ be coloured as shown in the diagram below.



Now, consider points D, E , and F temporarily shown as red nodes. None of them can be the same colour of A (and B). Thus all of them has the same colour and they form a right triangle with three vertices of the same colour. This contradicts the assumption, thus it is possible to find 3 nodes of the same colour that are located at the vertices of a right triangle.

Example 5. A closed path is made up of 11 line segments. Can one line, not containing a vertex of the path, intersect each of its segments?

Solution. No, it cannot. Suppose we did have such a line. If we trace the path, each time we intersect the given line we pass from the half-plane on one side of the line to the half-plane on the other side (any line divides a plane into two half-planes) Since the path is closed, we

begin and end on the same side of the line. The sides of the line alternate, so the close path would have evenly many vertices.

This contradicts the fact that the close path has 11 segments.

Vocabulary

- Argument: (d.t) lập luận.
- Assume: (đ.t) giả sử.
- Committee: (d.t) ủy ban.
- Contrary: (d.t) điều trái ngược, to the contrary: giả sử ngược lại.
- Demonstrate: (đ.t) chứng minh, chỉ ra.
- Diagram: (d.t) sơ đồ, hình vẽ.
- Even: (t.t) chẵn, even number: số chẵn.
- Fact: (d.t) sự kiện.
- Framework: (d.t) cái khung, sườn bài.
- Grid: (d.t) lưới, square grid: lưới ô vuông.
- Inconsistency: (d.t) điều phi lý, vô lý.
- Issue: (d.t) vấn đề.
- Line: (d.t) đường thẳng.
- Node: (d.t) nút, nút giao.
- Odd: (t.t) lẻ, odd number: số lẻ.
- Order: (đ.t) sắp xếp, sắp thứ tự.
- Parliament: (đ.t) nghị viện.
- Path: (d.t) đường đi.
- Plane: (d.t) mặt phẳng, half-plane: nửa mặt phẳng.
- Proof by contradiction: chứng minh bằng phản chứng.
- Representative: (đ.t) đại biểu.
- Rotate: (đ.t) quay, xoay.
- Scenario: (d.t) kịch bản, tình huống.
- Score: (đ.t) ghi bàn.
- Segment: (d.t) đoạn thẳng.
- Soccer: (d.t) bóng đá.
- Statement: (d.t) phát biểu, khẳng định.
- Sum: (d.t) tổng.
- Triangle: (d.t) tam giác.
- Vertex: (d.t) đỉnh, (số nhiều) vertices.

MỜI BẠN ĐỌC RA ĐỀ CHO PI

Chuyên mục Thách thức Toán học



trân trọng mời các thầy cô giáo, các bạn học sinh, sinh viên đóng góp các bài toán hay do mình sáng tác hoặc sưu tầm.



YÊU CẦU ĐỐI VỚI BÀI TOÁN GỬI ĐĂNG

Dành cho đối tượng là học sinh THCS hoặc THPT

Có ý tưởng hay độc đáo trong lời giải.

Đề bài sáng tác hoặc sưu tầm, được gửi kèm cùng lời giải. Đề bài chưa được công bố hay gửi công bố trên các tạp chí, báo toán bằng tiếng Việt.

Với những bài toán khó, khuyến khích tác giả gửi thêm các bài phân tích về ý tưởng, phương pháp tư duy, mối liên hệ với các bài toán khác để đăng trong chuyên mục Học cùng Pi.

Đối với đề sưu tầm cần ghi rõ nguồn gốc (trên các sách báo, tạp chí hay trong các kỳ thi). Đối với các bài toán được phát triển từ một bài toán khác, cũng khuyến khích tác giả giới thiệu bài toán gốc.

Các bạn học sinh, sinh viên có thể bài trên chuyên mục Thách thức Toán học sẽ nhận được giấy khen từ Tạp chí Pi.

Thông tin Tòa soạn

- Gửi bài: bbt@pi.edu.vn
- Giao dịch: vanphong01.pi@gmail.com



Hotline: 024.3215.1407



Website: www.pi.edu.vn



- Mỗi bài toán đề xuất (kèm theo lời giải) cần được nêu rõ là bài sáng tác hay bài sưu tầm.
- Bài giải cho mỗi bài toán cần được trình bày trong một file riêng hoặc một tờ giấy riêng.
- Người đề xuất bài toán hoặc gửi bài giải cho các bài toán trong mục “Thách thức kỳ này” cần ghi rõ họ, đệm, tên và nơi làm việc/học tập, số điện thoại liên hệ. Nếu là học sinh (hoặc sinh viên) cần ghi rõ là học sinh lớp mấy (hoặc sinh viên năm thứ mấy).
- Các bài toán trong mục Thách thức kỳ này hướng tới các độc giả là học sinh phổ thông; được phân chia thành các mức độ B, A , và được sắp xếp theo độ khó tăng dần, theo đánh giá chủ quan của Ban biên tập. Các bài toán mức độ B không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THCS; các bài toán mức độ A không đòi hỏi các kiến thức vượt quá chương trình môn Toán cấp THPT.
- Cách thức gửi bài toán đề xuất hoặc lời giải: gửi file thu được bằng cách scan, ảnh chụp (rõ nét) của bản viết tay, hoặc được soạn thảo bằng các phần mềm LaTeX, Word tới bbt@pi.edu.vn hoặc gửi qua đường bưu điện tới Tòa soạn (xem địa chỉ tại bìa 2).
- Hạn gửi lời giải cho các bài toán P771–P780: trước ngày 15/2/2024.

THÁCH THỨC KỲ NÀY

P771. (Mức B) Để chuẩn bị cho việc biên soạn đề thi Olympic các môn khoa học năm 2024, Ban tổ chức đã huy động một số giảng viên tham dự 10 cuộc họp. Biết rằng, mỗi cuộc họp có đúng 20 giảng viên tham dự và không có hai giảng viên nào cùng có mặt ở 2 cuộc họp. Chứng minh rằng có ít nhất 63 giảng viên được huy động để tham dự các cuộc họp.

Duy Minh, Hà Nội

P772. (Mức B) Cho a là một số vô tỷ. Chứng minh rằng tồn tại số vô tỷ b , sao cho cho $a + b$ và ab đều là các số vô tỷ.

Vũ Hồng Sơn, Phú Thọ

P773. (Mức B) Giải phương trình

$$2x^3 - 6x + 5 = 0.$$

Trần Văn Lâm, Thái Nguyên (st)

P774. (Mức B) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

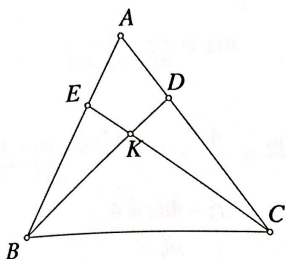
$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq 3.$$

Nguyễn Việt Hùng, Hà Nội (st)

P775. (Mức B) Cho tam giác ABC và hai điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh AC, AB sao cho

$$\angle ABD = \frac{1}{3} \angle ABC \text{ và } \angle ACE = \frac{1}{3} \angle ACB.$$

Gọi K là giao điểm của BD và CE . Chứng minh rằng, nếu $KD = KE$ thì tam giác ABC hoặc là tam giác cân hoặc là tam giác vuông.



Nguyễn Minh Hà, Hà Nội

P776. (Mức B) Cho bảng ô vuông kích thước 2×6 . Hai bạn, Bảo và Hưng, chơi trò chơi sau: Luân phiên nhau, mỗi bạn, ở lượt chơi của mình, điền vào một ô vuông còn trống của bảng một số nguyên dương tùy ý, khác tất cả các số đã có trong bảng.

Sau khi tất cả các ô vuông con của bảng đã được điền số, ô chứa số lớn nhất của mỗi hàng được tô màu đen. Nếu có hai ô được tô đen có chung đỉnh, Bảo sẽ được coi là người thắng cuộc; trường hợp ngược lại, Hưng được coi là người thắng cuộc. Biết rằng, Bảo là người điền số đầu tiên vào bảng, Hỏi, nếu chơi đúng, ai sẽ là người chắc chắn thắng cuộc?

Nguyễn Phúc Hưng, Đắk Nông

P777. (Mức A) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x^2 + xf(y) + y) = 2x + f(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$.

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

P741. (Mức B) Có 6 tô phở giống hệt nhau được xếp thành hai chồng, như ở hình dưới đây:



($\mathbb{R}^+$ là tập tất cả các số thực dương.)

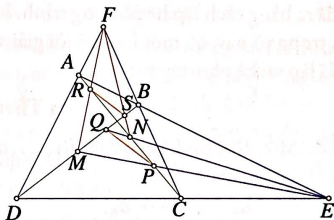
Hồ Thanh Lai, Bình Định

P778. (Mức A) Cho số nguyên tố p thỏa mãn $p \equiv 2 \pmod{3}$. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn

$$x^3 - y^3 = 19p(x^2 + y^2).$$

Kiều Đình Minh, Phú Thọ

P779. (Mức A) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. AB cắt CD tại E , AD cắt BC tại F (A nằm giữa D và F , C nằm giữa D và E). Gọi M, N tương ứng là trung điểm BD, AC . EM, EN lần lượt cắt AC, BD tại P, Q . FM, FN tương ứng cắt AC, BD tại R, S . Chứng minh rằng, PQ song song hoặc trùng với RS .



Đỗ Thanh Sơn, Hà Nội

P780. (Mức A) Ký hiệu $\mathcal{D}$ là tập tất cả các ước nguyên dương của 6^{2023} . Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: trong k số bất kỳ thuộc $\mathcal{D}$, luôn tồn tại 3 số có tích là lập phương của một số nguyên.

Phạm Công Hoàn, Lai Châu

Hỏi, nếu xếp cả 6 tô phở thành một chồng, thì chiều cao của chồng đó là bao nhiêu?

Lời giải (của các bạn: Phạm Đức Minh, lớp 10 Toán 2, trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, tỉnh Nam Định, và Võ Hải Yến, lớp 11H, trường THPT chuyên Nguyễn Quang

Điều, tỉnh Đồng Tháp).

Từ giả thiết của bài toán, ta thấy, khi chồng thêm hai tờ lên một chồng tờ đã có thì chiều cao của chồng tờ đã có đó sẽ tăng thêm

$$17 - 11 = 6 \text{ (cm)}.$$

Vì vậy, do chồng gồm 4 tờ cao 17 cm, nên khi chồng thêm hai tờ lên chồng đó, ta sẽ có một chồng gồm 6 tờ, với chiều cao là:

$$17 + 6 = 23 \text{ (cm)}.$$

Đáp số: 23 cm.

Bình luận và Nhận xét

1. Bài đã ra là một bài toán rất đơn giản, có thể sử dụng trong việc bồi dưỡng học sinh khá, giỏi Toán cấp Tiểu học.

2. Ngoại trừ hai bạn đã nêu tên ở phần Lời giải trên đây, hầu hết các bạn còn lại, trong số các bạn đã gửi lời giải tới Tạp chí, đều giải bài đã ra bằng cách lập hệ phương trình. Rất tiếc, trong số này, có một bạn có lời giải sai, do đã lập sai hệ phương trình.

Hà Thanh

P742. (Mức B) Cho 10 số hữu tỷ $a_1, \dots, a_{10}$ khác 0 và thỏa mãn

$$i/ a_1 + \dots + a_8 = a_1 a_2 \dots a_8.$$

$$ii/ a_1 + \dots + a_9 = a_1 a_2 \dots a_9.$$

$$iii/ a_1 + \dots + a_{10} = a_1 a_2 \dots a_{10}.$$

Chứng minh rằng, $\frac{4 - 3a_{10}}{a_{10}}$ là bình phương của một số hữu tỷ.

Lời giải (dựa theo đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc).

Từ i/ và ii/, suy ra

$$a_9 = a_1 a_2 \dots a_8 \cdot (a_9 - 1). \quad (1)$$

Từ ii/ và iii/, suy ra

$$a_{10} = a_1 a_2 \dots a_8 \cdot a_9 \cdot (a_{10} - 1). \quad (2)$$

Do $a_i \neq 0$ với mọi $i = \overline{1, 9}$ nên từ (1) suy ra, $a_9 \neq 1$. Vì thế, chia (2) cho (1), vế theo vế, ta được:

$$\frac{a_{10}}{a_9} = \frac{a_9 \cdot (a_{10} - 1)}{a_9 - 1};$$

do đó

$$a_{10} (a_9^2 - a_9 + 1) = a_9^2.$$

Suy ra

$$a_{10} = \frac{a_9^2}{a_9^2 - a_9 + 1};$$

vì vậy

$$\begin{aligned} \frac{4 - 3a_{10}}{a_{10}} &= \frac{4}{a_{10}} - 3 = \frac{4(a_9^2 - a_9 + 1)}{a_9^2} - 3 \\ &= \frac{a_9^2 - 4a_9 + 4}{a_9^2} \\ &= \left(\frac{a_9 - 2}{a_9} \right)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Do a_9 là số hữu tỷ, nên $\frac{a_9 - 2}{a_9}$ cũng là số hữu tỷ. Vì vậy, (3) cho ta điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc đều là lời giải đúng.

Lưu Thị Thanh Hà

P743. (Mức B) Cho tam giác ABC không cân, có đường cao AH và phân giác trong AD . Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó cắt đường thẳng BC tại M . Gọi E là hình chiếu vuông góc của B trên đường phân giác ngoài của góc A . Chứng minh rằng, các đường thẳng CE, AD cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AMH .

Lời giải (của người chấm bài).

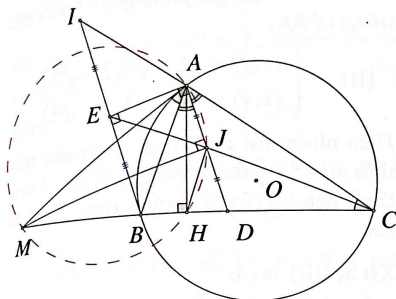
Ký hiệu (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Gọi I là giao điểm của CA và BE ; J là giao điểm của CE và AD .

Do là phân giác ngoài của góc CAB , nên AE là phân giác trong của góc BAI . Mà $BI \perp AE$ nên I đối xứng với B qua AE ; do đó, E là trung điểm của BI . (1)

Do AD và AE tương ứng là phân giác trong và phân giác ngoài của góc BAC , nên

$AD \perp AE$. Suy ra, $AD \parallel IB$ (vì cùng vuông góc với AE). (2)
Do IA, BD, EJ đồng quy tại C , nên từ (2) và (1) suy ra, J là trung điểm của AD . (3)



Hình 1. ($AB < AC$)

Tiếp theo, ta có:

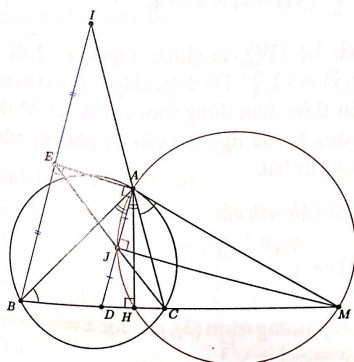
- Nếu $AB < AC$ (xem Hình 1) thì tia AB nằm giữa hai tia AM và AD . Do đó

$$\angle MAB = \angle ACB \text{ (vì } MA \text{ tiếp xúc (O) tại A),}$$

$$\angle MAD = \angle MAB + \angle BAD.$$

Từ đó, với lưu ý AD là phân giác trong của góc BAC , suy ra

$$\angle MAD = \angle ACB + \angle CAD = \angle ADM.$$



Hình 2. ($AB > AC$)

- Nếu $AB > AC$ (xem Hình 2) thì tia AC nằm

giữa hai tia AM và AD . Do đó

$$\angle MAC = \angle ABC \text{ (vì } MA \text{ tiếp xúc (O) tại A),}$$

$$\angle MAD = \angle MAC + \angle CAD.$$

Từ đó, với lưu ý AD là phân giác trong của góc CAB , suy ra

$$\angle MAD = \angle ABC + \angle BAD = \angle ADM.$$

Như vậy, với ABC là tam giác không cân, ta có AMD là tam giác cân tại M . Từ đây và (3), suy ra $MJ \perp AJ$; do đó,

$$\angle AJM = 90^\circ = \angle AHM$$

(vì $AH \perp BC$, theo giả thiết).

Vì vậy, bốn điểm A, J, H, M cùng nằm trên một đường tròn; hay, giao điểm của CE và AD nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AMH . Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Do AMH là tam giác vuông tại H (theo giả thiết), nên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là đường tròn đường kính AM . Vì thế, kết luận của đề bài tương đương với $MJ \perp AJ$, trong đó, J là giao điểm của CE và AD . Điều này gợi ý việc tìm hiểu tam giác AMD .

Dễ dàng nhận ra, tam giác AMD cân tại M . Vì thế, $MJ \perp AJ$ tương đương với J là trung điểm của AD .

Để ý rằng $DA \parallel BE$, sẽ thấy ngay, J là trung điểm của AD tương đương với E là trung điểm của BI , trong đó, I là giao điểm của CA và BE .

Lời giải trên đây là "sản phẩm" của những nhận xét và suy diễn đơn giản nêu trên.

2. Những suy diễn đã nêu ở 1. cho thấy, bài đã ra là một bài toán nhẹ nhàng, giúp người giải bài hình thành và rèn luyện tư duy hình học trong sáng.

3. Một số bạn đọc đã dùng những công cụ quá mạnh (hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa, phương tích của một điểm đối với một đường tròn, ...) để giải bài đã ra.

4. Tất cả lời giải Tập chí đã nhận được từ

bạn đọc, rất tiếc, đều là lời giải chưa đúng, do người giải bài chưa xét hết các cấu hình có thể, hoặc *ngộ nhận* rằng, “không mất tổng quát, có thể giả sử $AB < AC$ ”.

Hạ Vũ Anh

P744. (Mức B) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=2+\sqrt{xy(xy-3)} \\ xy(x-y)=2(2-x). \end{cases}$$

Lời giải (dựa theo cách giải của bạn Nguyễn Chánh Thiện, lớp 9/12, trường THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh).

Điều kiện xác định của hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy \leq 0 \\ xy \geq 3. \end{cases} \quad (1)$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ, dễ thấy, nếu (x, y) là nghiệm của hệ đã cho thì $x+y \geq 2$. (2)

Vì vậy, (x, y) là nghiệm của hệ đã cho chỉ khi x, y thỏa mãn đồng thời (1) và (2).

Xét (x, y) mà x, y là các số thực thỏa mãn đồng thời (1) và (2).

Khi đó, hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} (x+y-2)^2 = xy(xy-3) \\ xy(x-y) = 2(2-x). \end{cases} \quad (I)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (I) & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) - (x^2y^2 - 3xy - 4) = 0 \\ xy(x-y) + (x-y) = 4 - (x+y) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x+y-4) - (xy+1)(xy-4) = 0 \\ (x-y)(xy+1) = 4 - (x+y) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(y-x)(xy+1) - (xy+1)(xy-4) = 0 \\ x+y-4 = (y-x)(xy+1) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+1)(x^2 - y^2 + xy - 4) = 0 \\ x+y-4 = (y-x)(xy+1) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -1 \\ x+y = 4 \end{cases} \quad (II) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + xy - 4 = 0 \\ x+y-4 = (y-x)(xy+1). \end{cases} \quad (III) \end{aligned}$$

Theo định lý Vi-et đảo cho phương trình bậc hai, (x, y) là nghiệm của hệ (II) khi và chỉ khi x, y là hai nghiệm của phương trình (ẩn t):

$$t^2 - 4t - 1 = 0.$$

Vì thế, từ kết quả giải phương trình vừa nêu trên, ta được:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}) \\ (x, y) = (2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}). \end{cases}$$

Hiển nhiên, hai cặp số (x, y) vừa nêu trên thỏa mãn đồng thời (1) và (2). Vì thế, chúng là các nghiệm của hệ phương trình trong đề bài.

Xét hệ (III); ta có:

$$\begin{aligned} (III) & \Leftrightarrow \begin{cases} y(y-x) = x^2 - 4 \\ xy(y-x) = 2x - 4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y(y-x) = x^2 - 4 \\ x(x^2 - 4) = 2x - 4 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y(y-x) = x^2 - 4 \\ (x-2)(x^2 + 2x - 2) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y(y-2) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 2x - 2 = 0 \\ y(y-x) = x^2 - 4. \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} (IV) \\ (V) \end{matrix} \end{aligned}$$

Giải hệ (IV), ta được $(x, y) = (2, 0)$ và $(x, y) = (2, 2)$. Dễ thấy, cả hai cặp số vừa nêu đều thỏa mãn đồng thời (1) và (2). Vì thế, chúng là các nghiệm của hệ phương trình trong đề bài.

Xét hệ (V); ta có:

$$(V) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 2 = 0 \\ y(y-x) = -2(x+1). \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Giải phương trình (3), ta được $x = -1 - \sqrt{3}$ và $x = -1 + \sqrt{3}$.

- Thế $x = -1 - \sqrt{3}$ vào (4), ta được $y^2 + (1 + \sqrt{3})y - 2\sqrt{3} = 0$.

Giải phương trình vừa nêu trên, ta được

$$y = y_1 = \frac{-(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{4 + 10\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{và } y = y_2 = \frac{-(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{4 + 10\sqrt{3}}}{2}$$

Với $(x, y) = (-1 - \sqrt{3}, y_1)$, hiển nhiên có $x + y < 0 < 2$. (5)

Xét $(x, y) = (-1 - \sqrt{3}, y_2)$. Do

$$\sqrt{4 + 10\sqrt{3}} < \sqrt{24} < 5 < 4 + 3(1 + \sqrt{3}),$$

nên $y_2 < 2 + (1 + \sqrt{3})$; suy ra

$$x + y = -(1 + \sqrt{3}) + y_2 < 2. \quad (6)$$

(5) và (6) cho thấy, cả hai cặp số $(x, y) = (-1 - \sqrt{3}, y_1)$ và $(x, y) = (-1 - \sqrt{3}, y_2)$ đều không thỏa mãn (2). Vì thế, chúng không là nghiệm của hệ phương trình trong đề bài.

- Thế $x = -1 + \sqrt{3}$ vào (4), ta được:

$$y^2 + (1 - \sqrt{3})y + 2\sqrt{3} = 0.$$

Phương trình vừa nêu trên có

$$\Delta = 4 - 10\sqrt{3} < 0,$$

nên nó vô nghiệm.

Vậy, tóm lại, hệ phương trình trong đề bài có tất cả bốn nghiệm, là:

$$(x, y) = (2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}),$$

$$(x, y) = (2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}),$$

$$(x, y) = (2, 0) \text{ và } (x, y) = (2, 2).$$

Bình luận và Nhận xét

Trong số các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có một lời giải sai, do người giải bài đã mắc lỗi kiến thức cơ bản, khi dùng nhất "hệ số" trong quá trình biến đổi các phương trình của hệ phương trình đã cho.

Hoàng Phúc

P745. (Mức B) Xét ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{2023}.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của tích ba số đó.

Lời giải (của người chấm bài).

Từ hệ thức đã cho trong đề bài, suy ra

$$(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = (\sqrt{2023} - \sqrt{x})^2.$$

Do đó

$$\sqrt{yz} = \frac{2023 - y - z + x}{2} - \sqrt{2023x}. \quad (1)$$

Đặt $t = \frac{2023 - y - z + x}{2}$; ta có $t \in \mathbb{Q}$ (do $x, y, z \in \mathbb{N}^*$), và từ (1) suy ra

$$yz = t^2 - 34t\sqrt{7x} + 2023x$$

(do $2023 = 7 \cdot 17^2$).

Do đó

$$\sqrt{7x} = \frac{t^2 - yz + 2023x}{34t}. \quad (2)$$

Vì $t \in \mathbb{Q}$ và $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, nên từ (2) suy ra $\sqrt{7x} \in \mathbb{Q}$. (3)

Ta biết rằng, với $m \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{m}$ hoặc là số vô tỷ, hoặc là số nguyên dương. Vì thế, từ (3), do $7x \in \mathbb{N}^*$, ta có $\sqrt{7x} \in \mathbb{N}^*$. Suy ra, $7x$ là số chính phương; mà 7 là số nguyên tố, nên

$$x = 7a^2,$$

với a là một số nguyên dương.

Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được

$$y = 7b^2 \text{ và } z = 7c^2,$$

với b, c là các số nguyên dương.

Do đó

$$xyz = 7^3 \cdot (abc)^2, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} 17\sqrt{7} &= \sqrt{2023} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \\ &= \sqrt{7}(a + b + c). \end{aligned} \quad (5)$$

Từ (5) suy ra, $a + b + c = 17$. (6)

Vì thế, áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng - trung bình nhân cho ba số dương

THÁCH THỨC TOÁN HỌC

a, b, c , ta được:

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 = \left(\frac{17}{3} \right)^3.$$

Từ đó, do $abc \in \mathbb{N}^*$, suy ra

$$abc \leq \left[\left(\frac{17}{3} \right)^3 \right] = 181. \quad (7)$$

Vì 181 là số nguyên tố (dễ dàng kiểm tra) và a, b, c là các số nguyên dương nhỏ hơn 17 (do (6)), nên $abc \neq 181$. Do đó, từ (7) ta có:

$$abc \leq 180. \quad (8)$$

Vì $a, b, c > 0$, nên từ (4) và (8), suy ra

$$xyz \leq 7^3 \cdot 180^2 = 7^3 \cdot 6^4 \cdot 5^2.$$

Hơn nữa, với $x = y = 7 \cdot 6^2, z = 7 \cdot 5^2$, ta có $x, y, z \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{7}(6+6+5) = \sqrt{2023},$$

$$\text{và } xyz = 7^3 \cdot 6^4 \cdot 5^2.$$

Vì vậy, giá trị lớn nhất của tích xyz bằng $7^3 \cdot 6^4 \cdot 5^2$, hay 11113200.

Bình luận và Nhận xét

Tất cả các lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, đều là lời giải chưa đúng, do người giải bài hoặc mắc sai sót về kiến thức cơ bản (chẳng hạn, xét phép chia hết cho một số vô tỷ), hoặc mắc lỗi logic cơ bản (khẳng định giá trị lớn nhất của xyz bằng 11113200 ngay sau khi mới chỉ chứng minh được $xyz \leq 11113200$, không kiểm tra các số x, y, z có tích bằng 11113200 có thỏa mãn hay không các ràng buộc đã nêu trong đề bài).

Hoàng Phúc

P747. (Mức A) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{9}{4(ab+bc+ca)} \leq \frac{9}{4}.$$

Lời giải (phỏng theo ý giải của đa số lời giải Tạp chí đã nhận được từ bạn đọc).

Ký hiệu (1) là bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài. Ta có:

(1)

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - \frac{9a^2b^2c^2}{ab+bc+ca} \\ & \leq 9a^2b^2c^2 \\ & \Leftrightarrow 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - \frac{9a^2b^2c^2}{ab+bc+ca} \\ & \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad (\text{do } a^2 + b^2 + c^2 = 3abc) \\ & \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + \frac{9a^2b^2c^2}{ab+bc+ca} \\ & \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \quad (2) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur cho ba số dương a^2, b^2, c^2 , ta được:

$$\begin{aligned} & a^4 + b^4 + c^4 + \frac{9a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ & \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \quad (3) \end{aligned}$$

Vì $a, b, c > 0$ và

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

nên

$$\frac{9a^2b^2c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{9a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (4)$$

Từ (4) và (3) hiển nhiên suy ra (2); vì vậy, (1) được chứng minh.

Bình luận và Nhận xét

1. Từ lời giải trên, dễ thấy, dấu “=” ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

2. Bất đẳng thức Schur, cho ba số thực không âm x, y, z , có bốn dạng cơ bản sau:

- $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y).$
- $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leq xyz.$
- $x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0.$
- $xyz \geq \frac{4(x+y+z)(xy+yz+zx) - (x+y+z)^3}{9}.$

(Ở dạng thứ ba, trong liệt kê trên, bất đẳng

thức Schur được mở rộng thành bất đẳng thức

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0,$$

trong đó, r là một số thực tùy ý.)

Ở lời giải trên, ta đã sử dụng bất đẳng thức Schur ở dạng thứ tư, trong liệt kê trên.

3. Trong số các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, có hai lời giải tuy có hướng giải đúng, nhưng một số lập luận trong lời giải không đúng.

Võ Quốc Bá Cẩn

P748. (Mức A) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , có M là trung điểm BC . Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại D . Gọi N là hình chiếu vuông góc của O trên AD . Trên đường trung trực của BC lấy điểm K , không nằm trên (O) và khác M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC cắt đường thẳng AK tại điểm thứ hai F . Các đường thẳng NF và AM cắt nhau tại E . Chứng minh rằng tam giác AEF cân.

Lời giải (dựa theo Đáp án của BBT).

Phần trình bày dưới đây là lời giải cho bài toán, trong trường hợp tam giác ABC không cân tại A .

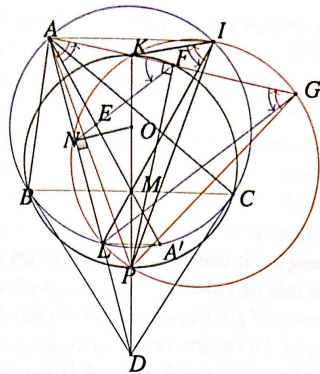
(Với trường hợp tam giác ABC cân tại A , xin xem ở phần “Bình luận và Nhận xét” dưới đây.)

Gọi L, A' tương ứng là giao điểm thứ hai của các đường thẳng AD, AM với (O) .

Do AD là đường đối xứng của tam giác ABC nên $LA' \parallel BC$. Do đó, tứ giác $BCA'L$ là một hình thang cân; suy ra, L và A' đối xứng với nhau qua KM .

Gọi I là điểm đối xứng với A qua KM ; do O thuộc KM và A thuộc (O) , nên I thuộc (O) . Hơn nữa, do I, M, L tương ứng, đối xứng với A, M, A' qua KM , và A, M, A' thẳng hàng, nên I, M, L thẳng hàng.

Gọi P là giao điểm thứ hai của KM và đường tròn (BKC) .



Do PK là trung trực của BC , nên PK là một đường kính của (BKC) . Do đó

$$PF \perp KF. \quad (1)$$

Tiếp theo, ta có:

$$\begin{aligned} \overline{MK} \cdot \overline{MP} &= P_{M/(BKC)} = \overline{MB} \cdot \overline{MC} \\ &= P_{M/(O)} = \overline{ML} \cdot \overline{MI}. \end{aligned}$$

Do đó, bốn điểm K, P, L, I cùng thuộc một đường tròn.

Gọi G là giao điểm thứ hai, khác K , của AF và đường tròn $(KPLI)$.

Do A và I đối xứng với nhau qua KM , nên

$$\begin{aligned} (GP; GA) &\equiv (GP; GK) \equiv (IP; IK) \\ &\equiv (AK; AP) \equiv (AG; AP) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Do đó, tam giác PGA cân tại P . Từ đây và (1), suy ra F là trung điểm của AG . (2)

Do N là hình chiếu vuông góc của tâm O trên dây cung AL , nên N là trung điểm của AL . Từ đây và (2), suy ra FN là đường trung bình của tam giác AGL ; do đó, $FN \parallel GL$. Vì thế, ta có:

$$\begin{aligned} (FA; FE) &\equiv (GK; GL) \equiv (IK; IL) \\ &\equiv (AA'; AK) \equiv (AE; AF) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Do đó, tam giác AEF cân tại E . Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Dễ thấy, nếu tam giác ABC cân tại A thì $N \equiv O$ và năm điểm A, K, N, M, F thẳng hàng. Do đó, NF và AM là hai đường thẳng

trùng nhau; vì thế, điểm E không tồn tại. Do vậy, để bài đã ra là một bài toán chuẩn xác, cần bổ sung thêm giả thiết “tam giác ABC không cân tại A ”.

2. Khi xem xét, đánh giá các lời giải Tập chí đã nhận được từ bạn đọc, người chấm bài đã mặc định đó là lời giải cho bài đã ra với giả thiết bổ sung nêu trên.

3. Trong số các bạn đọc đã gửi lời giải tới Tập chí, có một bạn đã sử dụng phép nghịch đảo – đối xứng để giải bài, và cho một lời giải đẹp, ngắn gọn. Tuy nhiên, rất đáng tiếc, lời giải đó không đúng trong trường hợp K là giao điểm của OM và AC .

Hạ Vũ Anh

P749. (Mức A) Cho dãy số (a_n) với $a_1 = a$ là một số nguyên và

$$a_{n+1} = a_n^3 + 2a_n^2 - 3a_n - 8 \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Tìm tất cả các số nguyên a sao cho

$$a_{2023} \equiv 508 \pmod{2024}.$$

Lời giải (của người chấm bài).

Trước hết, ta nhắc lại kết quả quen biết sau:

Bổ đề. Với mọi số nguyên m , số $m^2 + 1$ không có ước nguyên tố dạng $4k + 3, k \in \mathbb{N}$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, tồn tại số nguyên m và số nguyên tố $p = 4k + 3, k \in \mathbb{N}$, sao cho

$$m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (1)$$

Vì $p \nmid 1$ và p là số nguyên tố, nên từ (1) ta có $p \nmid m$; do đó, $(p, m) = 1$. Vì vậy, theo định lý Fermat nhỏ,

$$m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (2)$$

Mặt khác, do $p = 4k + 3$, nên

$$\begin{aligned} m^{p-1} &= m^{4k+2} = (m^2)^{2k+1} \\ &\equiv (-1)^{2k+1} \pmod{p} \quad (\text{do (1)}) \\ &\equiv -1 \pmod{p}, \end{aligned}$$

mâu thuẫn với (2).

Mâu thuẫn nhận được cho ta điều cần chứng minh theo yêu cầu của Bổ đề.

Trở lại bài toán.

Do 2024 có phân tích chuẩn là $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ nên

$$\begin{aligned} a_{2023} &\equiv 508 \pmod{2024} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_{2023} \equiv 508 \pmod{8} \\ a_{2023} \equiv 508 \pmod{11} \\ a_{2023} \equiv 508 \pmod{23} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_{2023} \equiv 4 \pmod{8} \\ a_{2023} \equiv 2 \pmod{11} \\ a_{2023} \equiv 2 \pmod{23}. \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= (a_n - 2)(a_n^2 + 4a_n + 5) \\ &= (a_n - 2)((a_n + 2)^2 + 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4) \end{aligned}$$

Vì 11 và 23 là các số nguyên tố có dạng $4k + 3$, nên theo Bổ đề, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} (a_n + 2)^2 + 1 &\not\equiv 0 \pmod{11}, \\ (a_n + 2)^2 + 1 &\not\equiv 0 \pmod{23}. \end{aligned}$$

Do đó, từ (4) suy ra, với mọi $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_n &\equiv 2 \pmod{11} \Leftrightarrow a_{n-1} \equiv 2 \pmod{11}, \\ a_n &\equiv 2 \pmod{23} \Leftrightarrow a_{n-1} \equiv 2 \pmod{23}. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} a_{2023} &\equiv 2 \pmod{11} \Leftrightarrow a \equiv 2 \pmod{11}, \quad (5) \\ a_{2023} &\equiv 2 \pmod{23} \Leftrightarrow a \equiv 2 \pmod{23}. \quad (6) \end{aligned}$$

Tiếp theo, với n là số nguyên dương tùy ý, ký hiệu r và s , tương ứng, là số dư của a_n và a_{n+1} , trong phép chia cho 8.

Từ công thức xác định dãy (a_n) , ta có bảng sau:

r	0	1	2	3	4	5	6	7
s	0	0	2	4	4	0	6	4

Từ bảng trên và tính tùy ý của n , suy ra, s là số chẵn với mọi $n \geq 2$. Do đó, a_n là số chẵn với mọi $n \geq 2$. Vì vậy, từ bảng trên, ta có:

$$\begin{aligned} a_{2023} &\equiv 4 \pmod{8} \Leftrightarrow a_2 \equiv 4 \pmod{8} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 3 \pmod{8} \\ a \equiv 4 \pmod{8} \\ a \equiv 7 \pmod{8}. \end{cases} \quad (7) \end{aligned}$$

Do

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{11} \\ a \equiv 2 \pmod{23} \end{cases} \Leftrightarrow a \equiv 2 \pmod{253},$$

nên từ (3), (5), (6) và (7), suy ra

$$a_{2023} \equiv 508 \pmod{2024}$$

khi và chỉ khi a là nghiệm của một trong các hệ phương trình đồng dư sau:

$$\begin{cases} a \equiv 3 \pmod{8} \\ a \equiv 2 \pmod{253} \end{cases}, \quad \begin{cases} a \equiv 4 \pmod{8} \\ a \equiv 2 \pmod{253} \end{cases},$$

$$\begin{cases} a \equiv 7 \pmod{8} \\ a \equiv 2 \pmod{253} \end{cases}.$$

Sử dụng định lý Trung Quốc về phần dư, lần lượt giải các hệ trên, ta được:

$$a \equiv 1267 \pmod{2024}, a \equiv 508 \pmod{2024},$$

$$a \equiv 255 \pmod{2024}.$$

Vậy, tất cả các số nguyên a cần tìm theo yêu cầu đề bài là tất cả các số nguyên có số dư là 255, hoặc 508, hoặc 1267, trong phép chia cho 2024.

Bình luận và Nhận xét

- Bài đã ra là một bài toán mớ cạc, chán phương, giúp người giải bài rèn luyện kỹ năng giải phương trình đồng dư bậc ba, và phương trình đồng dư tuyến tính.
- Tất cả các lời giải Tập chí nhận được từ bạn đọc, rất tiếc, đều là các lời giải không đúng.

Lưu Thị Thanh Hà

P750. (Mức A) Một cuộc thi Olympic Toán học diễn ra hàng năm trong 2 ngày thi, mỗi ngày thi có 3 bài toán, mỗi bài toán có điểm tối đa là 7. Năm nay, cuộc thi này có sự tham gia của 40 đội tuyển (mỗi đội tuyển có ít nhất 1 học sinh). Thống kê điểm sau khi hoàn tất khâu chấm thi, ban giám khảo nhận thấy rằng số điểm các em đạt được là những số nguyên từ 14 đến 42. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra một nhóm có ít nhất 9 em học sinh, sao cho với mỗi em trong nhóm, số học sinh cùng điểm với em đó lớn hơn số học sinh cùng đội tuyển với em đó.

Lời giải (dựa theo ý giải của Đáp án do BBT cung cấp).

Đánh số thứ tự các đội tuyển, lần lượt bởi $1, 2, \dots, 40$.

Ta gọi đội tuyển có số thứ tự k , $k \in \{1; 2; \dots; 40\}$, là đội tuyển k .

Với mỗi cặp số nguyên dương (m, k) , mà $m \in \{14; 15; \dots; 42\}$ và $k \in \{1; 2; \dots; 40\}$, ký hiệu $x_{m,k}$ là số học sinh đạt m điểm của đội tuyển k .

Với mỗi $m \in \{14; 15; \dots; 42\}$, ký hiệu c_m là số học sinh đạt m điểm của tất cả 40 đội; và với mỗi $k \in \{1; 2; \dots; 40\}$, ký hiệu s_k là số học sinh của đội tuyển k .

Theo giả thiết của bài ra, $x_{m,k} \in \mathbb{N}$ với mọi $m \in \{14; 15; \dots; 42\}$ và với mọi $k \in \{1; 2; \dots; 40\}$; $c_m \in \mathbb{N}$ với mọi $m \in \{14; 15; \dots; 42\}$; và $s_k \in \mathbb{N}^*$ với mọi $k \in \{1; 2; \dots; 40\}$.

Để thấy, điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài tương đương với việc tồn tại ít nhất 9 cặp (m, k) đôi một phân biệt, $m \in \{14; 15; \dots; 42\}$ và $k \in \{1; 2; \dots; 40\}$, sao cho $x_{m,k} \geq 1$ và $c_m > s_k$. (1)

Theo định nghĩa của $x_{m,k}$, c_m và s_k , ta có:

$$c_m = \sum_{k=1}^{40} x_{m,k} \quad (2)$$

với mọi $m \in \{14; 15; \dots; 42\}$,

$$s_k = \sum_{m=14}^{42} x_{m,k} \quad (3)$$

với mọi $k \in \{1; 2; \dots; 40\}$.

Do $x_{m,k} \in \mathbb{N}$, nên từ (2) suy ra

$$c_m = 0 \Leftrightarrow x_{m,k} = 0 \quad \forall k \in \{1; 2; \dots; 40\}.$$

Do đó, từ (3) ta có:

$$s_k = \sum_{\substack{m=14 \\ c_m \neq 0}}^{42} x_{m,k} \quad (4)$$

với mọi $k \in \{1; 2; \dots; 40\}$.

Do (2) và (4), nên

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\substack{m=14 \\ c_m \neq 0}}^{42} \sum_{k=1}^{40} x_{m,k} \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{c_m} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{40} \frac{\sum_{\substack{m=14 \\ c_m \neq 0}}^{42} x_{m,k}}{s_k} - \sum_{\substack{m=14 \\ c_m \neq 0}}^{42} \frac{\sum_{k=1}^{40} x_{m,k}}{c_m} \\ &= \sum_{k=1}^{40} 1 - \sum_{\substack{m=14 \\ c_m \neq 0}}^{42} 1 \geq \sum_{k=1}^{40} 1 - \sum_{m=14}^{42} 1 \\ &= 11. \end{aligned} \quad (5)$$

Mà

$$x_{m,k} \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{c_m} \right) < \frac{x_{m,k}}{s_k} \leq 1,$$

với mọi $k \in \{1; 2; \dots; 40\}$ và với mọi

$m \in \{14; 15; \dots; 42\}$ thỏa mãn $c_m \neq 0$; nên từ (5) suy ra, trong tổng T phải có ít nhất 12 số hạng là số dương. Nghĩa là, phải tồn tại ít nhất 12 cặp (m, k) đôi một phân biệt, $m \in \{14; 15; \dots; 42\}$ và $k \in \{1; 2; \dots; 40\}$, sao cho $x_{m,k} \geq 1$ và $c_m > s_k$. Vì $12 > 9$ nên theo (1), ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bình luận và Nhận xét

1. Hiển nhiên thấy, các thông tin về số ngày thi, số bài toán thi trong mỗi ngày, và điểm tối đa cho mỗi bài toán thi là những thông tin có thể lược bỏ, trong phát biểu của đề bài.

2. Cho tới thời điểm bản thảo vào Nhà in, Tạp chí vẫn chưa nhận được lời giải nào, từ bạn đọc.

Nguyễn Khắc Minh

DANH SÁCH HỌC SINH CÓ LỜI GIẢI ĐÚNG

Trong các ngoặc đơn ở phần dưới đây, sau tên lớp là mã hiệu của các bài toán mà học sinh có lời giải đúng.

KHỐI THCS

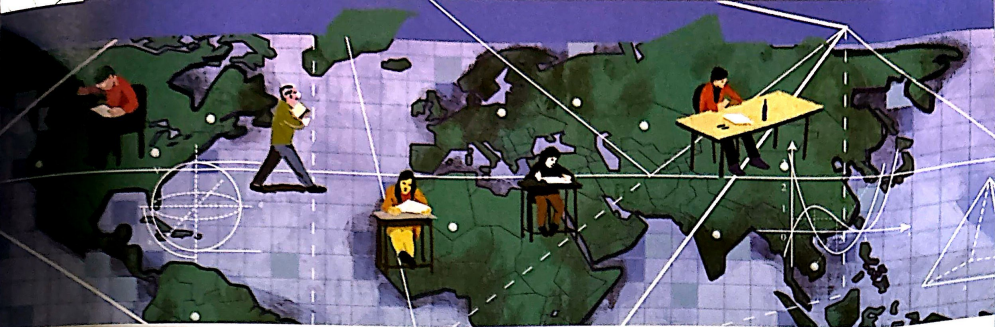
- Trường **THCS Nguyễn Thái Bình**, tỉnh Cà Mau: *Lê Nguyễn Hoàng Nhật Đình* (lớp 9C; P741, P742, P744).
- Trường **TH&THCS Archimedes Đông Anh**, Tp. Hà Nội: *Ngô Minh Chấn* (lớp 9A3; P747).
- Trường **THCS Lê Văn Thiêm**, Tp. Hà Tĩnh, tỉnh Hà Tĩnh: *Nguyễn Thị Ánh Ngọc* (lớp 6A3; P741).
- Trường **THCS Lê Quý Đôn**, Quận 3, Tp. Hồ Chí Minh: *Nguyễn Chánh Thiện* (lớp 9/12; P741, P742, P744, P747).

KHỐI THPT

- Trường **THPT chuyên Lê Quý Đôn**, tỉnh Bình Định: *Nguyễn Nguyên Thịnh* (lớp 10T; P747).
- Trường **THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu**, tỉnh Đồng Tháp: *Đỗ Duy Quang* (lớp 12T1; P741, P742), *Huỳnh Ngọc Anh Thư* (lớp 10T2; P741, P742), *Nguyễn Thanh Anh*

Thư (lớp 10T2; P742), *Võ Hải Yến* (lớp 11H; P741).

- Trường **THPT Chi Lăng**, tỉnh Gia Lai: *Phan Trần Ngọc Hải* (lớp 10A7; P742), *Nguyễn Như Ý* (lớp 10A7; P741).
- Trường **THPT chuyên Lê Hồng Phong**, tỉnh Nam Định: *Phạm Đức Minh* (lớp 10 Toán 2; P741, P742, P744, P747).
- Trường **THPT chuyên Lương Văn Chánh**, tỉnh Phú Yên: *Nguyễn Tấn Nguyễn Chương* (lớp 11 Toán 1; P748), *Huỳnh Trần Gia Huy* (lớp 10 Toán 1; P747), *Đặng Kỳ Nam* (lớp 10 Toán 1; P741, P742), *Lê Phi Truyển* (lớp 11 Toán 1; P747).
- Trường **THPT chuyên Tiền Giang**, tỉnh Tiền Giang: *Võ Trần Tiến* (lớp 10 Toán 2; P741), *Lê Minh Thịnh* (lớp 12 Toán; P744).
- Trường **THPT chuyên Tự nhiên**, ĐHQG Hà Nội: *Vương Khánh Toàn* (lớp 11A1 Toán; P742, P744, P747, P748).



GÓC TOÁN OLYMPIC

Trong phần đầu chuyên mục, chúng tôi sẽ trình bày lời giải của các bài toán trong cuộc thi Cúp Toán học Châu Âu năm 2022 đăng trong số báo 10/2023.



OC52. Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn: tồn tại ba ước dương a, b, c của n , với $a > b > c$, sao cho ba số $a^2 - b^2, b^2 - c^2, a^2 - c^2$ cũng là các ước của n .

Lời giải. Đáp án là tất cả các số nguyên dương n chia hết cho 60.

Giả sử n chia hết cho 60. Đặt $a = 4, b = 2, c = 1$. Khi đó $a^2 - b^2 = 12, b^2 - c^2 = 3, a^2 - c^2 = 15$. Cả sáu số đó đều là ước của 60, nên chúng cũng là ước của n . Như vậy n thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Giả sử n là một số thỏa mãn điều kiện trong đầu bài. Luôn có hai số a, b, c có cùng tính chẵn lẻ. Không mất tính tổng quát, cho a và b là các số chẵn. Khi đó $a - b$ và $a + b$ đều là số chẵn nên 4 là ước của $a^2 - b^2$. Như vậy n chia hết cho 4.

Nếu bất kỳ số nào trong a, b, c chia hết cho 3 thì n cũng chia hết cho 3. Nếu trái lại, hai số trong a, b, c cho cùng một số dư khi chia cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử a và b là các số như vậy. Khi đó 3 là ước của $a^2 - b^2$, ta suy ra n chia hết cho 3.

Nếu bất kỳ a, b, c nào chia hết cho 5 thì n cũng chia hết cho 5. Giả sử trái lại, không có a, b, c nào chia hết cho 5. Khi đó bình phương của một số không chia hết cho 5 chỉ có thể cho số dư 1 hoặc 4 khi chia cho 5.

Như vậy, trong số a^2, b^2, c^2 có hai số có cùng số dư khi chia cho 5 nên hiệu của chúng chia hết cho 5. Ta nhận được n chia hết cho 5.

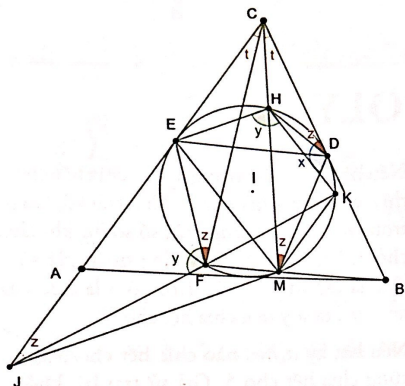
Như vậy n thỏa mãn đầu bài khi và chỉ khi n chia hết cho 60.

OC53. Cho tam giác nhọn ABC với $BC < AC$. Giả sử đường tròn τ nội tiếp tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với BC, AC lần lượt tại D, E . Lấy điểm M nằm trên đường tròn τ sao cho BM song song với DE và hai điểm M, B nằm về cùng một phía của đường phân giác góc BCA . Gọi F và H lần lượt là giao điểm (khác M) của τ với BM và CM . Gọi J là một điểm trên đường thẳng AC sao cho JM song song với EH . Gọi K là giao điểm (khác F) của JF với τ . Chứng minh hai đường thẳng ME và KH song song.

Lời giải. Gọi t là số đo của $\angle JCF$, và z là số đo của $\angle EFC$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng hai tam giác CJF và CDH đồng dạng.

Đầu tiên nhận xét rằng do tính chất của tiếp

tuyến nên CI là đường trung trực của ED . Do FM là dây cung song song với ED nên CI cũng là trung trực của FM . Từ đó ta suy ra $\angle JCF = \angle DCM = t$, $CD = CE$ và $CM = CF$.



Theo giả thiết $JM \parallel EH$, hai tam giác JMC và EHC đồng dạng, ta có $\frac{CJ}{CM} = \frac{CE}{CH}$. Do đó $\frac{CJ}{CF} = \frac{CD}{CH}$ và từ đó suy ra hai tam giác CJF và CDH đồng dạng.

Mặt khác, trong đường tròn τ chúng ta có $\angle HDC = \angle HMD$. Hơn nữa do D, E cũng như F, M đối xứng qua đường trung trực CI nên ta có $\angle EFC = \angle HMD$. Do sự đồng dạng của hai tam giác vừa chứng minh ở trên, chúng ta cũng có $\angle HDC = \angle CJF$, do đó chúng ta thu được $\angle HDC = \angle CJF = \angle EFC = z$.

Xét tam giác JCF Ta có

$$\begin{aligned}\angle KHE &= \angle JFE = \pi - \angle CJF - \angle JEF \\ &= \pi - z - \angle ECF - \angle EFC \\ &= \pi - 2z - t.\end{aligned}$$

Xét tam giác CDM ta có

$$\begin{aligned}\angle MDH &= \pi - \angle DMH - \angle DHM \\ &= \pi - z - \angle DCH - \angle HDC \\ &= \pi - 2z - t.\end{aligned}$$

Do đó, $\angle MDH = \angle KHE$, và ta suy ra hai cung EH và MK bằng nhau. Do đó $EMKH$ là hình thang cân nên $ME \parallel KH$ như mong muốn.

OC54. Cho $n \geq 3$ là số nguyên dương. Alice và Bob chơi một trò chơi trong đó họ thay phiên nhau tô màu các đỉnh của đa giác đều n cạnh. Alice đi đầu tiên. Cả hai người chơi bắt đầu trò chơi với 0 điểm. Trong mỗi lượt, người chơi chọn một đỉnh V chưa được tô màu và tô màu nó. Sau đó, họ cộng k điểm vào tổng số điểm của mình, trong đó k là số đỉnh nằm cạnh V đã được tô màu. (Như vậy, k sẽ có giá trị 0, 1 hoặc 2.) Trò chơi kết thúc khi tất cả các đỉnh đã được tô màu và người chơi nào có nhiều điểm hơn sẽ thắng. Xác định người chơi nào có chiến lược để luôn chiến thắng.

Lời giải. Chúng ta sẽ chứng minh rằng Alice thắng khi n lẻ và Bob thắng khi n chẵn.

Trường hợp 1: n chẵn.

Chiến lược của Bob như sau. Anh ta chọn một đường thẳng ℓ đi qua trung điểm của hai cạnh đối diện của n -giác. Đường thẳng ℓ chia n -gon thành hai nửa. Sau đó, đối với bất kỳ nước đi nào Alice thực hiện, Bob sẽ thực hiện một nước đi đối xứng với nước đi của Alice qua ℓ .

Nếu trong một nước đi nào đó, Alice chọn một đỉnh không phải là điểm cuối của cạnh mà ℓ đi qua, thì Bob nhận được số điểm bằng của cô trong bước đi tiếp theo của anh ấy, bởi vì mỗi nửa của n -giác có các đỉnh được tô màu giống nhau ở bước trước đó. Nếu Alice chọn một đỉnh là điểm cuối của cạnh mà ℓ đi qua thì Bob nhận được nhiều hơn Alice một điểm vì điểm đối xứng với điểm Alice vừa chọn chính là đỉnh nằm trên cùng một cạnh với nó. Vì Bob phải chọn một đỉnh như vậy hai lần nên cuối cùng Bob thắng với cách biệt hai điểm.

Trường hợp 2: n lẻ.

Chiến lược của Alice như sau. Cô ấy thực

hiện một nước đi đầu tiên tùy ý, sau đó xét một đường thẳng l đi qua đỉnh cô ấy đã chọn và điểm giữa của cạnh đối diện của n -giác. Sau đó, cô ấy sử dụng chiến lược tương tự như Bob ở trường hợp n chẵn. Lý luận tương tự như trong trường hợp trước, cuối cùng Alice thắng cách biệt một điểm.

Trong phần cuối của chuyên mục kỳ này, chúng tôi sẽ giới thiệu với bạn đọc ba bài toán trong kỳ thi Olympic toán học Zhaitykov năm 2023 do Kazakhstan tổ chức. Đây là cuộc thi mang tên nhà toán học Zhaitykov người Kazakhstan.

OC61. Có một bộ bài gồm 1001 quân bài với các số $1, 2, \dots, 1001$ được viết trên một mặt của những quân bài đó bằng bút xanh, mỗi quân một số. Ta sắp xếp các quân bài thành một vòng tròn, với những số màu xanh ở mặt bên dưới, theo thứ tự bất kỳ. Sau đó, với mỗi quân bài C , ta đếm số $f(C)$ những quân bài có số màu xanh lớn hơn số màu xanh của C trong số 500 quân bài xếp ngay sau nó theo chiều kim đồng hồ. Ta viết số

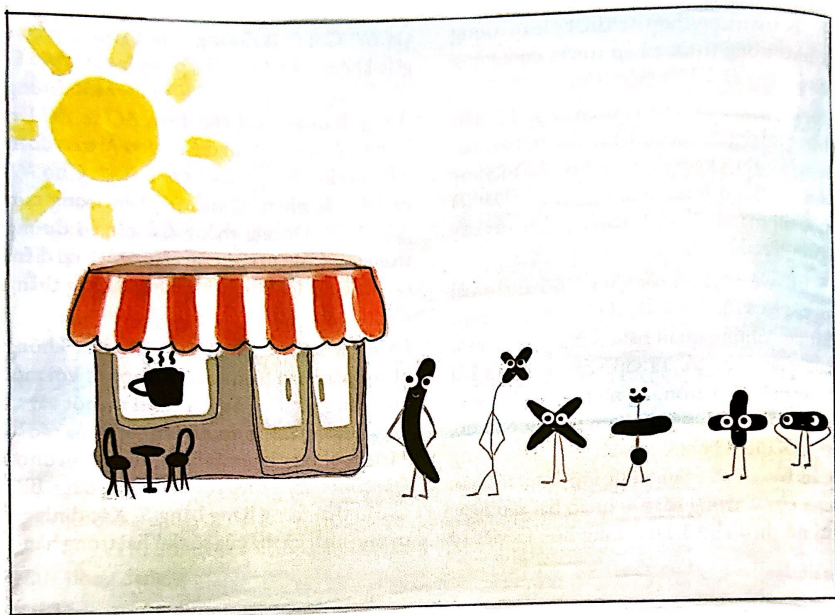
$f(C)$ ở mặt trên của C bằng bút đỏ. Chứng minh rằng nếu nhìn thấy tất cả các số màu đỏ trên các quân bài, có thể xác định được số màu xanh trên mỗi quân bài.

OC62. Gọi Ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác không cân ABC . Tiếp tuyến tại C với Ω cắt đường thẳng AB tại điểm D . Một đường thẳng đi qua D cắt các đoạn AC và BC lần lượt tại K và L . Chọn điểm M và N trên đoạn AB sao cho $AC \parallel NL$ và $BC \parallel KM$. Cho NL và KM cắt nhau tại điểm P bên trong tam giác ABC . Đường thẳng CP cắt lại đường tròn ngoại tiếp ω của tam giác MNP tại điểm Q (khác P). Chứng minh rằng đường thẳng DQ tiếp xúc với ω .

OC63. Cho $n > 2$ số thực khác 0, không nhất thiết phân biệt, có tổng bằng 0. Với mỗi một trong số $2^n - 1$ cách chọn ra một vài số (ít nhất một) trong đó, ta tính tổng của các số đã được chọn và viết tất cả các tổng tính được thành một hàng theo thứ tự không tăng. Biết số đầu tiên trong hàng bằng S . Xác định giá trị nhỏ nhất có thể của số thứ hai trong hàng.

CÀ PHÊ SÁNG¹

SAMANTHA FAFARD²



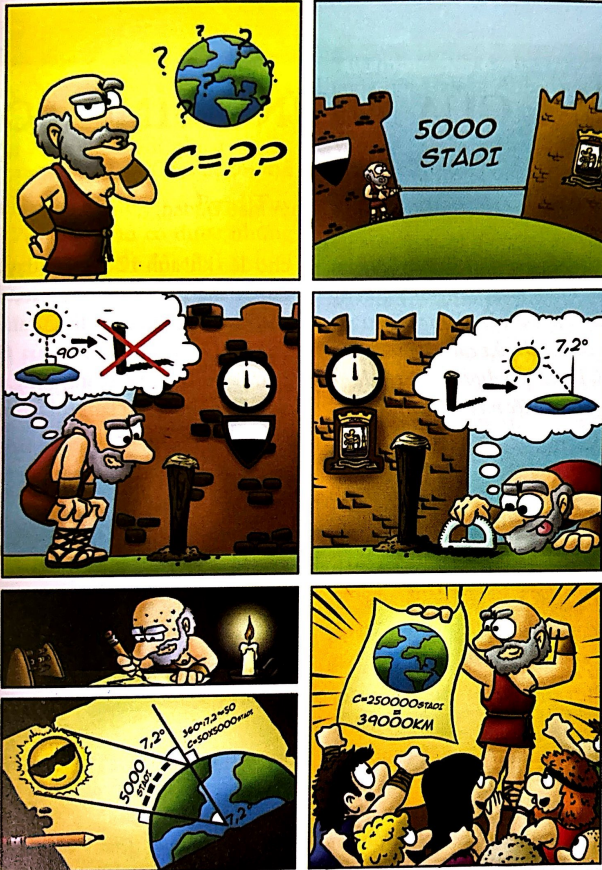
Các con dấu xếp hàng chờ cà phê để bắt đầu công việc của mình. Luôn phải chờ đợi theo thứ tự này.

¹ Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>

² Trường Đại Học Texas, Austin (TX), Hoa Kỳ

ERATOSTHENES

TÍNH CHU VI TRÁI ĐẤT*

NICOLÒ BERTOLOTTI¹

Khoảng cách giữa Siena và Alexandria là 5000 stadium² và vào giữa ngày hạ chí ở Siena, mặt trời chiếu vuông góc với trái đất trong khi ở Alexandria nó nghiêng $7,2^\circ$. Do đó ông đã tính chu vi Trái Đất, x , bởi phương trình $7,2 : 360 = 5000 : x$.

* Theo <https://www.idm314.org/2023-comic-challenge>.

¹ Istituto comprensivo Silvio D'arzo settore tecnico grafico Reggio Emilia (Emilia Romagna, Italia Reggio, Emilia), Italy.

² Stadium là đơn vị độ dài, bằng độ dài một sân vận động thời Hy Lạp-La Mã, vào khoảng 156 mét.



CỘI RỄ CỦA NHỮNG TÍNH TOÁN*

J. J. O'CONNOR & E. F. ROBERTSON

(Người dịch: Phạm Triều Dương)

Đi tới cội rễ của những tính toán này! Nhóm các phép toán lại! Phân loại chúng theo mức độ phức tạp hơn là về ngoài của chúng! Điều đó, tôi tin rằng, là sứ mệnh của các nhà toán học trong tương lai. Đó là con đường mà tôi đang dẫn mình trong công việc này.



Évariste Galois (1811 – 1832).

Cha của Évariste Galois là Nicholas Gabriel Galois và mẹ của anh là Adelaide Marie Demante đều là những người có trí tuệ và được đào tạo cẩn thận về triết học, văn học cổ điển và tôn giáo. Tuy nhiên không có một dấu hiệu nào về khả năng toán học trong số bất kỳ thành viên nào trong gia đình Galois. Mẹ của Galos là giáo viên duy nhất của anh

cho đến khi anh 12 tuổi. Bà dạy anh tiếng Hy Lạp, tiếng La-tin và tôn giáo, nơi bà truyền đạt sự hoài nghi của chính mình về nhà thờ cho con trai mình. Cha của Galois là một người quan trọng trong cộng đồng và năm 1815 ông được bầu làm thị trưởng xã Bourg-la-Reine.



Bản đồ Paris vào Thế kỷ 19, có chỉ dẫn về xã Bourg-la-Reine.

Điểm khởi đầu của những sự kiện lịch sử đóng vai trò quan trọng trong cuộc đời Galois chắc chắn là Trận chiến ngục Bastille

* Bài viết đăng tại <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Galois/>

nổ ra vào ngày 14 tháng 7 năm 1789. Từ thời điểm này, chế độ quân chủ của Louis thứ 16 gặp muôn vàn khó khăn khi phần lớn người dân nước Pháp gạt những cách biệt của họ để đoàn kết lại với nỗ lực đập tan hệ thống tổ chức đặc quyền của nhà thờ và nhà nước.

Bất chấp những nỗ lực thỏa hiệp, Louis thứ 16 vẫn bị xét xử sau khi cố gắng chạy trốn khỏi đất nước. Nối tiếp sau vụ hành quyết Nhà vua vào ngày 21 tháng 1 năm 1793 là một Triều đại Khủng bố với nhiều vụ xét xử chính trị. Đến cuối năm 1793 có 4595 tù nhân chính trị bị giam giữ ở Paris. Tuy nhiên, nước Pháp bắt đầu có được những thời kỳ tốt đẹp hơn khi quân đội của họ, dưới sự chỉ huy của Napoléon Bonaparte, giành được hết thắng lợi này đến thắng lợi khác.

Napoléon trở thành Tổng tài thứ nhất vào năm 1800 và sau đó là Hoàng đế vào năm 1804. Quân đội Pháp tiếp tục chinh phục châu Âu trong khi quyền lực của Napoléon ngày càng được đảm bảo. Vào năm 1811, Napoléon đạt tới được đỉnh cao của quyền lực. Đến năm 1815 thì sự cai trị của Napoléon đã khép lại. Theo sau Chiến dịch xâm lược nước Nga vào năm 1812 bị phá sản là những cuộc bại trận, quân Liên minh tiến vào Paris vào ngày 31 tháng 3 năm 1814. Napoléon thoái vị vào ngày 6 tháng 4 và Louis XVIII được quân Liên minh phong làm Vua. Năm 1815 đã chứng kiến Triều đại Một trăm ngày nổi tiếng. Napoléon tiến vào Paris ngày 20 tháng 3, bị đánh bại tại Waterloo vào ngày 18 tháng 6 và thoái vị lần thứ hai vào ngày 22 tháng 6. Louis XVIII được trở lại làm Vua nhưng qua đời vào tháng 9 năm 1824, Charles X trở thành Tần Vương.

Vào thời gian đó Galois đang đi học ở trường. Cậu đã đăng ký học tại trường trung học Louis-le-Grand với tư cách là học sinh nội trú lớp 4 vào ngày 6 tháng 10 năm 1823. Ngay trong học kỳ đầu tiên của cậu, đã xảy ra một cuộc nổi loạn nhỏ và 40 học sinh

đã bị đuổi khỏi trường. Galois không tham gia, và trong suốt năm học 1824 – 25, thành tích học tập của cậu rất tốt và cậu đã nhận được một số giải thưởng. Tuy nhiên, vào năm 1826, Galois bị yêu cầu học lại một năm vì bài hùng biện của cậu không đạt được tiêu chuẩn yêu cầu.

Tháng 2 năm 1827 là một bước ngoặt trong cuộc đời Galois. Anh đăng ký vào học lớp toán đầu tiên của mình, lớp của Hypolyte Vernier (1800 – 1875). Anh nhanh chóng đắm mình trong toán học và người Trưởng phòng đào tạo của Galois đã viết:

Chính là niềm đam mê toán học đã chi phối cậu ấy, tôi nghĩ sẽ tốt nhất cho cậu ta nếu bố mẹ cậu không cho phép cậu ấy học gì ngoài môn này, cậu ta quả đang lãng phí thời gian ở đây và không làm gì khác ngoài việc hành hạ giáo viên và tự vui lấp mình với những hình phạt.

Các bản học bạ ở trường của Galois bắt đầu mô tả anh là con người lập dị, kỳ quái, độc đáo và khép kín. Điều thú vị là có lẽ nhà toán học độc đáo nhất trong số những người từng sống lại bị than phiền vì tính cách độc đáo của mình. Tuy nhiên, Vernier đã báo cáo rằng:

Có trí tuệ, tiến bộ rõ rệt nhưng chưa đủ phương pháp.

Năm 1828 Galois thi vào École Polytechnique nhưng bị trượt. Đó là trường Đại học hàng đầu của Paris và Galois hẳn đã mong ước đỗ vào được trường này vì những lý do học thuật. Tuy nhiên, anh cũng mong muốn được vào trường này cả vì những phong trào chính trị mạnh mẽ tồn tại trong giới sinh viên của trường, vì Galois đã noi gương cha mẹ mình để trở thành một người theo Cộng hòa một cách nhiệt thành.

Trở lại Louis-le-Grand, Galois đăng ký vào lớp toán của Louis Richard. Tuy nhiên, anh ngày càng làm việc nhiều hơn cho các nghiên cứu của riêng mình và ngày càng ít làm bài tập ở trường. Anh nghiên cứu cuốn

Geométrie của Legendre và các chuyên luận của Lagrange. Như Richard đã từng thông báo lại:

Sinh viên này chỉ có làm việc trong những lĩnh vực toán học cao nhất.

Vào tháng 4 năm 1829 Galois có bài báo toán học đầu tiên được xuất bản trên tạp chí Annales de mathématiques. Vào ngày 25 tháng 5 và ngày 1 tháng 6, anh đã gửi các bài báo về nghiệm đại số của phương trình tới Académie des Sciences. Cauchy được phân công làm phản biện cho bài báo của Galois.

Một bi kịch ập đến với Galois bởi vào ngày 2 tháng 7 năm 1829, cha anh đã tự sát. Vị linh mục của xã Bourg-la-Reine đã giả mạo tên của Thị trưởng Galois trên những bài thơ trào phúng hiểm độc bị làm giả nhằm vào chính những người họ hàng của Galois. Cha của Galois vốn là một người đàn ông hiền hậu, và vụ bê bối xảy ra sau đó đã khiến ông không thể chịu đựng nổi. Ông đã treo cổ tự tử trong căn hộ ở Paris, chỉ cách Louis-le-Grand nơi con trai ông đang học có vài bước chân. Galois bị ảnh hưởng sâu sắc bởi cái chết của cha mình, và điều đó đã ảnh hưởng rất lớn đến hướng đi của cuộc đời anh.

Vài tuần sau cái chết của cha mình, Galois đã tự mình đến dự kỳ thi tuyển vào École Polytechnique lần thứ hai. Lần thứ hai anh thất bại, có lẽ một phần vì anh đã phải tham gia kỳ thi trong hoàn cảnh tồi tệ nhất có thể xảy ra ngay sau khi cha anh qua đời, một phần vì anh chưa bao giờ giỏi trong việc truyền đạt những ý tưởng toán học sâu sắc của mình. Do đó, Galois đã phải cam chịu để vào École Normale, một trường nằm sát với Louis-le-Grand, và để làm được điều đó, anh phải tham gia kỳ thi Tú tài, điều mà anh đã có thể tránh được bằng cách thi vào École Polytechnique.

Anh đã đỗ kì thi và nhận bằng vào ngày 29 tháng 12 năm 1829. Người chấm thi môn toán của anh đã thông báo:

Cậu học trò này đôi khi còn mù mờ trong việc diễn đạt ý tưởng của mình nhưng lại có trí tuệ và thể hiện một tinh thần nghiên cứu đáng chú ý.

Người chấm thi môn văn học của anh đã thông báo:

Đây là học sinh duy nhất đã trả lời tôi rất kém, cậu ấy hoàn toàn không biết gì cả. Tôi được mọi người nói trước lại rằng cậu học sinh này có năng lực toán học phi thường. Điều này làm tôi vô cùng ngạc nhiên, vì sau khi kiểm tra, tôi tin rằng anh ta cũng có nhưng chỉ một chút ít trí tuệ.

Galois đã gửi cho Cauchy nghiên cứu tiếp theo về lý thuyết các phương trình, nhưng sau đó anh đã tìm hiểu được từ Bulletin de Férussac về một bài báo để lại sau khi qua đời của Abel có phần đan xen với một phần nghiên cứu của anh. Sau đó Galois nghe theo lời khuyên của Cauchy và gửi đăng một bài báo mới *Về điều kiện để một phương trình có thể giải được bằng căn thức* vào tháng 2 năm 1830. Bài báo được gửi tới Fourier, thư ký của Viện Hàn lâm Paris, để được xét Giải thưởng lớn về toán học. Fourier qua đời vào tháng 4 năm 1830, và bài báo của Galois sau đó đã không bao giờ được tìm thấy, và do đó đã không bao giờ được xét giải.

Sau khi đọc tác phẩm của Abel và Jacobi, Galois đã nghiên cứu lý thuyết về các hàm elliptic và các tích phân abelian. Với sự hỗ trợ từ Jacques Sturm, anh đã công bố ba bài báo trên Bulletin de Férussac vào tháng 4 năm 1830. Tuy nhiên, vào tháng 6, anh được biết rằng giải thưởng của Học viện sẽ được trao chung cho Abel (sau khi qua đời) và cho Jacobi, trong khi tác phẩm của anh lại chưa hề được xét.

Tháng 7 năm 1830 chứng kiến một cuộc Cách mạng. Charles thứ 10 trốn khỏi nước Pháp. Bạo loạn nổ ra trên những đường phố của Paris, và vị hiệu trưởng của École Normale, ông M. Guigniault, đã khoá các

sinh viên lại ở trong trường để tránh không cho họ tham gia. Galois đã cố gắng trèo qua bức tường để tham gia cuộc bạo loạn, nhưng không thành công. Vào tháng 12 năm 1830 ông M. Guigniault đã viết các bài báo công kích sinh viên, và Galois đã viết bài trả lời trên Gazette des Écoles, phản kháng lại M. Guigniault vì những hành động khoá nhốt sinh viên trong trường của ông ta. Vì lá thư này, Galois đã bị đuổi học, và anh gia nhập Pháo binh của Lực lượng Vệ binh Quốc gia, một chi nhánh của lực lượng dân quân thuộc nền Cộng hòa. Vào ngày 31 tháng 12 năm 1830, Pháo binh Vệ binh Quốc gia bị phế bỏ theo Chiếu chỉ Hoàng gia vì vị Vua mới Louis-Phillipe cảm thấy lực lượng là mối đe dọa đối với ngai vàng.

Hai ấn phẩm nhỏ, một bản tóm tắt trên Annales de Gergonne (tháng 12 năm 1830) và một trao đổi về giảng dạy khoa học trên Gazette des Écoles (ngày 2 tháng 1 năm 1831) là những ấn phẩm cuối cùng trong cuộc đời anh. Vào tháng 1 năm 1831 Galois cố gắng quay trở lại với toán học. Anh tổ chức một số lớp toán về đại số cao cấp, buổi đầu tiên thu hút 40 học sinh nhưng sau đó con số này nhanh chóng sụt giảm. Galois được Poisson mời gửi phiên bản thứ ba của cuốn luận văn của anh về phương trình cho Viện hàn lâm và anh đã thực hiện điều này vào ngày 17 tháng 1.

Vào ngày 18 tháng 4, Sophie Germain đã viết một lá thư cho một người bạn của bà là nhà toán học Libri, mô tả hoàn cảnh của Galois:

... cái chết của M. Fourier, là quá sức chịu đựng đối với cậu sinh viên Galois này, một người, bất chấp tính xác xược của mình, vẫn thể hiện những dấu hiệu của một tính cách thông minh. Tất cả những điều này đã áp đến nhiều đến mức cậu ta bị đuổi học khỏi École Normale. Cậu ta giờ không có tiền.... Họ nói cậu ta sẽ hoàn toàn phát điên. Tôi e sợ điều này lại là sự thật.

Cuối năm 1830, 19 sỹ quan thuộc Pháo binh

của Vệ binh Quốc gia bị bắt và bị buộc tội âm mưu lật đổ chính phủ. Họ được trắng án và vào ngày 9 tháng 5 năm 1831, 200 người Cộng hòa đã tụ tập ăn tối để ăn mừng sự trắng án. Trong bữa tối, Galois nâng ly của mình và với một con dao găm để hờ trong tay, anh có vẻ như đang nói những lời đe dọa chống lại Nhà vua, Louis-Phillipe. Sau bữa tối, Galois bị bắt và bị giam tại nhà tù Sainte-Pélagie. Tại phiên tòa xét xử vào ngày 15 tháng 6, luật sư bào chữa của anh ta khai rằng Galois đã nói:

Dành cho Louis-Phillipe, nếu ông ta phản bội.

nhưng những lời cuối cùng đã bị tiếng ồn nhấn chìm.

Galois, một cách khá ngạc nhiên do vẫn lặp lại chính những lời đe dọa đó từ bức xử án, đã được trắng án.

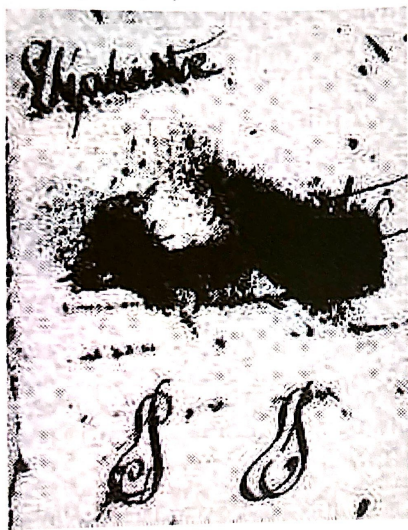
Ngày 14 tháng 7 là Ngày Bastille và Galois lại bị bắt. Anh mặc đồng phục của Pháo binh Vệ binh Quốc gia, điều này là bất hợp pháp. Anh cũng mang theo một khẩu súng trường đã nạp đạn, một số khẩu súng lục và một con dao găm. Galois bị đưa trở lại nhà tù Sainte-Pélagie. Khi ở trong tù, anh nhận được lời từ chối với cuốn Luận văn của mình. Poisson đã thông báo rằng:

Lập luận của ông ấy chưa đủ rõ ràng, cũng như chưa được phát triển đầy đủ để cho phép chúng ta đánh giá tính chính xác của nó.

Tuy nhiên, ông đã khuyến khích Galois xuất bản một bản trình bày đầy đủ hơn về công trình của mình. Khi ở trong nhà tù Sainte-Pélagie, Galois đã cố gắng tự vẫn bằng cách dùng dao găm đâm mình nhưng các tù nhân khác đã ngăn cản anh ta. Trong cơn say trong tù, anh đã trút hết tâm hồn mình:

Bạn có biết tôi thiếu gì không, bạn tôi ơi? Tôi tâm sự điều đó chỉ với bạn: đó chính là người mà tôi có thể yêu và chỉ có thể yêu thương bằng tinh thần. Tôi đã mất cha và không ai có thể thay thế được ông, bạn có nghe thấy không...?

Vào tháng 3 năm 1832, một trận dịch tả tàn quét Paris và các tù nhân, bao gồm cả Galois, được chuyển đến nhà dưỡng lão Sieur Faultrier. Ở đó, dường như anh đã phải lòng Stephanie-Felice du Motel, con gái của một bác sĩ nội trú. Sau khi anh được thả vào ngày 29 tháng 4, Galois đã trao đổi thư từ với Stephanie, và rõ ràng là cô ấy đã cố gắng tránh xa mối quan hệ này.



Tên Stephanie xuất hiện trong một bản thảo của Galois.

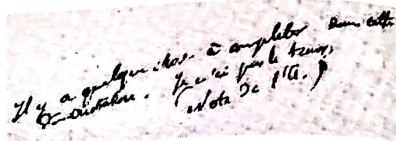
Cái tên Stephanie xuất hiện nhiều lần ở phần ghi chú bên lề trong một trong những bản thảo của Galois.

Galois đã đấu súng với Perscheux d'Herbinville vào ngày 30 tháng 5, lý do của cuộc đấu súng này không ai biết, nhưng chắc chắn có liên quan đến Stephanie.

Một ghi chú bên lề của bản thảo mà Galois đã viết vào đêm trước trận đấu súng nổ ra, có nội dung:

Có một điều gì đó phải hoàn thành trong phép chứng minh này. Tôi không có thời gian. (Ghi chú của tác giả).

Chính điều này đã dẫn đến truyền thuyết rằng Galois đã dành cả đêm cuối cùng trong cuộc đời mình để viết ra tất cả những gì anh biết về lý thuyết nhóm. Nhưng câu chuyện này có vẻ dường như đã bị phóng đại.



Ghi chép bên lề của Galois.

Galois bị thương trong cuộc đấu súng và bị d'Herbinville cùng chính những người "bạn" là những đại diện trung gian của anh bỏ rơi, và sau đó được một người nông dân tìm thấy. Anh qua đời tại bệnh viện Cochin vào ngày 31 tháng 5, và tang lễ của anh được tổ chức vào ngày 2 tháng 6. Đây là tâm điểm của một cuộc biểu tình của nền Cộng hòa và các cuộc bạo loạn kéo dài trong vài ngày.

Anh trai của Galois và bạn của anh là Chevalier đã chép lại các bài báo toán học của anh và gửi cho Gauss, Jacobi và những người khác. Galois đã từng mong muốn được Jacobi và Gauss đưa ra những quan điểm của mình về công trình của anh. Không có ghi chép nào về bất kỳ bình luận của những người này đã đưa ra. Tuy nhiên, các bài báo đã đến tay Liouville, người vào tháng 9 năm 1843 đã thông báo với Học viện rằng ông đã tìm thấy trong các bài báo của Galois một lời giải ngắn gọn

...vừa chính xác vừa sâu sắc của bài toán đáng yêu này: Cho một phương trình bậc nguyên tố bất khả quy, hãy quyết định xem nó có giải được bởi các căn thức hay không.

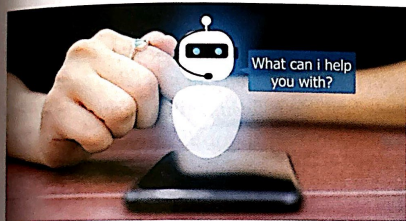
Liouville đã xuất bản những bài viết này của Galois trong Tập chí của ông vào năm 1846.

Lý thuyết mà Galois phác thảo ra những nét chính trong các bài báo này hiện nay được gọi là Lý thuyết Galois.



DẠY MÁY TÍNH NGÔN NGỮ: TỪ GOOGLE TRANSLATE ĐẾN CHATGPT

NGUYỄN MẠNH TOÀN¹



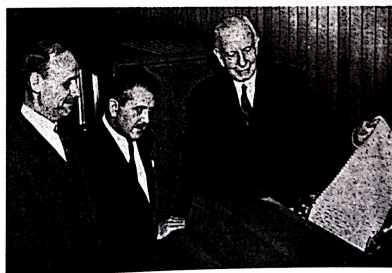
Hiếm có hệ thống máy tính nào lại thu hút được nhiều sự quan tâm và tranh luận trên toàn thế giới như ChatGPT kể từ khi ra mắt vào tháng 11 năm 2022. Chatbot được phát triển bởi OpenAI – một công ty công nghệ của Mỹ có trụ sở tại San Francisco – sử dụng mô hình trí tuệ nhân tạo (AI) được đào tạo để xử lý ngôn ngữ tự nhiên. Chương trình có thể tạo ra những câu trả lời hùng hồn cho nhiều chủ đề khác nhau trong một thời gian rất ngắn, tạo ra toàn bộ bài tiểu luận hay chương trình lập trình, có thể sử dụng các phong cách ngôn ngữ như thơ, truyện cười hay thảo luận bằng các ngôn ngữ khác nhau.

Mặc dù bùng nổ và trở thành xu hướng chủ đạo gần như chỉ sau một đêm, ChatGPT là thành quả của nhiều thập kỷ nghiên cứu.

Một chặng đường dài

Vào tháng 1 năm 1954, một số phóng viên báo chí được lựa chọn đã tập trung trong

một căn phòng lớn ở Đại học Georgetown, nơi gần như chỉ đặt một chiếc máy tính. IBM 701 nặng gần 10 tấn là một trong những máy tính đầu tiên được phát triển cho mục đích khoa học. Chỉ bản thân điều đó thôi đã đem đến cảm xúc cho nhiều người có mặt. Nhưng thiết bị ngoại cỡ này đã làm được một điều không thể tưởng tượng được: Khi các câu ví dụ bằng tiếng Nga được đưa vào, máy in ra bản dịch bằng tiếng Anh. Nhà ngôn ngữ học Leon Dostert, người đứng đầu dự án dịch máy Georgetown, dự đoán trong một cuộc phỏng vấn không lâu sau đó: “Trong 5, thậm chí có thể chỉ 3 năm nữa, việc dịch thuật đa ngôn ngữ bằng quy trình điện tử ... có thể sẽ khả thi”.



Leon Dostert (giữa) và Thomas Watson (phải) – Chủ tịch và Giám đốc điều hành của IBM – tại buổi trình diễn của máy Georgetown.

¹Đại học Osnabrueck, CHLB Đức.

Bây giờ chúng ta đều biết rằng Dostert đã tính toán sai những 60 năm. Nghiên cứu về dịch máy đã phải trải qua một chặng đường rất dài. Chỉ với sự trỗi dậy gần đây của mạng thần kinh – cuộc cách mạng học sâu – các thuật toán học máy mới trở nên đủ mạnh để chuyển văn bản từ ngôn ngữ này sang ngôn ngữ khác một cách đáng tin cậy.

Nhiều cột mốc quan trọng của AI đạt được trong những năm gần đây, từ các trợ lý ảo như Siri của Apple hay Alexa của Amazon cho đến các thuật toán AI tạo sinh có khả năng tạo ra một hình ảnh hoàn toàn mới chỉ bằng một mô tả ngắn như Dall-E của OpenAI hay Stable Diffusion của StabilityAI, đều dựa vào những tiến bộ trong xử lý ngôn ngữ tự nhiên. Và có lẽ, sự ra đời của ChatGPT một năm về trước đã tạo nên làn sóng lớn nhất.



Một bức ảnh được tạo ra bởi Dall E.

Chỉ với một câu hỏi ngắn của người dùng, ChatGPT đã có thể nhanh chóng đưa ra một đoạn giới thiệu tương đối đầy đủ về cấu trúc và khả năng của mình:

“ChatGPT là một mô hình ngôn ngữ tự nhiên phức tạp được phát triển bởi OpenAI, dựa trên kiến trúc GPT-3.5. “GPT” là viết tắt của “Generative Pre-trained Transformer,” một mô hình sử dụng kiến trúc transformer để

xử lý và tạo ra văn bản. ChatGPT được đào tạo với một lượng lớn dữ liệu từ Internet, với khả năng hiểu và tạo ra văn bản tự nhiên và linh hoạt.

Mục tiêu chính của ChatGPT là tương tác với người dùng thông qua việc trả lời câu hỏi, thực hiện các nhiệm vụ ngôn ngữ tự nhiên và cung cấp thông tin. Nó có thể được sử dụng để hỗ trợ trong nhiều ứng dụng, bao gồm việc trả lời câu hỏi, tạo ra văn bản sáng tạo, dịch ngôn ngữ, và nhiều tác vụ ngôn ngữ khác...”

ChatGPT thậm chí còn có thể sáng tạo nội dung như là kể một câu chuyện cười, điều mà ta chưa từng thấy với các chatbot trước kia:

“Một ngày, một con gấu và một chuột đang ngồi trò chuyện. Con gấu nói, “Bạn biết không, mỗi lần mình buồn, mình thích ăn một túi bơ.”

Chuột nhìn con gấu và nói, “Thực sự à? Mỗi khi tôi buồn, tôi thích ăn một thanh sô cô la.”

Gấu ngạc nhiên và hỏi, “Tại sao vậy?”

Chuột trả lời, “Vi sô cô la luôn giúp tôi tìm thấy mình trong tình trạng tốt hơn!””

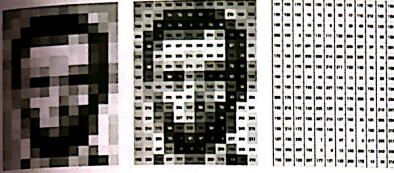
Dù nội dung có khá khiếm nhã nhưng không thể phủ nhận rằng giờ đây chúng ta có thể giải trí một cách tuyệt vời với một chương trình máy tính. AI có thể tạo ra nội dung mới như nghĩ ra những câu chuyện cười, một nghệ thuật không hề dễ dàng bởi chúng cần sự hài hước, sự đồng cảm, sự mỉa mai, sự táo bạo, v.v. Để hiểu lý do tại sao phải mất nhiều thời gian để phát triển các mô hình ngôn ngữ và những thách thức mà các nhà phát triển vẫn đang gặp phải, ta phải hiểu cách thức hoạt động của các chương trình.

Nhúng từ

Máy tính không hiểu những mặt chữ tự nhiên thông thường như con người mà chỉ hiểu những dãy số. Do vậy, khó khăn lớn đầu tiên, cũng là điểm mấu chốt trong quá trình xử lý ngôn ngữ tự nhiên là *Làm thế nào để đưa văn bản vào máy theo cách có ý nghĩa*

nhất có thể để tất cả các kết nối logic đều rõ ràng? Đây là câu hỏi mà các chuyên gia đã phải vật lộn trong suốt một thời gian dài – và vẫn đang tiếp tục phải vật lộn với nó.

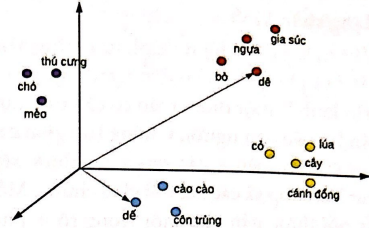
Với hình ảnh, việc này được giải quyết tương đối dễ dàng. Ta có thể xếp các giá trị số của các điểm ảnh (pixel) lại với nhau thành một vectơ (hoặc ma trận) nhiều chiều.



Xử lý hình ảnh.

Tuy nhiên, với văn bản, việc gán giá trị cho từng chữ cái và dấu câu như vậy không có ý nghĩa bởi vì đối tượng thực sự mà ngôn ngữ hướng tới là từ ngữ. Việc đánh số 10.000 mục đầu tiên trong từ điển theo thứ tự từ 1 đến 10.000 có thể được máy tính thực hiện dễ dàng. Tuy nhiên, vấn đề không chỉ là gán các giá trị số cho nội dung mà chúng ta còn muốn các đối tượng tương tự có biểu diễn toán học không khác biệt nhiều. Với hình ảnh, khi giá trị của một vài điểm ảnh bị thay đổi thì hình ảnh được sửa đổi trông hơi khác một chút và vectơ liên quan cũng vậy. Tuy nhiên, nếu ta thực hiện những thay đổi nhỏ như là hoán đổi một chữ cái hay dấu, câu sẽ mang một ý nghĩa hoàn toàn mới. “Con dê có bộ lông dài” khác hẳn “con để có bộ lông dài”. Mặc dù “dê” và “để” được đánh vần và viết khá giống nhau nhưng chúng khác nhau về mặt ngữ nghĩa. Trên thực tế, “ngựa” có nhiều điểm tương đồng với “dê” hơn dù chúng không có chung chữ cái nào. Đó là lý do tại sao những nhà nghiên cứu về xử lý ngôn ngữ tự nhiên cần một bộ mã hóa riêng. Theo ngôn ngữ toán học, họ cần một ánh xạ vào không gian vector liên tục sao cho các

từ tương tự về mặt ngữ nghĩa được ánh xạ tới các điểm (vector) gần nhau về mặt không gian. Một ánh xạ như vậy được gọi là một *Phép nhúng từ* (Word embedding).



Nhúng từ.

Làm thế nào để xác định khi nào hai từ giống nhau? Theo “giả thuyết phân phối” của Zellig Harris thì những từ tương tự về mặt ý nghĩa sẽ xuất hiện trong những ngữ cảnh giống nhau. Dê và ngựa thường xuất hiện liên quan đến các từ như gia súc, chăn nuôi, thức ăn, v.v. nên gần nghĩa, do đó sẽ được gán cho các vectơ gần nhau trong khi dê và để có thể có khoảng cách xa hơn.

Trong một số phép nhúng từ, mối quan hệ ngữ nghĩa giữa các nhóm từ có thể được tìm thấy qua những phép toán cơ bản. Chẳng hạn trong Word2Vec², hiệu của vector “đàn ông” cho vector “vua” bằng hiệu của vector “đàn bà” cho vector “nữ hoàng”, thể hiện sự tương tự “vua với nữ hoàng cũng như đàn ông đối với đàn bà”.

Sau khi đã tìm được phép nhúng từ phù hợp, ta sẽ biết những từ nào có thể được kết nối với nhau cũng như cách sử dụng chúng để tạo thành các câu có ý nghĩa. Do đó, cách biểu diễn thích hợp là phần quan trọng nhất của các mô hình ngôn ngữ.

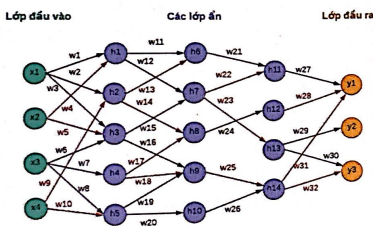
Để tìm ra phép nhúng từ phù hợp, *học máy* đã được sử dụng. Học máy không chỉ cho phép các hệ thống “học” tự động từ dữ liệu

² Một nhóm các thuật toán được phát triển bởi Google vào năm 2013 nhằm tìm hiểu cách nhúng từ từ các bộ dữ liệu lớn.

để giải quyết những vấn đề cụ thể mà còn giúp chúng cải thiện hiệu suất theo thời gian. Mặc dù học máy bao gồm nhiều phương pháp khác nhau nhưng các kỹ thuật phổ biến nhất hiện nay đều dựa trên *mạng thần kinh*.

Mạng thần kinh

Ví ý tưởng được hình thành từ những năm 1940 và phát triển cho đến ngày nay, mạng thần kinh là một thuật toán có cấu trúc dựa trên bộ não con người. Chúng bao gồm các đơn vị tính toán – các *nơ-ron* – được xếp thành các lớp và các kết nối giữa chúng. Mỗi kết nối được gán cho một trọng số w phù hợp thể hiện độ mạnh của liên kết. Mỗi *nơ-ron* nhận đầu vào từ các *nơ-ron* khác thông qua các kết nối, thực hiện một phép toán đơn giản trên các đầu vào đó và chuyển kết quả đến các *nơ-ron* khác ở lớp tiếp theo. Như vậy, một mạng thần kinh là một hàm toán học chuyển các biến đầu vào sang các biến đầu ra.



Mạng thần kinh xử lý các giá trị đầu vào như thế nào? Với các chương trình truyền thống, lập trình viên sẽ đưa ra chỉ dẫn rõ ràng, chẳng hạn, nếu *nơ-ron* 4 ở lớp 2 nhận được tín hiệu 0,6 thì chuyển đổi thành 0,75. Với học máy, chương trình sẽ tự tìm ra cài đặt phù hợp nhất để hoàn thành nhiệm vụ. Chẳng hạn, nếu muốn mạng thần kinh nhận dạng một con vật cụ thể như “chó” hoặc “mèo” trong hình ảnh, ta có thể sử dụng *học có giám sát* bằng cách cung cấp cho mạng nhiều ví dụ mẫu. Các giá trị điểm ảnh sẽ được chuyển đến lớp đầu vào để thuật toán đưa ra kết quả

dự đoán. Kết quả này sẽ được so sánh với đáp án, tức nhãn của ảnh. Ban đầu chương trình hoạt động khá kém nhưng nó sẽ cố gắng cải thiện qua mỗi lần lặp lại. Khi đưa ra kết luận sai, chương trình sẽ điều chỉnh trọng số³ của các kết nối liên quan dẫn đến kết quả sai để kết quả đầu ra sẽ chính xác hơn trong tương lai. Khi chương trình liên tục tự điều chỉnh bằng cách sử dụng dữ liệu bổ sung, khả năng của nó sẽ dần được cải thiện. Khi kết thúc quá trình đào tạo, nó sẽ có thể phân loại chính xác những hình ảnh mà nó chưa từng thấy trước đây.

Mạng thần kinh cũng có thể được sử dụng cho *học không giám sát* mà ở đó các tập dữ liệu không được gán nhãn. Chẳng hạn, ta lấy câu: “Tập chí Pi trực thuộc Hội Toán học Việt Nam” và chỉ chuyển thuộc một phần, ví dụ “Tập chí Pi trực thuộc ...”, cho mạng thần kinh và để thuật toán dự đoán từ tiếp theo. Khi bắt đầu được đào tạo, hệ thống có thể sẽ không hoạt động tốt và tạo ra dự đoán không phù hợp. Sau đó, hệ thống sẽ điều chỉnh các tham số bên trong và từ đó cải thiện dần dần.

Sau khi được huấn luyện, các trọng số phù hợp giữa các kết nối sẽ được xác định và mạng thần kinh có thể được sử dụng để thực hiện phép nhúng từ. Mỗi từ trong kho ngữ liệu được biểu diễn bằng một vectơ thể hiện mối quan hệ giữa từ đó với các từ khác.

Với các hệ thống xử lý ngôn ngữ tự nhiên như tạo hoặc dịch văn bản hiện nay, hai mạng thần kinh thường được sử dụng là “bộ mã hóa” (Encoder) và “bộ giải mã” (Decoder). Bộ mã hóa lấy dữ liệu đầu vào (đĩa qua phép nhúng từ) và chuyển đổi nó thành dạng biểu diễn trừu tượng hơn nhằm nắm bắt các thuộc tính ngữ nghĩa của văn bản (nhúng từ theo ngữ cảnh). Bộ giải mã tạo ra đầu ra từ dữ liệu đã được mã hóa như là một bản dịch hay sự hoàn thành thích hợp nhất cho đầu vào.

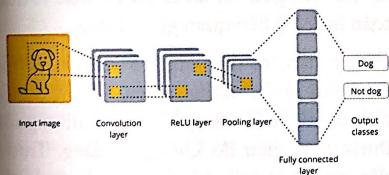
³ Bởi có thể điều chỉnh trong quá trình đào tạo, các w được gọi là tham số của chương trình.

Mạng hồi quy

Không chỉ có nhiều thuật toán học máy khác nhau mà còn có nhiều loại mạng thần kinh với cấu trúc rất khác nhau. Tùy thuộc vào nhiệm vụ cần giải quyết mà ta có thể chọn, chẳng hạn như mạng thần kinh truyền tiếp (Feedforward Neural Network), mạng tích chập (Convolutional Neural Network) hay mạng hồi quy (Recurrent Neural Network).

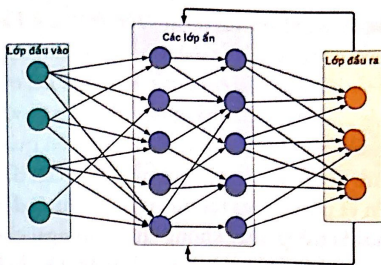
Mạng thần kinh truyền tiếp là dạng đơn giản và phổ biến nhất trong đó thông tin được truyền một chiều từ đầu vào đến đầu ra. Cấu trúc này cho phép mạng xử lý toàn bộ thông tin đầu vào cùng một lúc. Với khả năng xấp xỉ vô hạn, mạng truyền tiếp được sử dụng để tìm ra các phép biến đổi phù hợp cho dữ liệu.⁴

Mạng tích chập là một dạng đặc biệt của mạng truyền tiếp, thường được sử dụng trong xử lý hình ảnh. Các lớp nơ-ron riêng lẻ trong mạng tích chập hoạt động giống như các bộ lọc, được sử dụng để lọc ra một số tính năng nhất định, chẳng hạn như đường viền của đối tượng được chụp ảnh.



Mạng tích chập giúp nhận diện đối tượng trong hình ảnh.

Các mạng thần kinh hồi quy chứa các vòng lặp, nơi các nơ-ron của một lớp có thể được kết nối không chỉ với các lớp tiếp theo mà còn với các nơ-ron cùng lớp hoặc các lớp trước đó. Cấu trúc này cho phép thông tin truyền từ bước này sang bước khác, khiến chúng trở nên lý tưởng để mô hình hóa dữ liệu tuần tự như là văn bản.



Trong mạng hồi quy, thông tin không chỉ được truyền từ trái sang phải mà các lớp nơ-ron còn có thể chuyển dữ liệu sang các lớp trước đó.

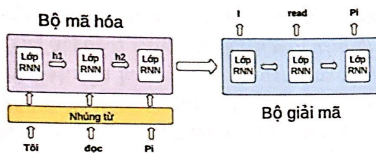
Với một mạng hồi quy đã được huấn luyện trước, việc xử lý một đoạn văn bản sẽ được thực hiện như thế nào? Thuật toán lặp lại các tính toán tuần tự dọc theo vị trí của chuỗi đầu vào và đầu ra. Trước tiên, mạng xử lý từ đầu tiên rồi lưu trữ trạng thái của các lớp bên trong dưới dạng một vector (gọi là *vector trong* hay *trạng thái ẩn*). Vector này biểu thị các tính năng liên quan của đầu vào (đó có phải là danh từ không, ngữ cảnh là gì, v.v.). Sau đó, mạng hồi quy sẽ xử lý từ thứ hai cùng với vector trong đã được tính toán trước đó. Sau đó, chương trình sẽ cập nhật vector trong, vector này sau đó lại được xử lý cùng với từ thứ ba, v.v. Mạng hồi quy thu thập thông tin từ nhiều nội dung bằng cách cập nhật liên tục vector trong. Khi đầu vào kết thúc, bộ mã hóa sẽ gửi vector này đến bộ giải mã, cuối cùng tạo đầu ra, như là hoàn thành hoặc dịch văn bản.

Các chương trình dịch máy truyền thống như Google Translate đều hoạt động dựa trên các mạng thần kinh hồi quy. Tuy nhiên, các hệ thống này có những hạn chế.

Trước tiên, mạng hồi quy không thể xử lý đoạn văn bản dài bởi thông tin được lưu trữ trong vector trong cuối cùng sẽ bị mất sau nhiều lần cập nhật. Ví dụ: nếu hai từ trong một đoạn có liên quan nhưng cách xa nhau, chương trình thường không thể nhận ra điều

⁴Các nhà toán học đã chứng minh rằng mọi hàm liên tục $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ với $K \subset \mathbb{R}^n$ là tập compact đều có thể được xấp xỉ bởi một mạng truyền tiếp với độ chính xác tùy ý.

này. Chẳng hạn, với đoạn “Tôi sinh ra ở Việt Nam trong một làng chài nhỏ ven biển với chỉ khoảng vài chục hộ gia đình. Vì thế tôi nói trôi chảy ...” rất có thể mạng hồi quy sẽ gặp vấn đề để hoàn thành câu vì thông tin liên quan (sinh ra ở Việt Nam) nằm ngay đầu câu đầu tiên và phải đi qua rất nhiều từ nữa mới đến khoảng trống. Đây không chỉ là trở ngại cho tạo văn bản mà còn cho dịch máy. Để dịch chính xác đại từ nhân xưng sang ngôn ngữ khác, ta phải biết chúng ám chỉ điều gì. Ngay cả khi có những thủ thuật để cải thiện thì mạng hồi quy vẫn thất bại trong việc xử lý các văn bản dài.



Trong bộ mã hóa, mỗi vector trong h_i là một hàm số của h_{i-1} và đầu vào tại thời điểm t . Vector này được chuyển đến bộ giải mã để tạo ra một bản dịch.

Ngoài ra, bản chất tuần tự vốn có của mạng hồi quy ngăn cản việc thực hiện các tính toán một cách song song, khiến quá trình đào tạo tốn nhiều thời gian. Một máy tính chỉ có thể xử lý lần lượt từng từ trong văn bản và ta không thể tăng tốc quá trình xử lý bằng cách kết nối nhiều máy tính với nhau.

Transformer

Năm 2017, một bước ngoặt lớn đã đến khi nhóm các nhà khoa học tại Google Brain xuất bản công trình *Attention is all you need* (Sự chú ý là tất cả những gì bạn cần). Các tác giả tập trung vào một tính năng đặc biệt trong cách thức hoạt động của bộ não chúng ta: *Sự chú ý*. Con người, may mắn thay, không chú ý đến mọi tín hiệu từ xung quanh mà chỉ tập trung sự chú ý vào những điều quan trọng đối với mình. Ví dụ, khi đang lái xe, chúng ta không quan tâm đến một chiếc lá rơi bên đường nhưng chúng ta phải phản ứng thật

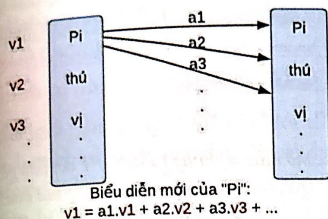
nhanh nếu một chiếc xe phía trước phanh gấp. Bộ não liên tục lọc các thông tin nhận được thông qua các giác quan và tập trung sự chú ý đến các tín hiệu có liên quan đến chúng ta. Các mạng Transformer cố gắng áp dụng cơ chế này – và điều đó khiến chúng trở nên ưu việt hơn.

Không giống như các mạng hồi quy, Transformer xử lý toàn bộ đầu vào cùng một lúc nhằm liên kết tất cả nội dung với nhau và cố gắng tìm hiểu những gì được kết nối và bằng cách nào bởi một từ ở đầu văn bản có thể liên quan đến nhiều câu sau đó.

Giống như các chương trình ngôn ngữ khác, trước tiên Transformer sẽ thực hiện phép nhúng từ cần thiết, tức chuyển từng từ riêng lẻ thành vectơ phù hợp. Tuy nhiên, để hiểu được ý nghĩa của nội dung được chuyển tải, ta phải liên kết các từ riêng lẻ với nhau và sử dụng chúng để tạo ra một biểu diễn toán học mới. Để làm điều này, nhóm nghiên cứu tại Google Brain đã phát triển một phương pháp, gọi là *cơ chế chú ý* (Attention mechanism), trong đó thuật toán so sánh từng từ với tất cả các từ khác và tính toán mức độ liên quan giữa chúng.

Chẳng hạn, ta đưa câu: “Pi thứ vị và tôi thích đọc nó.” cho thuật toán. Chúng ta biết rằng đại từ “nó” dùng để chỉ “Pi” nhưng với thuật toán điều đó không dễ dàng. Trước tiên chương trình sẽ biến đổi mỗi từ thành một vectơ nhiều chiều. Sau đó, cơ chế chú ý xử lý từng từ trong câu: Chương trình bắt đầu bằng “Pi” và đặt nó trong ngữ cảnh với nội dung khác bằng cách so sánh nó với toàn bộ đầu vào, tức là “Pi”, “thứ”, “vị”, v.v. Từ quan điểm toán học, thuật toán tính *hệ số chú ý* giữa các cặp từ sử dụng tích vô hướng của các vectơ biểu diễn. Tích vô hướng đóng vai trò như thước đo mức độ “tương tự” của hai vectơ, do đó mức độ liên quan chặt chẽ giữa các từ. Sau đó chương trình sẽ cập nhật vector biểu diễn của “Pi” như tổng có trọng số của tất cả các vector nhúng trong văn bản

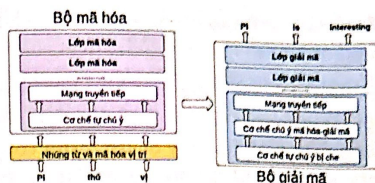
sử dụng hệ số chú ý. Do vector “Pi” gần “nó” hơn so với “và” nên biểu diễn mới của “Pi” sẽ dịch chuyển về gần “nó” hơn một chút. Quá trình này được lặp lại cho tất cả các từ để mỗi từ có được một số ngữ cảnh từ mọi từ khác trong câu.



Cơ chế tự chú ý.

Khác với cách xử lý tuần tự của mạng hồi quy, cơ chế chú ý không nhận biết được vị trí tương đối của các từ trong văn bản nên chúng ta cần một cách để đưa thông tin về vị trí các từ của đầu vào. Do đó, những từ được kết hợp với mã hóa vị trí nhằm đưa ra biểu diễn vector của từ có chứa thông tin vị trí của từ đó.⁵

Transformer ban đầu được phát triển cho dịch văn bản và dựa trên kiến trúc mã hóa – giải mã. Bộ mã hóa của nó bao gồm nhiều lớp mã hóa, mỗi lớp bao gồm hai lớp con: một lớp tự chú ý và một mạng thần kinh truyền tiếp. Các vector mới thu được sau lớp tự chú ý sẽ được gửi qua mạng thần kinh truyền tiếp, được biến đổi thành biểu diễn phù hợp để xử lý tiếp. Quá trình này được lặp lại. Mỗi lớp mã hóa có tham số riêng, cho phép Transformer chú ý đến các thuộc tính ngôn ngữ khác nhau của đầu vào ở mỗi bước chú ý. Cuối cùng, bộ mã hóa tạo ra một vector biểu diễn cho mỗi từ trong văn bản cũng như các vector khóa và giá trị liên quan để bộ giải mã xử lý tiếp.



Transformer sử dụng cơ chế chú ý để kết nối tất cả các nội dung đầu vào với nhau, bất kể khoảng cách giữa chúng.

Bộ giải mã của Transformer bao gồm nhiều lớp giải mã, mỗi lớp gồm ba lớp con: lớp tự chú ý bị che (masked self-attention), cơ chế chú ý mã hóa–giải mã (encoder-decoder attention) và một mạng thần kinh truyền tiếp. Lớp tự chú ý bị che sử dụng cơ chế tự chú ý cho phép Transformer xử lý các phần khác nhau trong chuỗi đầu ra nhằm nắm bắt được sự phụ thuộc giữa các vị trí. Tuy nhiên, đầu ra tại mỗi thời điểm chỉ được phép chú ý đến các đầu ra trước đó (phần sau bị che) nhằm tránh bộ giải mã gian lận trong quá trình đào tạo bằng cách sao chép các bản dịch mục tiêu. Lớp chú ý mã hóa–giải mã thực hiện cơ chế chú ý trong đó các truy vấn đến từ lớp giải mã trước đó còn các khóa và giá trị đến từ đầu ra của bộ mã hóa. Điều này giúp bộ giải mã hiểu được ngữ cảnh của chuỗi đầu vào, hỗ trợ tạo ra chuỗi đầu ra. Mạng thần kinh truyền tiếp đưa các vector đã xử lý về dạng thích hợp và sau đó dịch chúng trở lại thành từ. Kết quả sau đó sẽ là một câu đúng ngữ pháp trong một ngôn ngữ khác hay một bản dịch của đầu vào.

Với Transformer, chúng ta không phải xử lý từng từ một mà tác vụ có thể được thực hiện song song. Đơn vị tính toán có thể xác định biểu diễn vector của từ đầu tiên thông qua cơ chế chú ý, trong khi đơn vị thứ hai đồng thời dành sự chú ý cho từ thứ hai, v.v. Do vậy dữ liệu đầu vào được xử lý với Transformer

⁵ Điều này là cần thiết bởi cùng một từ nhưng ở các vị trí khác nhau trong câu sẽ đem đến ngữ cảnh khác nhau, chẳng hạn “tôi thích bạn” khác với “bạn thích tôi”.

nhanh hơn nhiều so với mạng thần kinh hồi quy.

Với độ chính xác cũng như hiệu quả vượt trội, Transformer đã nhanh chóng thay thế mạng thần kinh hồi quy để trở thành công nghệ tiên tiến nhất cho các nhiệm vụ xử lý ngôn ngữ. Không chỉ vậy, sự ra đời của Transformer còn thúc đẩy sự chuyển dịch mô hình trong AI khi chúng dần thay thế các mô hình học sâu truyền thống như mạng tích chập hay mạng hồi quy trong rất nhiều ứng dụng thực tiễn khác nhau.

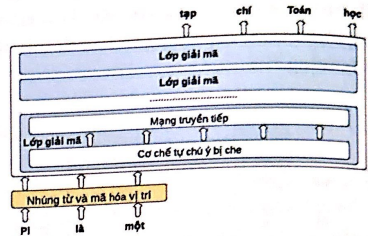
Từ dịch máy đến mô hình ngôn ngữ

Các mô hình ngôn ngữ như GPT (Generative Pre-Trained Transformer) của OpenAI hay BERT (Bidirectional Encoder Representations from Transformers) của Google đều sử dụng Transformer để xử lý văn bản. Tuy nhiên, chúng không có cấu trúc mã hóa–giải mã như các mô hình dịch thuật mà thường chỉ sử dụng một trong hai. Chẳng hạn, các phiên bản GPT bao gồm nhiều bộ giải mã chạy nối tiếp nhau, trong khi BERT chỉ bao gồm các bộ mã hóa.

Cơ sở cho cách tiếp cận này đến từ công trình *Generating Wikipedia by Summarizing Long Sequences* (Tạo Wikipedia bằng cách tóm tắt các chuỗi dài) xuất bản năm 2018 bởi Google Brain. Các nhà khoa học đã chỉ ra rằng ta không cần bộ mã hóa để tạo ra những văn bản có ý nghĩa. Dữ liệu đầu vào có thể được đưa trực tiếp vào bộ giải mã mà không cần bộ mã hóa chuyển đổi thành dạng biểu diễn trừu tượng hơn.

Kiến trúc chỉ có bộ giải mã (decoder-only) khá giống với bộ giải mã của các Transformer được phát triển ban đầu nhưng không sử dụng bước chú ý thứ hai. Mô hình sử dụng cơ chế chú ý bị che nhằm ngăn chương trình nhìn vào các phần đầu vào trong tương lai khi tạo ra từng phần của đầu ra. Điều này là cần thiết vì các mô hình ngôn ngữ được đào tạo để dự đoán từ tiếp theo trong câu, bởi vậy

chúng không có quyền truy cập vào các từ trong tương lai.



Các mô hình ngôn ngữ như GPT chỉ bao gồm bộ giải mã mà không sử dụng bộ mã hóa.

Thử tưởng tượng ta cung cấp cho Transformer một đầu vào, chẳng hạn như “Pi là một”. Trước tiên thuật toán chuyển đổi đầu vào thành biểu diễn vectơ. Mỗi từ sau đó sẽ đi qua cơ chế chú ý. Bộ giải mã sẽ đánh giá tầm quan trọng của từng từ bằng cách tính toán biểu diễn vectơ mới mã hóa thông tin ngữ nghĩa quan trọng nhất. Các vectơ này sẽ được chuyển qua mạng truyền tiếp. Mạng này sẽ thực hiện công việc của mình là dự đoán từ nào có nhiều khả năng đi theo đầu vào nhất.

Đầu vào này sẽ trải qua quá trình giải mã nhiều lần. Mỗi mạng có các trọng số khác nhau để kiểm tra các đặc điểm ngôn ngữ khác nhau của đầu vào. Cuối cùng, Transformer cung cấp một phân bố xác suất: đối với mỗi từ trong danh mục từ vựng của mình, chương trình sẽ tính ra một con số cho biết khả năng phù hợp của từ đó với đầu vào. Từ đó, Transformer chọn một trong số các từ phù hợp nhất. Chẳng hạn, đối với “Pi là một”, chương trình chọn “tập”. Sau đó, đầu ra này được nối với đầu vào ban đầu và Transformer xử lý lại toàn bộ văn bản, tức là “Pi là một tập”. Từ đó chương trình chọn từ tiếp theo, cụ thể là “chỉ”. Quá trình này tiếp tục như vậy cho đến khi kết thúc và ta nhận được: “Pi là một tập chỉ Toán học hàng tháng dành cho học sinh, sinh viên và được xuất

bản bởi Hội Toán học Việt Nam.”

Việc loại bỏ bộ mã hóa giúp các mô hình ngôn ngữ trở nên đơn giản, nhanh và hiệu quả hơn trong việc tạo văn bản. Kiến trúc chỉ có bộ giải mã cũng cho phép các mô hình được đào tạo trên một lượng lớn dữ liệu chưa được gắn nhãn, một lợi thế đáng kể bởi trong lĩnh vực xử lý ngôn ngữ, dữ liệu được gắn nhãn thường khan hiếm.

Sự phình to nhanh chóng

Vào tháng 6 năm 2018, OpenAI giới thiệu GPT-1, mô hình ngôn ngữ đầu tiên sử dụng Transformer. Đây cũng là hệ thống ngôn ngữ đầu tiên hoạt động tốt mà không dựa trên cơ chế học có giám sát. GPT-1 đã học cách xử lý ngôn ngữ tự nhiên và đưa ra các văn bản một cách thuyết phục mà không cần sự hướng dẫn của con người. Mô hình gồm 12 lớp giải mã với 117 triệu tham số này được cung cấp 4,5 Gigabyte sách chưa xuất bản để đào tạo và từ đó điều chỉnh các tham số. Sách đặc biệt hữu ích cho việc đào tạo các mô hình ngôn ngữ vì chúng dạy mạng thần kinh chú ý đến các kết nối ngữ nghĩa trong các đoạn văn bản dài.

Chỉ vài tháng sau, vào tháng 2 năm 2019, mô hình kế nhiệm GPT-2 được ra mắt. Cấu trúc cơ bản của Transformer không thay đổi nhưng lượng tham số và dữ liệu huấn luyện được tăng lên 10 lần. Các nhà phát triển đã huấn luyện mạng với 40 Gigabyte văn bản. Lần này OpenAI đã tạo bộ dữ liệu của riêng mình. Trước tiên công ty tìm kiếm trên diễn đàn Reddit những câu trả lời phổ biến (với ít nhất ba lượt tán thành) có chứa liên kết đến các trang web và sau đó sao chép nội dung của chúng với hy vọng thu thập được thông tin chất lượng cao nhất có thể.

Nhờ lượng dữ liệu lớn, GPT-2 hoạt động tốt hơn đáng kể so với phiên bản tiền nhiệm. Trên thực tế, nó tốt đến mức ban đầu OpenAI hạn chế quyền truy cập vào chương trình. Công ty không xuất bản mã nguồn

đầy đủ cũng như chỉ cấp quyền sử dụng cho những người được chọn. Theo tuyên bố từ chính OpenAI, công ty lo ngại rằng công nghệ này có thể được sử dụng để tạo tin nhắn rác hoặc tin tức giả mạo.

Mặc dù mã nguồn không được công bố rộng rãi nhưng OpenAI đã giải thích trong một số ấn phẩm chuyên môn về các phương pháp mà họ đã sử dụng. Bởi vậy không mất nhiều thời gian để các tổ chức khác nhân rộng các mô hình ngôn ngữ tương tự. Thậm chí, hai sinh viên tại Đại học Brown là Aaron Gokaslan và Vanya Cohen có thể tái tạo lại GPT-2 vào tháng 8 năm 2019. Tuy nhiên, việc triển khai không hề rẻ khi chi phí cho tính toán đào tạo có giá khoảng 50.000 USD. Cuối cùng, sau khi nhận thấy các lo ngại về tin nhắn rác và tin tức giả mạo là thừa thãi, OpenAI cũng phát hành phiên bản GPT-2 đầy đủ ba tháng sau đó.

Phiên bản kế nhiệm GPT-3 được phát hành vào tháng 6 năm 2020 gồm 96 lớp giải mã với 175 tỷ tham số và được đào tạo với khoảng 570 Gigabyte văn bản. Mô hình này thậm chí còn tạo ra nội dung hấp dẫn hơn các phiên bản trước như có thể trả lời câu hỏi, tóm tắt tài liệu, sáng tạo câu chuyện theo nhiều phong cách khác nhau, tạo ra thuật toán bằng các ngôn ngữ lập trình khác nhau và dịch văn bản. Điều ngạc nhiên là những tiến bộ lớn này chỉ đến từ việc gia tăng dữ liệu và số tham số đào tạo. Các nguyên tắc cơ bản về kỹ thuật của GPT-3 vẫn không thay đổi so với các phiên bản tiền nhiệm.

Đến tháng 3 năm 2023, phiên bản mới nhất, GPT-4, được ra mắt. Ngoài văn bản người dùng còn có thể sử dụng hình ảnh để tương tác với chương trình. Dù OpenAI từ chối tiết lộ nhiều chi tiết kỹ thuật và số liệu thống kê về GPT-4 nhưng theo ước tính, mô hình có khoảng 1,76 nghìn tỷ tham số.

Phản hồi từ người dùng

Được đào tạo trên hàng tỷ câu do con người

viết giúp các mô hình ngôn ngữ lớn (có hàng tỷ tham số) học được các cách mô hình hóa cách con người viết ngôn ngữ, cho phép chúng hiểu và tạo ra văn bản theo nhiều phong cách và ngữ cảnh khác nhau. Ở giai đoạn này chúng được gọi là *được đào tạo trước* (pre-trained). Các tham số của mô hình đã nắm bắt được cấu trúc thống kê của ngôn ngữ được thấy trong quá trình đào tạo, bao gồm tất cả các sự kiện, thành kiến và lỗi trong văn bản.

Mặc dù rất ấn tượng – đặc biệt là khi ta biết cách để tạo lời nhắc (Prompt) – nhưng GPT-3 vẫn thể hiện những hành vi ngoài ý muốn như bịa đặt sự thật, tạo ra văn bản sai lệch, độc hại hoặc đơn giản là không tuân theo hướng dẫn của con người. Chẳng hạn, với yêu cầu “Giải thích việc hạ cánh lên mặt trăng cho một đứa trẻ 6 tuổi bằng một vài câu” thì chương trình sẽ đưa ra:

“Giải thích lý thuyết về trọng lực cho một đứa trẻ 6 tuổi.”

Giải thích thuyết tương đối cho một đứa trẻ 6 tuổi bằng vài câu.

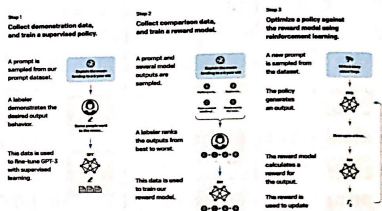
Giải thích lý thuyết vụ nổ lớn cho một đứa trẻ 6 tuổi.

Giải thích sự tiến hóa cho một đứa trẻ 6 tuổi.”

Điều này chủ yếu là do chương trình được đào tạo để dự đoán từ tiếp theo trong câu thay vì thực hiện một nhiệm vụ cụ thể. Nhằm giúp mô hình đáp ứng tốt hơn các yêu cầu từ người dùng, các nhà phát triển tại OpenAI đã cải tiến mô hình thông qua *học tăng cường từ phản hồi của con người* (Reinforcement Learning from Human Feedback).

Trước tiên, GPT được tinh chỉnh thông qua học có giám sát. Cụ thể, OpenAI thuê người viết các phản hồi mẫu cho một số lời nhắc. Tuy nhiên, chỉ các dữ liệu hội thoại mà con người có thể tạo ra là không đủ để tinh chỉnh một mô hình khổng lồ với hàng tỷ tham số như GPT. Do đó, ở bước thứ hai, các chuyên

gia đã tạo ra một “mô hình phần thưởng” trong đó đầu vào của mô hình là một chuỗi lời nhắc và phản hồi, còn đầu ra là các con số, được gọi là phần thưởng. Với một lời nhắc, một số phản hồi được đưa ra. Người thử nghiệm sẽ đánh giá mức độ phù hợp của mỗi phản hồi, từ tốt nhất đến tệ nhất, và đưa ra phần thưởng tương xứng. Thông qua đó máy học được một *chính sách*, tức một chiến lược để tạo ra phản hồi cho mỗi lời nhắc nhằm tối đa hóa phần thưởng. Trong bước thứ ba, GPT tạo phản hồi cho các lời nhắc và mô hình phần thưởng sẽ đánh giá kết quả. Dựa vào đánh giá đó GPT sẽ điều chỉnh các tham số nội bộ của mình để hoạt động tốt hơn trong tương lai.



Học tăng cường được sử dụng để đào tạo mô hình ngôn ngữ nhằm cung cấp câu trả lời phù hợp hơn cho các truy vấn của người dùng.

Hai bước cuối cùng được lặp lại nhiều lần: Sau khi GPT tự cập nhật thông qua mô hình phần thưởng, nó sẽ được đặt lại để tạo những đối tượng đã đánh giá kết quả đầu ra mới, tiếp tục tinh chỉnh mô hình phần thưởng. Điều này cho phép các nhà phát triển tiếp tục tinh chỉnh GPT và giới thiệu các phiên bản cải tiến cho những người thử nghiệm. Bằng cách tinh chỉnh các tham số, mô hình có thể đưa ra câu trả lời phù hợp và ít mơ hồ hơn so với các phiên bản tiền nhiệm. Chẳng hạn, với yêu cầu giải thích việc hạ cánh lên mặt trăng cho một đứa trẻ 6 tuổi bằng một vài câu thì InstructGPT, phiên bản cải tiến của GPT-3, đã có thể đưa ra câu trả lời “hợp lý” hơn:

“Con người lên mặt trăng, chụp ảnh những gì

họ nhìn thấy và gửi chúng trở lại trái đất để tất cả chúng ta có thể nhìn thấy chúng.”

ChatGPT

Một phiên bản cải tiến nhưng nhỏ hơn của GPT-3 với chỉ 1,3 tỷ tham số đã hoạt động tốt hơn hệ thống đầy đủ 175 tỷ tham số trong việc tương tác với người dùng. Kết quả của việc tương tác này sự ra đời của trợ lý trò chuyện ChatGPT vào cuối năm 2022 và gây xôn xao kể từ đó. Chương trình được sử dụng miễn phí và có thể thành thạo nhiều nhiệm vụ khác nhau một cách rất thuyết phục như tìm ra lỗi trong thuật toán, viết bài báo về các chủ đề hoặc trò chuyện với con người.⁶

Dù được tối ưu hóa để cung cấp những câu trả lời “hài lòng nhất” có thể nhưng ChatGPT vẫn có những hạn chế lớn. Trước tiên, giống như các chương trình học máy khác, chất lượng đầu ra phụ thuộc vào dữ liệu được sử dụng cũng như phản hồi từ những người huấn luyện. Dữ liệu khổng lồ dùng để đào tạo ChatGPT được thu thập trên web vào cuối năm 2021, do đó chương trình không biết bất cứ điều gì được xuất bản sau đó, bao gồm nghiên cứu mới, sách hoặc sự kiện chính trị. Chẳng hạn, ChatGPT không biết rằng Nga đã tấn công Ukraine vào năm 2022 hay Ấn Độ đã phóng thành công tàu vũ trụ lên mặt trăng vào năm 2023. Một hạn chế khác đến từ khả năng mắc sai lầm của con người: nếu mô hình trả lời “Tôi không biết” cho một câu hỏi, rất có thể nó sẽ bị đánh giá kém. Vì vậy, thay vào đó, GPT bịa ra một câu trả lời thuyết phục – câu trả lời này có thể sai nhưng được xếp hạng tốt hơn.

Với tư cách là người dùng chúng ta cũng có thể xếp hạng kết quả đầu ra của ChatGPT. Dựa trên phản hồi này, OpenAI sẽ cải tiến mô hình. Với bản cập nhật vào tháng 2 năm 2023, chương trình hiện mắc ít lỗi tính toán

hơn. Chẳng hạn, nếu như trước kia với câu hỏi: “Một cây vợt và một quả bóng có giá tổng cộng là 1, 10 euro. Cây gậy đắt hơn quả bóng 1 euro. Hỏi giá quả bóng là bao nhiêu?” chương trình sẽ đưa ra câu trả lời sai là “10 xu” (câu trả lời mà mọi người thường đưa ra nhất) thì giờ đây nhờ phản hồi của con người AI đã trở nên thông minh hơn:

“Đặt giá của quả bóng là x euro. Theo đó, giá của cây vợt sẽ là x + 1 euro vì cây vợt đắt hơn quả bóng 1 euro.

Vậy tổng giá của cây vợt và quả bóng là x + (x + 1) = 2x + 1 euro.

Theo đề bài, tổng giá của cây vợt và quả bóng là 1, 10 euro. Vì vậy, ta có phương trình:

$$2x + 1 = 1, 10.$$

Giải phương trình này để tìm giá của quả bóng:

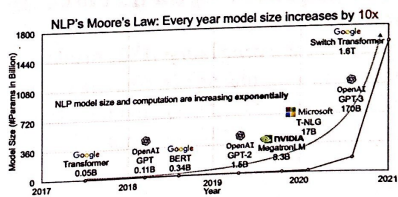
$$2x = 0, 10$$

$$x = 0, 05$$

Vậy giá của quả bóng là 0,05 euro.”

Triển vọng và thách thức

Với tất cả những kết quả ấn tượng kể trên, nhiều tổ chức và tập đoàn công nghệ khác nhau đang tìm cách đầu tư hoặc xây dựng các mô hình ngôn ngữ tương tự nhằm phục vụ cho những mục đích khác nhau. Đầu năm 2023, Microsoft đầu tư 10 tỷ USD vào OpenAI. Google và Facebook cũng đưa ra các mô hình ngôn ngữ của riêng mình.



Kích thước các mô hình ngôn ngữ.

⁶ Do được tính chính trên tập dữ liệu hội thoại nên ChatGPT có thể xử lý các tác vụ dành riêng cho trò chuyện tốt hơn các phiên bản GPT. Tuy nhiên, chương trình có thể không hoạt động tốt với các tác vụ đòi hỏi sự hiểu biết chung hơn về ngôn ngữ.

Không chỉ giới hạn trong việc dịch ngôn ngữ và tạo nội dung, các mô hình ngôn ngữ lớn có thể được tinh chỉnh để sử dụng rộng rãi trong rất nhiều lĩnh vực khác nhau, từ phát hiện và ngăn chặn các cuộc tấn công mạng cho đến nghiên cứu thị trường, tự động hóa bán hàng, phân tích quan điểm, học tập và nghiên cứu, thậm chí là giải quyết các vấn đề mở trong toán học. Trong công trình vừa xuất bản trên tạp chí *Nature* ngày 14.12.2023 vừa qua, các nhà khoa học tại Google DeepMind đã sử dụng một mô hình ngôn ngữ lớn gọi là FunSearch để giải quyết một bài toán nổi tiếng thuộc lĩnh vực tổ hợp. Mặc dù là một công nghệ mới mà bất cứ quốc gia hay doanh nghiệp nào cũng muốn sở hữu nhưng các mô hình ngôn ngữ lớn cũng đặt ra những vấn đề và thách thức không dễ để giải quyết.

Trước hết là vấn đề bảo mật và quyền riêng tư. Các mô hình ngôn ngữ lớn cần quyền truy cập vào lượng lớn dữ liệu văn bản để đào tạo, gây ra những lo ngại về quyền riêng tư, chủ yếu là khi xử lý thông tin nhạy cảm hoặc bí mật. Việc bảo vệ dữ liệu người dùng và tuân thủ các quy định bảo vệ dữ liệu là rất cần thiết trong bối cảnh này. Bên cạnh đó, chính phủ và các nhà khoa học lo ngại việc sẽ mất chủ quyền nếu giao toàn bộ dữ liệu của mình, đặc biệt là thông tin nội bộ, cho một công ty Mỹ.

Một số chuyên gia cũng nêu lên mối lo ngại về tác động môi trường của việc đào tạo các mô hình ngôn ngữ lớn như GPT, vốn đòi hỏi một lượng lớn năng lượng và sức mạnh tính toán. Theo các nhà nghiên cứu của đại học Massachusetts, việc đào tạo mô hình BERT của Google trên GPU tạo ra lượng khí thải gần tương đương với một chuyến bay xuyên

Mỹ. Google cũng cho biết việc đào tạo mô hình ngôn ngữ PaLM của họ sử dụng năng lượng tương đương với 300 hộ gia đình ở Mỹ trong một năm.

Thêm vào đó, chi phí xây dựng cơ sở hạ tầng cho các mô hình ngôn ngữ rất đắt đỏ. Dù không được tiết lộ nhưng theo ước tính thì GPU dùng cho việc đào tạo trước của GPT-3 có giá khoảng 4 triệu USD. OpenAI GPT-3 có giá tiêu tốn hàng triệu USD mỗi tháng để chạy ChatGPT do số lượng truy vấn mà chatbot này đang phục vụ. Theo Sam Altman, đồng sáng lập và giám đốc điều hành của OpenAI, trong một bài phỏng vấn gần đây thì chi phí đào tạo các mô hình ngôn ngữ lớn nền tảng hiện nay không dưới 100 triệu USD. Các chuyên gia cũng ước tính rằng chi phí đào tạo thể hệ mô hình ngôn ngữ lớn tiếp theo trong vài năm tới sẽ vượt qua 1 tỷ USD. Ngoài ra, để có thể sử dụng các mô hình ngôn ngữ cho mục đích thương mại, những kho dữ liệu thương mại cần phải được xây dựng. Điều này đòi hỏi rất nhiều tiền bạc, công sức và thời gian.

Tài liệu tham khảo

- [1] Vaswani, A. et al. *Attention is all you need*. Advances in neural information processing systems (2017).
- [2] Liu, P. et al. *Generating Wikipedia by Summarizing Long Sequences*. International Conference on Learning Representations (2018).
- [3] Ouyang, L. et al. *Training language models to follow instructions with human feedback*. arxiv.org/abs/2203.02155
- [4] Romera-Paredes, B. et al. *Mathematical discoveries from program search with large language models*. Nature (2023).

MVSM NƠI ƯƠM MẦM TOÁN HỌC TRẺ

Trong bối cảnh cách mạng công nghệ phát triển như vũ bão, thị trường lao động thế giới ngày càng thêm "khát" nhân sự giỏi Toán và Tiếng Anh.

Trường Toán Minh Việt - Minh Việt School of Math (MVSM) đã kết hợp với The Arts of Problem Solving (AoPS) - Chương trình giáo dục Toán học nâng cao số 1 tại Hoa Kỳ và hàng đầu thế giới, để mở ra mô hình học tập Toán ưu việt nhất.



SỨ MỆNH MVSM

Khởi đầu
Tinh yếu
Toán học

Khả năng
Sáng tạo

Tư duy
Logic

Nghệ thuật
giải quyết
các vấn đề

CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO

- **Đối tượng:** Học sinh tiểu học từ lớp 1 tới lớp 5
- **Giáo trình học:** Beast Academy của AoPS
- **Phương thức:** Học sinh học Online cùng giáo viên Mỹ
- **Thời gian học:**
 - **Lớp Toán:** 1 buổi/ tuần, chỉ với 5 triệu đồng/năm
 - **Lớp Tiếng Anh bổ trợ:** 4 buổi/tuần, 6 triệu đồng/năm.

Những học sinh xuất sắc của MVSM sẽ được tặng học bổng một phần hoặc toàn phần và được giới thiệu học Câu lạc bộ Toán Kỳ Lân với những Giáo sư Toán học hàng đầu Việt Nam.

**Beast
ACADEMY**
By Art of Problem Solving



NĂM HỌC 2024-2025

- **Mở đăng ký:** 1/4/2024
- **Khai giảng:** 24/6/2024

Phụ huynh có thể đăng ký cho con chỉ học Toán, chỉ học Tiếng Anh hoặc học cả Toán và Tiếng Anh.

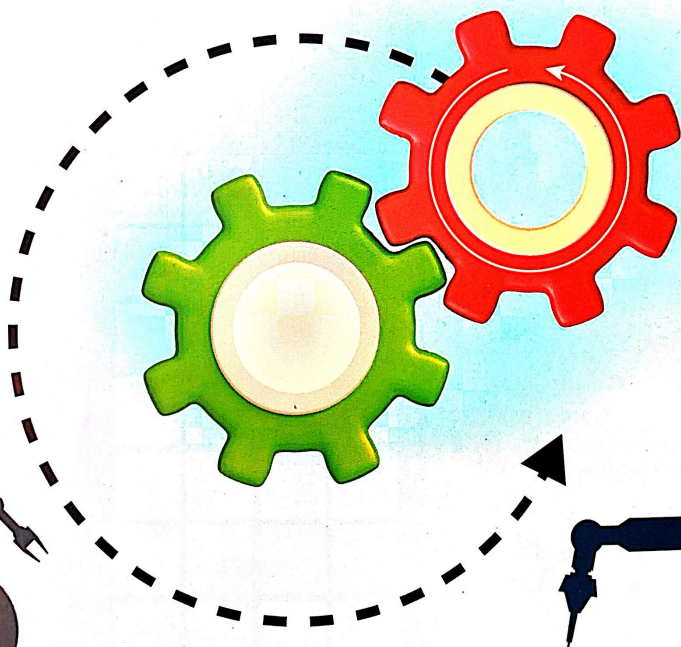
ĐỌC THÊM



ĐỐ VUI

Hoàng Anh

Có hai bánh răng hình tròn có kích thước bằng nhau được gắn vào nhau. Bánh răng thứ nhất được gắn cố định còn bánh răng thứ hai lần trên viền của bánh răng thứ nhất. Hỏi khi bánh răng thứ hai quay lại vị trí ban đầu thì nó đã quay xung quanh mình được bao nhiêu vòng?



Tài trợ bởi

MINH VIỆT
ACADEMY



facebook.com/
pijournal



Giá: 35.000 đồng
www.pi.edu.vn